数理解析研究所講究録
第227巻 1975年 42-53

Hypo-elliptic pseudo-differential operators with double characteristics

東工大 理　平良和昭

§1. 序

与えられた pseudo-differential operator $P(x, D)$ (以下 Ψ.D.O. と略) が原点の近傍 Ω で Hypo-elliptic (以下 H.E. と略) であるとは：

任意の open set $\Omega_1 \subset \Omega$ に対して $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (或いは $\mathcal{E}'(\Omega)$),

$Pu \in C^\infty(\Omega_1)$ ならば $u \in C^\infty(\Omega_1)$

となるときをいう。$P(x, D)$ の characteristic $\Sigma = \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; $p_m(x, \xi) = 0\}$ ($p_m(x, \xi)$ は P の主部) が "simple" の場合を扱っているものとして Hörmander [11], Egorov [3], Treves [23] 等がある。

さて、characteristic が "double" の場合は未だ流動的である。"double" の定義についても考えなければならないが、本稿では具体的な場合しか考察しない (§2 をみよ)。ところで、"double" の場合は次の2つの方法に要約される (下の(注意3)もみよ)：

[I] ひとつは、principal symbol $p_m(x, \xi)$ に対する条件をゆるめて低階に制限を加え、いわゆる Half Estimates を導く方法であ

る。$m=2$ の場合の principal symbol に対する条件は，$p_2(x,\xi)=\sum_{j=1}^{K} X_j(x,\xi)^2$ ($X_j(x,\xi)$ は ξ について1次斉次の real symbol) とするとき

(A 1) $\quad \sum_{j,\ell=1}^{K} |\{X_j, X_\ell\}(x,\xi)| > 0, \quad \forall (x,\xi)\in N=\{(x,\xi)\in K\times S^{n-1} : X_1(x,\xi)=\cdots=X_K(x,\xi)=0\}$

(ここで $\{\ ,\ \}$ は Poisson bracket, K は原点を含む compact set)

或いは，$X_j(x,\xi)$ 達が微分作用素のときは

(A 1)′ $\quad \{X_j\}_{j=1}^{K} \quad \{[X_j, X_\ell]\}_{j,\ell=1}^{K}$ が Vector field を張る

(ここで $[\ ,\ ]$ は交換子)

というようにのべられる。(A1) 或いは (A1)′ のもとでは，原点の近傍 Ω が存在して，適当な正の定数 C_1, C_2 に対して，

$$\mathrm{Re}\,(p_2(x,D)u, u) \geqq C_1\|u\|_{1/2}^2 - C_2\|u\|_0^2 \quad u\in C_0^\infty(\Omega)$$

なる Half Estimate が成立する。従って，低階，即ち，1階の項 $q(x,\xi)$ を加えた $P(x,D)=p_2(x,D)+q(x,D)$ に対しても上の不等式が成立することを示せれば，あとは，よく知られた議論から $P(x,D)$ に対する H.E. が導かれる。$q(x,\xi)$ に対する条件について例を2つのべる。

例 1 (cf. Kohn [14])

(C 1) $\quad |\{X_1, X_2\}(x,\xi)| + \mathrm{Re}\, q(x,\xi) > 0, \quad \forall (x,\xi)\in N$

ならば $P(x,D)=\sum_{j=1}^{K} X_j(x,D)^2 + q(x,D)$ は H.E. である。低階 $q(x,\xi)$ の処理には，$\bar\partial$-Neumann 問題 (Folland and Kohn [4]) でよく使われる技法 $\sum_{j=1}^{K} X_j^2 = \sum_{j=1}^{K}\sigma_j X_j^2 + \sum_{j=1}^{K}(1-\sigma_j)X_j^2 \ (0<\sigma_j<1)$ と Melin [17] の結果に注意すればよい。

例2 (Folland and Kohn [4]) $\bar{\partial}_b$ - Neumann 問題の場合の低階に対する条件は，いわゆる Levi form の正負の固有値の数に対する条件であり，これから a sharp form of Gårding's inequality と例1でのべた技法により Half Estimate が導かれる。

(注意 1)　System の場合でも例2のような principal symbol が"対角形"のときは単独な場合の証明法が通用する。(例えば Boutet de Monvel and Treves [2]。)

[II] もうひとつは，principal symbol に対する条件を強めて低階に対するかなり精密な(必要)十分条件を，Parametrix を構成して導く方法である。$m=2$ の場合の principal symbol に対する条件は $P_2(x,\xi) = \sum_{j=1}^{K} r_j(x,\xi)\cdot\overline{r_j(x,\xi)}$ ($r_j(x,\xi)$ は ξ について1次斉次) とするとき

(A 1)'' $-\{\mathrm{Re}\, r_j, \mathrm{Im}\, r_j\}(x,\xi) = -\sqrt{-1}\{r_j, \bar{r}_j\}(x,\xi) > 0$, ${}^\forall(x,\xi) \in \{(x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}^n\setminus 0 \mid r_1(x,\xi) = \cdots = r_K(x,\xi) = 0\} = \Sigma$　(これは (A 1), (A 1)' に対応する。) ;

(A2)　$\{d\,\mathrm{Re}\, r_j(x,\xi)\}_{j=1}^{K}$, $\{d\,\mathrm{Im}\, r_j(x,\xi)\}_{j=1}^{K}$　Σ 上一次独立 ;

(A 3)　$\{r_j, r_\ell\}(x,\xi) = 0$　at Σ ;

(A4)　$\{r_j, \bar{r}_\ell\}(x,\xi) = 0$　at Σ when $j \neq \ell$;

というようにのべられる。このとき，$P_2(x,\xi)$ は micro-local な性質のよくわかる形に正準変換することができ，低階 $g(x,\xi)$ のみたすべき条件が次のように詳しくわかる：

(C 1)'　$g(x,\xi) + \frac{1}{\sqrt{-1}}\sum_{j=1}^{K}\{r_j, \bar{r}_j\}(x,\xi)\,(1+m_j) \neq 0$, ${}^\forall(x,\xi)\in\Sigma$, ${}^\forall m_j \in \mathbb{Z}^+\cup\{0\}$

ならば $P(x,D)=P_2(x,D)+g(x,D)$ は H.E. である。ここで、条件(C1)′の意味するところを理解するために具体的な例を2つあげる。

例3 (Folland and Stein [5]) $(x,y,t)\in\mathbb{R}^K\times\mathbb{R}^K\times\mathbb{R}$, dual変数を $(\xi,\eta,\tau)\in\mathbb{R}^K\times\mathbb{R}^K\times\mathbb{R}$, $X_j=\frac{1}{2}(\eta_j-2x_j\tau)$, $Y_j=\frac{1}{2}(\xi_j+2y_j\tau)$ $g=-\alpha\tau$ $(\alpha\in\mathbb{C})$, $P(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=\sum_{j=1}^{K}(X_j^2+Y_j^2)-\alpha\tau$ とする。このとき、$\tau(\neq 0)$ をパラメーターとみて、y について部分Fourier変換をやり(Elementary canonical transformation を引き起す)、次に、変数変換 $z_j=\frac{1}{|\tau|^{1/2}}(x_j\tau-\frac{1}{2}y_j)$, $w_j=\frac{1}{|\tau|^{1/2}}(x_j\tau+\frac{1}{2}y_j)$ を行えば $P(x,y,t,D_x,D_y,\tau)$ は $\tilde{P}(z,D_z,\tau)=|\tau|\sum_{j=1}^{K}(z_j^2+D_{z_j}^2)-\alpha\tau$ になる(cf. Melin [17])。($\tilde{P}$ は z については Elliptic だが、(z,w) については Non-elliptic に注意。) そこで、$m=(m_1,\cdots,m_K)$, $m_j\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$, に対して $v_m(z)=\left(\prod_{j=1}^{K}H_{m_j}(z_j)\right)e^{-\frac{|z|^2}{2}}$, $H_{m_j}(z_j)$ は m_j 次の Hermite 多項式、とおけば $v_m(z)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^K)$ で

$$\tilde{P}(z,D_z,\tau)v_m(z)=(|\tau|K+2|\tau||m|-\alpha\tau)v_m(z)$$

だから、特に、$\alpha\tau=|\tau|(K+2|m|)$ のとき $\tilde{P}$ は(従って P は) H.E. でない。このようなことが起らない条件が正に(C1)′である。($\{X_j,Y_j\}=\tau$ に注意。) 書き直すと

(C1)′ $\Longleftrightarrow$ a) $\mathrm{Im}\,\alpha\neq 0$, 或いは、 b) $\alpha\in\mathbb{R}$ で $|\alpha|\neq K, K+2, K+4\cdots$

(Folland and Stein [5] はわれわれとは別の方法で証明しているようであるが詳細はわからない。)

例4（Grušin [7]） $(x,t)\in\mathbb{R}^2$，dual 変数を $(\xi,\tau)\in\mathbb{R}^2$，$P(x,t,D_x,D_t)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+t^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\lambda\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x}$ $(\lambda\in\mathbb{C})$ とする。このとき，x-方向を Fourier 変換して $\xi(\neq 0)$ をパラメーターとみる。$\hat{P}(x,t,\xi,D_t)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-t^2\xi^2+\lambda\xi$。そこで，例3と同様 $v_m(t)=H_m(|\xi|^{1/2}t)\,e^{-\frac{|\xi|}{2}t^2}$ $(\xi\neq 0)$，$m\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$，とおけば

$$\hat{P}(x,t,\xi,D_t)\,v_m(t)=(\lambda\xi-(2m+1)|\xi|)\,v_m(t)$$

だから，特に，$\lambda\xi=(2m+1)|\xi|$ のときは $\hat{P}$ は（従って P は）H.E. でない。（$X=\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial t}$，$Y=t\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x}$ とおけば $[X,Y]=\xi$ に注意。）書き直せば (C1)′ は

$$(C1)'\iff\lambda\neq\pm(2m+1),\ {}^{\forall}m\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$$

（注意2） 例3，例4とも $Pu=0$，$u\notin C^\infty$ なる u の存在について考察していることに他ならない。（§2 の定理1 の (2) をみよ。）

さて，[I] の詳しい議論は別の機会に譲り，本稿では，[II] の条件 (C1)′ が成立しない場合を考察する。平良 [22] で触れた次の例が手がかりになる。

例5（Grušin [7]） $\mathbb{R}^2$ で例4の $\lambda=1$ の場合を考える。

$$P(x,t,D_x,D_t)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+t^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x}+a\,t^2\frac{\partial}{\partial x}\quad(a\in\mathbb{C})$$

このとき，P H.E. $\iff a\neq 0$

（われわれのなすべきことを次のようにのべることもできる：

例5 の a を変数係数の場合に拡張すること。)

(注意3) [I]は Hörmander [9], Radkevič [18], [19], Kohn [14], [II] は Grušin [6], [7], [8], Sjöstrand [20], [21] 等がある。ところで，Boutet de Monvel and Treves [1], [2] や Treves [24] の "Concatenation" による方法は，いわば，[I]と[II]の中間的方法であって (C1)′ を導くのに，Parametrix の構成によるのではなく，Half Estimate によっている。また，その方法は，Treves [24] からわかるように，(C1)′ が成立しない場合にも適用すると思われるが，それは，例5 についていえば $a(x) \neq 0$ の場合であって $a(x)=0$ となり得る場合には駄目なようである。(従って，次の §2 の 定理4，系5，定理6 は導くことができないようであるが，筆者には詳しいことはよくわからない。)

§2. 結果

$x \in R^k$, $t \in R^n$, dual 変数 $\xi \in R^k$, $\tau \in R^n$ の場合でもよいが，簡単のため $n=1$ の場合しかのべない。また，本質的な部分を見失なわないために Situation をきわめて具体的にするが，一般化は比較的容易である。

まず，(C1)′ がみたされている場合から始めよう。

<u>定理0</u>　次の Ψ.D.O. を考える：$P_1(x,t,D_x,D_t) = D_t^2 +$
$(a(x) + \sqrt{-1}\, b(x) + c(x) + \sqrt{-1}\, d(x))\, t\, \rho(D_x) \frac{\partial}{\partial t} - (a(x) + \sqrt{-1}\, b(x))(c(x) + \sqrt{-1}\, d(x))$
$\times\, t^2 \rho(D_x)^2 + (c(x) + d(x)\sqrt{-1})\rho(D_x) - e(x)\rho(D_x)$，ただし

(H1)　$a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ 実数値で $a(x) > 0$, $c(x) < 0$;

(H2)　$\rho(\xi) = |\xi|^\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R}^+)$。

このとき，

$x = 0$ の近傍が存在して $e(x) \neq (a(x) - c(x) + (b(x) - d(x))\sqrt{-1})m$,
$\forall m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

ならば，$P_1(x,t,D_x,D_t)$ は原点の近傍で H.E. である。

次に，(C1)' が成立しないときの結果をのべよう。

<u>定理1</u>　$P_1(x,t,D_x,D_t)$ は<u>定理0</u>と同じで

(*)　$e(0) = (a(0) - c(0) + (b(0) - d(0))\sqrt{-1})\, m$ なる $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ が存在する

とする。

(1)　$\rho(\xi) = |\xi|$ とする。このとき，原点の近傍 Ω が存在して $\forall \varepsilon > 0$, $\forall\, 0 < \delta < \frac{1}{2}$ に対して $P_1 u \in H_0^{loc}(\Omega)$ で $u \in H_{1-\delta}^{loc}(\Omega)$ 且 $u \notin H_{1-\delta+\varepsilon}^{loc}(\Omega)$ なる u が存在する。

(cf. Boutet de Monvel and Treves [2], Sjöstrand [21].)

(2)　$\rho(\xi) = |\xi|^\lambda$，$a$, b, c, d, e 定数係数とする。このとき，$\alpha = a + b\sqrt{-1}$，$\beta = c + d\sqrt{-1}$

$$v_m(x,t) = \int e^{ix\xi} e^{\frac{\beta}{2} t^2 p(\xi)} \frac{\mathcal{L}_m(p(\xi)^{1/2} t)}{(1+|\xi|^2)^{\ell_m}} d\xi \quad (\ell_m \text{ 十分大})$$

$$\mathcal{L}_m(z) = (-1)^m e^{\frac{\alpha-\beta}{2} z^2} \frac{d^m}{dz^m}\left(e^{-\frac{\alpha-\beta}{2} z^2}\right)$$

とおけば，$D_t^m v_m(x,0) \notin C_x^\infty$ で $P_1(x.t.D_x.D_t) v_m(x.t) = 0$ 特に，$P_1(x.t.D_x.D_t)$ は H.E. でない。

従って，以後，われわれは，a, b, c, d, e が定数で (*) がみたされている場合を詳しく考察する。そのために，P_1 に低階をつけかえたときの様子を記述する基本的な結果をのべる。

基本定理2　$P_1(x.t.D_x.D_t)$ は 定理0 と同じで $a.b.c.d$ e が定数で (*) が成立しているとする。このとき

$$P_2(x.t.D_x.D_t) = P_1(x.t.D_x.D_t) + f(t)\,\omega(x, D_x)$$

$$f(0) = 0, \quad \omega(x, D_x) = \omega(x) p(D_x) + \varepsilon(x)$$

とすると次のような作用素 H, Q が存在する：

(1) $$H\varphi(x.t) = \int e^{ix\xi} \int e^{-iz\xi} h(t, z, \xi) \varphi(z)\, dz\, d\xi,$$

$$Q\varphi(x) = \int e^{ix\xi} \int e^{-iz\xi} q(z, \xi) \varphi(z)\, dz\, d\xi$$

(cf. Hörmander [10], Kumano-go [15])。ここで，$h(t.z.\xi)$，$q(z,\xi)$ は（z をパラメーターとする）t に関する常微分方程式の初期値問題：$P_2(x.t.\xi.D_t) h(t,z.\xi) + e^{-\frac{\alpha}{2} t^2 p(\xi)} q(z,\xi) = 0$; $h(0, z, \xi) = 1$ の解である。

(2) $G\varphi(x,t) = \int e^{ix\xi} e^{-\frac{\alpha}{2}t^2\rho(\xi)} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$ とおくと

$P_2 H\varphi + GQ\varphi = 0$, $H\varphi(x,0) = \varphi(x)$ をみたし

P_2 が H. E. $\Longleftrightarrow$ Q が H. E.

(3) $Q \in S^{1,0}$ (熊ノ郷 [16]) であって

Q の symbol $\sim \sum_{\gamma} \frac{D_z^{\gamma} \partial_{\xi}^{\gamma} g(z,\xi)}{\gamma!}\Big|_{z=x}$

個々の場合について Q を計算することによって次の結果を得る。

<u>定理3</u> (cf. Treves [24]) $\omega(0) \neq 0$, $b = d = 0$, $a + c = 0$, $f^{(l)}(0) \geq 0$ $l = 1, 2, \cdots\cdots$ とする。

(1) $f(t)$ が有限次の接触ならば $P_2(x, t, D_x, D_t)$ は H. E. である。

(2) $f(t)$ が無限次の接触ならば $P_2(x, t, D_x, D_t)$ は H. E. でない。

(注意) $f(t)$ のみたすべきより一般な十分条件は複雑である。

<u>定理4</u> $\rho(\xi) = |\xi|$, $f(t) = t^2$ とする。このとき

i) $\omega(0) = \omega^{(1)}(0) = \cdots = \omega^{(k)}(0) = 0$;

ii) $0 \leq \delta < 1$ と原点の近傍 Ω が存在して, 任意の compact set $K \subset \Omega$ に対して $C(K) > 0$, $C(\theta, K) > 0$ が存在し

$$\begin{cases} \text{(a)} \ |\omega(x)\rho(\xi) + \varepsilon(x)| \geq C(K), \quad \forall x \in K \ \forall |\xi| \geq C(K); \\ \text{(b)} \ |\omega^{(\theta)}(x)\rho(\xi) + \varepsilon^{(\theta)}(x)| \leq C(\theta, K)(1+|\xi|)^{\delta|\theta|} |\omega(x)\rho(\xi) + \varepsilon(x)|, \end{cases}$$

$\forall x \in K$, $\forall |\xi| \geq C(K)$ (cf. Hörmander [12])

ならば，$P_2(x, t, D_x, D_t)$ は H. E. である。

系5　$k=1$，$\omega(0)=0$ の zero 点の order l とする。

$$\begin{cases} (a') & \text{定数 } C>0 \text{ が存在して，原点の近傍で} \\ & \left|\mathrm{Im}\,\dfrac{\varepsilon(x)}{\omega(x)}\right| > C\left|\mathrm{Re}\,\dfrac{\varepsilon(x)}{\omega(x)}\right| \quad (\text{cf. Kannai [13]}) \\ (b') & l \geqq 2 \end{cases}$$

ならば，$P_2(x, t, D_x, D_t)$ は H. E. である。

$k=1$ で $\omega(x, D_x)$ が常微分作用素のときはより詳しく

定理6.　$\omega(x, D_x) = \omega(x) D_x^3 + \varepsilon(x) D_x^2$ とする。このとき

$$\begin{cases} (a'') & \omega(0)=0,\ \varepsilon(0) \neq 0 \\ (b'') & x \to 0 \text{ のとき } |x|\left|\mathrm{Re}\,\dfrac{\varepsilon(x)}{\omega(x)}\right| \to \infty \quad (\text{cf. Kannai [13]}) \end{cases}$$

ならば，$P_2(x, t, D_x, D_t)$ は H. E. である。

文　献

[1] Boutet de Monvel and Treves; On a class of pseudodifferential operators with double characteristics, to appear.

[2] ――――――――――, On a class of systems of pseudodifferential equations with double characteristics, to appear.

[3] Egorov, On subelliptic pseudodifferential operators, Soviet Math.

Dokl., 10 (1969), 1056–1059.

[4] Folland and Kohn, The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex, Annals of Math. Studies, No. 75, Princeton university press, Princeton, 1972.

[5] Folland and Stein, Parametrices and estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex on strongly pseudoconvex boundaries, to appear.

[6] Grušin, On a class of hypoelliptic operators, Math. USSR Sbornik, 12 (1970), 458–476.

[7] ———, On a class of elliptic pseudodifferential operators degenerate on a submanifold, Math. USSR Sbornik, 13 (1971), 155–185.

[8] ———, Hypoelliptic differential equations and pseudodifferential operators with operator-valued symbols, Math. USSR Sbornik, 17 (1972), 497–514.

[9] Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math., 119 (1967), 147–171.

[10] ———, Fourier Integral Operators I, Acta Math., 127 (1971), 79–183.

[11] ———, Pseudodifferential operators and non-elliptic boundary problems, Ann. of Math., 83 (1966), 129–209.

[12] ———, Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations, Amer. Math. Soc. Symp. on Singular Integral Operators, 1966, 138–183.

[13] Kannai, Hypoelliptic ordinary differential operators, Israel J. Math., 13 (1972), 106–134.

[14] Kohn, Integration of complex vector fields, Bull. Amer. Math. Soc.,

78 (1972), 1-11

[15] Kumano-go, Oscillatory integrals of symbols of pseudodifferential operators and the local solvability theorem of Nirenberg and Treves, 偏微分方程式堅田シンポジウム, 1972, 166-191.

[16] 熊ノ郷, 擬微分作用素とその周辺, 東大セミナリーノート 25, 1970.

[17] Melin, Lower bounds for pseudodifferential operators, Ark för Mathematik, 9 (1971), 117-140.

[18] Radkevič, A priori estimates and hypoelliptic operators with multiple characteristics, Soviet Math. Dokl., 10 (1969), 849-853.

[19] ———, Hypoelliptic operators with multiple characteristics, Math. USSR Sbornik, 8 (1969), 181-205.

[20] Sjöstrand, Une classe d'operateurs pseudo-differentiels à caracteristiques doubles, C. R. Acad. Sci., Paris, 276 (1973), 743-745.

[21] ———, Parametrices for pseudo-differential operators with multiple characteristics, to appear.

[22] 平良, Hypoellipticityの同値類について, 数理解析研究所講究録 No. 192, 1973, 1-9.

[23] Treves, Hypoelliptic partial differential equations of principal type, Sufficient conditions and necessary conditions, Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), 631-670.

[24] ———, Concatenations of second-order evolution equations applied to local solvability and hypoellipticity, Comm. Pure Appl. Math., 26 (1973), 201-250.