数理解析研究所講究録
第 227 巻 1975 年 58-65

Riemann 多様体上の乱歩

名大 理　砂田 利一

M を C^∞-多様体，$g=(g_{ij})$ をその上の固定された完備な Riemann 計量とする。正数 $a>0$ に対し，$\Omega_{a,x}$ を $x\in M$ から出発する歩幅 a の乱歩の全体とする。精確に言えば，$R_+=\{t\in R$ (実数) ; $t\geqq 0\}=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ ($I_k=[k-1,k)$) と置く時，

$$\Omega_{a,x}=\{\omega : R_+\longrightarrow M\ ;\ \text{連続}\ \omega(0)=x,\ \text{各}\ k\ \text{に対して}\ \omega|I_k\ \text{は速さ}\ a\ \text{の測地線}\}$$

と定義する。すなわち x から出発した粒子が距離 a だけ測地線に沿って進み，ここで勝手に向きを変え再び a だけ進むということをくりかえす，粒子の運動過程のモデルである。

ここでは，次の3つの問題について考える。

<u>問題</u> 1.　$\Omega_{a,x}$，あるいは $\Omega_a=\bigcup_{x\in M}\Omega_{a,x}$ に<u>幾何学的に自然な</u>測度をいれること。

<u>問題</u> 2.　M が compact の時，乱歩のエルゴード性を論ずること。

問題3. Brown運動への近似を論ずること。

問題1,2,3に関連して 作用素 $L_a: C^0(M) \longrightarrow C^0(M)$ を次の様に定義しておく。

$$(L_a f)(x) = \int_{S_x \ni v} f(\exp a v)\, dS_x ,$$

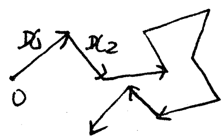
ここで $S_x \subset T_x M$ は M の tangent unit sphere bundle SM の x 上の fiber, dS_x はその上の標準的な volume element ($\int_{S_x} dS_x = 1$ としておく), $\exp: TM \longrightarrow M$ は (M, g) の exponential 写像である。これは, (M, g) が Euclid 空間の場合には, 通常の半径 a の球面上の平均化をあらわし, また乱歩を M に値をとる Markov 連鎖と考えた時には, いわゆる推移作用素と呼ばれるものにあたる。

§1. 問題1

(M, g) が Euclid 空間の時, $\Omega_{a,x}$ には次の様にして測度を導入するのが自然である。 ($x = 0$ 原点としておく。) すなわち, n 回目の方向 vector (長さ1) を x_n とすると

$$\omega(n) = a(x_1 + \cdots + x_n)$$

となり, それぞれの vector $\{x_n\}$ は $\Omega_{a,0}$ 上の独立な確率変数と思える。



よって, $\Omega_{a,0}$ を sphere の無限積 $S_x \times S_x \times \cdots$ と同一視し,

各 S_x に自然な確率測度をいれておき，その積測度により $\Omega_{a.x}$ に確率測度がはれる。

一般の場合にも，この考え方が適用される。すなわち $\Omega_{a.x}$ と S_x^∞ ($= S_x \times \cdots$) を次の様に同一視しよう：

$$\tau_x : \Omega_{a.x} \longrightarrow S_x^\infty$$

を $\tau_x(w)_{i+1} = \mathcal{P}_{S_i(w)}\left(\frac{1}{a}\dot{w}(i+1)\right)$ により定義する。ここで $\tau_x(w)_{i+1}$ は $\tau_x(w) \in S_x^\infty$ の第 $i+1$ 番目 ($i \geq 0$) の成分をあらわし，$S_i : \Omega_{a.x} \to \Omega_{a,x}(i)$ ($\Omega_{a.x}(i)$ は i 回目で停止する乱歩の全体)，は制限，$\mathcal{P}_{S_i(w)}$ は $S_i(w)$ なる区分的に可微分な曲線に沿う $w(i)$ から $w(0)=x$ までの平行移動：

$$\mathcal{P}_{S_i(w)} : T_{w(i)}M \longrightarrow T_{w(0)}M$$

をあらわす。また $\dot{w}(i+1)$ は，$w \mid I_{i+1}$ なる測地線の $w(i)$ における速度 vector $\in T_{w(i)}M$ をあらわしている。

（補題）. τ_x は 1 対 1 onto である。

証明は，上の手続きの逆を示す写像を構成すればよい。

勿論 $S_x^\infty = S_x \times S_x \times \cdots$ には確率測度がはれるから τ_x により，$\Omega_{a.x}$ にも測度 P_x がはれる。また $\Omega_a = \bigcup_{x\in M} \Omega_{a.x}$ と $S^\infty M = \bigcup_{x \in M} S_x^\infty$ (sphere の無限積 bundle) と同一視すれば $S^\infty M$ には M の canonical measure と S_x^∞ の measure による fiber product measure がはいっているから，Ω_a にも measure P がはれる。

後のためにいくつかの記号を導入しておこう。

$X_k : \Omega_a \to M$, $X_k(w) = w(k)$ (k番目の足跡)

$\mathcal{B}(\Omega_a)$: $\{X_k^{-1}(A)\}$ $A \in \mathcal{B}(M)$ (MのBorel集合) で生成されるΩ_aの完全加法族。

$T : \Omega_a \to \Omega_a$, $Tw(t) = w(t+1)$ (一歩前進)

次の定理は,前の様にして導入した$\Omega_{a.x}$の確率測度に関して($\Omega_{a.x}$, P_x, T)が推移作用素としてL_aをもつ,M上のMarkov連鎖であることを示す。

(定理1) $A \in \mathcal{B}(M)$に対して,$P_n(x, A)$により,xから出発した乱歩のn番目の足跡がAの中にいる確率$P_x(w\,;\,w(n) \in A)$をあらわす時,

$$P_n(x, A) = L_a^n \cdot \chi_A(x)$$

(χ_AはAの定義関数)

証明には,次の2つの補題が必要である。

(補題2) (Markov性) 任意の$\mu \in \Omega_{a.x}(k)$ $B \in \mathcal{B}(\Omega_a)$に対して

$$P_x(T^{-k}B \mid S_k = \mu) = P_{\mu(k)}(B)$$

が成り立つ。ここで記号$P(\ |\ )$は条件付確率をあらわす。

証明は 平行移動の直交性を利用する。

(補題3) $B \in \mathcal{B}(\Omega_a)$に対して,$x \longmapsto P_x(B)$は可測であり

$$P_x(T^{-1}B) = (L_a(P_\cdot(B)))(x)$$

(証. $P_x(T^{-1}B) = \int_{S_x \ni v} P_x(T^{-1}B \mid S_1 = v)\, dP_{x,s_1}(v)$ (1)

$$= \int_{S_x \ni v} P_{v(a)}(B)\, dS_x \quad (2)$$

$$= \int_{S_x \ni v} P_{\exp av}(B)\, dS_x$$

$$= L_a(P.(B))(x)$$

ここで(1)の等号は一般の条件付確率の公式，(2)は上の補題からである。

定理1は補題3を利用して帰納的に証明される。

次に M が compact と仮定しよう。$dM = \det(g_{ij})^{\frac{1}{2}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ を (M, g) の体積要素，$A \in \mathcal{B}(M)$ に対し $m(A) = \int_A dM$ とおく。

(定理2) T は $(\Omega_a, \mathcal{B}(\Omega_a), P)$ の保測変換である。すなわち $B \in \mathcal{B}(\Omega_a)$ に対して

$$P(T^{-1}B) = P(B)$$

が成り立つ。

(補題4) $L_a : C^0(M) \to C^0(M)$ は，拡張 $L_a : L^p(M) \to L^p(M)$ $(p \geq 1$ 整数$)$ を有し，各 $f \in L^1(M)$ に対して

$$\int_M L_a f \, dM = \int_M f \, dM$$

(証. $\varphi_t : SM \to SM$ を測地的流れとする時

$$L_a = \int_{fiber} \varphi_a^* \pi^* \qquad (\pi : SM \to M)$$

で，φ_a は保測であることから補題を得る。

(定理の証明) $P(T^{-1}B) = \int_{x \in M} P_x(T^{-1}B)\, dM(x)$

$$= \int_{x \in M} L_a(P.(B))(x)\, dM(x)$$

$$= \int_{x\in M} P_x(B)\, dM(x)$$
$$= P(B) \qquad (J)$$

§2. 問題2

この§では，Mはcompactと仮定し，簡単のためMの体積 $\int_M dM = m(M)$ は1としておく。

1つの乱歩 $\omega \in \Omega_a$ がエルゴード的とは

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \chi_A(\omega(k))\right) = m(A)$$

が任意の $A \in \mathcal{B}(M)$ に対して成り立つことである，と定義する。すなわち，乱歩の足跡がAを訪問する平均回数が，常にAの測度と一致する時エルゴード的であるという。また測度Pに関してほとんどの乱歩がエルゴード的である時，Ω_a はエルゴード的であると言うことにする。

(定理3) 次の命題は同値

i) (抽象)力学系 (Ω_a, P, T) はエルゴード的

ii) Ω_a はエルゴード的

iii) $L_a : L^2(M) \longrightarrow L^2(M)$ の固有値1に属する固有関数は a.e. 定数.

(注意) iii)はMarkov連鎖としてのエルゴード性である。

この定理の証明のためには次の補題が必要である。

(補題5) $((U^n \chi_{X_0^{-1}(A)}, \chi_{X_0^{-1}(B)}))_2 = (L_a^n \chi_A, \chi_B)_2$

ここで $A, B \in \mathcal{B}(M)$, $U: L^2(\Omega_a) \to L^2(\Omega_a)$ は $Uf(w) = f(Tw)$ によって定義される等距離作用素, $((\ , \ ))_2$ は $L^2(\Omega_a)$ の内積, $(\ , \ )_2$ は $L^2(M)$ の内積をあらわす。

証明は略する。

問題2に関連して次の予想をあげよう。($\dim M \geq 2$)

(予想) a を十分小さくとれば Ω_a はエルゴード的か?

これは非常にもっともらしいことなのであるが, 特別な場合にしか証明出来ていない。

(定理4) M が(局所)対称空間の時, 上の予想は正しい。

この証明は, L_a が Laplacian Δ と可換なことを利用する。特に M が flat torus の時, 任意の $a > 0$ に対して Ω_a はエルゴード的である。(もっと強く混合的。)

§3. 問題3

ここでも (M, g) について §2 と同じ仮定をしておく。

$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta$$

を熱作用素, $k_t(x, y)$ をその基本解, 作用素 K_t を

$$K_t f = \int_M k_t(x, y) f(y) \, dM(y)$$

により定義しよう。 K_t は M 上の Brown 運動の推移作用素と考えられる。問題3に対する解答として次の定理を得る。

(定理5) 任意の $f \in L^2(M)$ に対して

$$(L_{\sqrt{\frac{2t}{N}}})^N f \longrightarrow K_t f \qquad (N \to \infty)$$

($t>0$　$n=\dim M$) が成り立つ。

この定理は，次の補題による。

（補題6） $L^2(M)$ のある dense な部分空間で

$$\frac{1}{a^2}(L_a - I) \xrightarrow[w]{} \frac{1}{2n}\Delta \qquad (a \to 0)$$

が成り立つ。

証明は略する。