数理解析研究所講究録
第 227 巻 1975 年 70-74

対称空間上の境界値問題について

広大 理学部 岡本 清郷
峰村 勝弘

単位円の内部で定義された調和関数は超函数としての境界値を持ち、この意味で単位円内の調和関数全体は単位円周上の超函数全体と1対1に対応することは周知の事実であるが、この事実は最近、佐藤―河合―柏原、3氏により確定特異点型境界値問題として考察するのがより自然であることが明らかにされた。一方、単位円の内部は最も簡単な対称空間の例であり、そのラプラシアンの任意の固有関数は或る超函数の（拡張された）ポアッソン積分により一意的に表示されることが知られているが、特に固有値が零の場合調和関数は普通の調和関数と一致することが容易に分り、従って（拡張された）ポアッソン積分は上で述べた普通の調和関数にその境界値である超函数を対応させる写像の逆写像の固有関数の場合への一般化になっている。しかも単位円の内部を対称空間と見做した場合そのラプラシアンは確定特異点型であり、従っ

て．上記の佐藤－河合－柏原理論をこれに適用することが出来る。

さて、λを複素数とし．Uを（平面上の）空でない開集合とするとき．$\mathcal{S}_U$によって．方程式

$$-(1-x^2-y^2)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x,y)=\lambda f(x,y)$$

のU上の（実解析的）解の全体を表わす。単位円の内部および境界をそれぞれ M_+, N とかき、任意の $p\in N$ に対し

$$\mathcal{S}_p=\varinjlim_{U\ni p}\mathcal{S}_{U\cap M_+}$$

とおくことによりN上の層$\mathcal{S}$を定義する。以下$\mathbb{R}^2$をMとかき、Mの点$p\in N$に於ける局所座標系(t,x)を $t>0$ が円の内部に対応するように選ぶ。$x^2-x-\lambda$ の2根を α,β とし、以下 $\alpha-\beta$ は整数でないとする。このとき、任意の $[u]\in\mathcal{S}_p$ に対して $\mathrm{Supp}\,\tilde{u}\subset M_+\cup N$ であるような $[\tilde{u}]\in(\mathcal{B}_M)_p$ で上の微分方程式を満たすようなものが唯一つ存在する。大島の定理により点$((0,x),\sqrt{-1}dt\infty)\in\sqrt{-1}S^*M$に於いて定義された擬微分作用素 P,Q が存在し、任意の $[u]\in\mathcal{S}_p$ は $[\varphi],[\psi]\in(\mathcal{B}_N)_p$ により $\mathrm{sp}u=P\,\mathrm{sp}\,t_+^{\alpha}\varphi(x)+Q\,\mathrm{sp}\,t_+^{\beta}\psi(x)$ と一意的に表わされる。このとき $\varphi=\varphi_u$, $\psi=\psi_u$ とかくことにする。$\varphi_u,\psi_u\in(\mathcal{A}_N)_p$ であるとき uは *ideally analytic* とよばれる。*ideally analytic solutions* のなす$\mathcal{S}$の部分層を $\mathcal{S}_0$ とかくとき次の S-K-K *diagram* が

成立する。

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{S}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A} \oplus \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{S} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & \mathcal{B} \oplus \mathcal{B} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathcal{B}/\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{S}/\mathcal{S}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}/\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}/\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}/\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

ここに、$\gamma(u) = (\varphi_u, \psi_u)$ であり、かつ δ は或る micro-local operator B が存在して $\delta(\varphi, \psi) = [\varphi] - B[\psi]$ により与えられる。このようにして semi-local な境界値問題（第2行）が実解析的な場合（第1行）と micro-local な研究（第3行）とに帰着され、ここにも S-K-K 理論に於ける常套手段が見事に発揮される。実は parameters α, β に対応する N上の主系列の non-unitary 表現をそれぞれ π_α, π_β とすると、上記の B は π_α と π_β との intertwining operator で与えられることが証明出来る。このことは対称空間上の境界値問題の micro-local な研究に半単純リー群の表現論が有用であることを暗示している。むしろ筆者には半単純リー群の

表現論の本質はかかる点にあると思われる。

さて、上記の S-K-K diagram は一般のローレンツ群の場合にもそのまま成立するが、$SU(n,1)$ $(n>1)$ の場合にはそのままの形で成立するかどうか分っていない。まして、higher rank の対称空間の場合はこの問題は全く未解決である。このように対称空間上の境界値問題を全く micro-local に研究するには今尚多くの困難が残っているが、半単純リー群の表現論を応用することにより次のようにして少しずつ解決されつつある。

G/K を対称空間とし（ここに G は半単純リー群，K はその極大コンパクト部分群）、MAN を G の極小パラボリック部分群の Langlands 分解とする。このとき，$G=KAN$ は G の岩沢分解を与えるので G/MAN はコンパクトである。更に一般の rank の対称空間の場合にもポアッソン積分の拡張された概念があり，A の任意の指標 $A \ni a \longmapsto e^{\lambda(\log a)} \in \mathbb{C}^*$ に対してポアッソン変換 $\mathcal{P}_\lambda : \mathcal{B}(G/MAN) \longrightarrow \mathcal{A}(G/K)$ が定義され，その像は G/K 上の不変微分作用素達の同次固有関数になる。つまり $\mathbb{D}(G/K)$ で G/K 上の不変微分作用素のなす algebra を表わすとき $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{D}(G/K), \mathbb{C})$ の元 χ_λ が存在して

$$\Delta \circ \mathcal{P}_\lambda = \chi_\lambda(\Delta)\mathcal{P}_\lambda \qquad (\Delta \in \mathbb{D}(G/K))$$

が成立する。そこで

$$\mathcal{A}(G/K)^{\chi_\lambda} = \left\{ f \in \mathcal{A}(G/K) \;\middle|\; \Delta f = \chi_\lambda(\Delta) f \ (\Delta \in \mathbb{D}(G/K)) \right\}$$

とおくとき

$$\mathcal{P}_\lambda : \mathcal{B}(G/MAN) \longrightarrow \mathcal{A}(G/K)^{\chi_\lambda}$$

が *surjective* かどうかが問題となる。$\mathcal{P}_\lambda$ が *injective* であることは容易に分るから *surjective* をいうためには逆写像を作ればよい。

定理　次の条件 1), 2), 3) を満たす写像

$$\Gamma_\lambda : \mathcal{A}(G/K)^{\chi_\lambda} \longrightarrow \mathcal{B}(G/MAN)$$

が存在したとする。

1) $\Gamma_\lambda \circ \mathcal{P}_\lambda =$ *identity*

2) Γ_λ は G-*equivariant*

3) $\Gamma_\lambda u = 0 \quad (u \in \mathcal{A}(G/K)^{\chi_\lambda})$ ならば $\Gamma_\lambda u^K = 0$

ここに u^K は u の K の作用に関する平均である。

以上の仮定の下に $\mathcal{P}_\lambda$ は *onto-isomorphism* である。

G/K の *rank* が 1 の場合は大島の定理によってこの定理の仮定はすべて満たされていることが証明出来る。

（あとがき）　当研究集会の後、最近になって柏原氏により一般の場合の確定特異点型境界値問題の応用として、上記定理の仮定 1), 2), 3) は大体正しいことが分りつつある。