数理解析研究所講究録
第 227 巻 1975 年 75-85

Discrete Series とある種の楕円型作用素

広島大 理　　堀田良之

1°. 表現論から.

(π, H) を半単純 Lie 群 G の既約な discrete series unitary 表現とする. 即ち, G 上の2乗可積分な函数のなす Hilbert 空間 $L^2(G)$ 上の正則表現に対して, G の作用と可換な isometry $H \hookrightarrow L^2(G)$ が存在するものとする. K を G の極大 compact 群とするとき表現 π を K に制限した $\pi|K$ は compact 群 K の無限次元表現を与えるが, K の一つの既約表現(の同値類) τ に対して, $m_\pi(\tau)$ によって τ の $\pi|K$ における重複度を表わす. 即ち,

$$\pi|K = \bigoplus_\tau m_\pi(\tau)\tau .$$

既約 unitary 表現に対して $m_\pi(\tau) < \infty$ なることはよく知られている.

R. Blattner は discrete series に関する Harish-Chandra の指標公式から $m_\pi(\tau)$ に関するある explicit formula を予想した (Moscow Congress ; still conjectural). 文献

の不足もあって，以下それを述べよう．

まずHarish-Chandraの指標公式を復習する．Gがdiscrete series表現をもてばcompact Cartan部分群が存在する故，それをTと記し，$T\subset K$と仮定する．Gがある単連結な複素Lie群の実型式になっていると仮定すると，Tはtorusになり以下のweightに関する議論もスムーズにゆく．$\hat{T}$によってTの指標のなすAbel群を表わし，$\mathfrak{F}$によって$\hat{T}$を加法的に記したlatticeを表わす($\mathfrak{F}\ni\lambda\mapsto e^{\lambda}\in\hat{T}$が同型)．従って$(G,T)$に関するroot系$\Sigma$は$\Sigma\subset\mathfrak{F}$と見做せ，$\mathfrak{F}$はKilling formによる通常の内積$(\ ,\ )$をもつ．

$$\mathfrak{F}'=\{\lambda\in\mathfrak{F}\ ;\ (\lambda,\alpha)\neq 0\ (\alpha\in\Sigma)\}$$
$$T'=\{t\in T\ ;\ e^{\alpha}(t)\neq 1\ (\alpha\in\Sigma)\}$$

とおく．尚Σに一つの順序を固定し，それによる正のroot系をPと記す．又，(G,T)のWeyl群を$W=N_G(T)/T$と記す．こゝに$N_G(T)$はTのGの中での正規化群で，WはT，及び$\hat{T}\simeq\mathfrak{F}$に内部自己同型的に働く．

さて一般に既約unitary表現の指標はG上のdistributionとして定義され，Gの正則元とよばれるもののなすopen denseな部分集合G'の上では実解析的な函数になっていることが知られているが，今の場合$G'\cap T=T'$と

なっていることに注意しておく．従って表現の指標の T' への制限が意味をもつ．Discrete series に関する Harish-Chandra の基本定理は次のように述べられる：

Discrete series 表現 π に対してある $\Lambda \in \mathfrak{F}'$ が存在して，その指標を Θ_π とすると T' 上への制限 $\Theta_\pi | T'$ は

$$\Theta_\pi | T' = (-1)^n \sum_{s \in W} \varepsilon(s)\, e^{s\Lambda} \Big/ \prod_{\alpha \in P} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})$$

なる函数．逆に $\Theta_\pi | T'$ が上のように表わせる π は同値を除いて一意的．但し，$\varepsilon(s)$ は $s \in W$ の置換表現の符号，$e^{s\Lambda}$ は s の e^Λ への働き，そして $n = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} G/K$．

尚上の $\Lambda \in \mathfrak{F}'$ は $(\Lambda, \alpha) > 0$ $(\alpha \in P)$ とすると π に対して一意的にとれる。かゝる Λ に対して上を満たす discrete series 表現を以下 π_Λ と記すことにする．

次に Blattner の予想する explicit formula を述べるために今一つ記号を導入する．Compact pair (K, T) に関する root 系を Σ_k とすると自然に $\Sigma_k \subset \Sigma$ と見做せる（compact roots とよばれるもの）．前に固定した正の root 系 P に対して，$P_k = P \cap \Sigma_k$，$P_n = P - P_k$ とおく．こゝで，$\rho_k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in P_k} \alpha$，$\rho_n = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in P_n} \alpha$ とおくと，$\rho_k, \rho_n \in \mathfrak{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ であるが，我々の仮定の下では $\rho_k \pm \rho_n \in \mathfrak{F}$ なることがわかる．さて $\Lambda \in \mathfrak{F}$，$(\Lambda, \alpha) > 0$ $(\alpha \in P)$ に

対して discrete series 表現 π_Λ を考える．$\lambda = \Lambda - \rho_k + \rho_n \in \mathfrak{F}$ とおくと，その指標 Θ_{π_Λ} の T' への制限は，Harish-Chandra の公式により

$$\Theta_{\pi_\Lambda} | T' = (-1)^n \sum_{s \in W} \varepsilon(s) e^{s(\lambda + \rho_k - \rho_n)} \Big/ \prod_{\alpha \in P} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}).$$

こゝで，

$$\Delta_k = \prod_{\alpha \in P_k} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}), \quad \Delta_n = \prod_{\alpha \in P_n} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})$$

とおくと，それぞれ(一般に) T 上の2価の函数であるが，Weyl 群の元 $s \in W$ の働きにより $(\Delta_k \Delta_n)^s = \Delta_k^s \Delta_n$ なることがわかる．従って $\Delta_n^s = \Delta_n$．即ち

$$\Delta_n = \Delta_n^s = \prod_{\alpha \in P_n} (e^{\frac{s\alpha}{2}} - e^{-\frac{s\alpha}{2}}) = (-1)^n e^{-s\rho_n} \prod_{\alpha \in P_n} (1 - e^{s\alpha}).$$

従って形式的な展開

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{l \geq 0} x^l$$

を用いると，$\Theta_{\pi_\Lambda} | T'$ の exponential sum による表示は

$$\sum_{s \in W} \varepsilon(s) \sum_{(\alpha_1, \cdots, \alpha_l)} e^{s(\lambda + \rho_k + \alpha_1 + \cdots + \alpha_l)} \Big/ \Delta_k,$$

但し2番目の和は P_n の元の l 個の(順序を問わぬ)組 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_l)$ を $l \geq 0$ に対して走る．こゝで一般に weight $\nu \in \mathfrak{F}$ に対して $Q(\nu)$ によって $\nu = \alpha_1 + \cdots + \alpha_l$ $(\alpha_i \in P_n,\ l = 0, 1, \cdots)$ とかける場合の数(分割数)を表わすと，weight に関するよく知られた事実を用いて，上

の式は

$$\sum_{\mu\in D}\Big(\sum_{w\in W}\varepsilon(w)\,Q(w(\mu+\rho_k)-(\lambda+\rho_k))\Big)\frac{\sum_{s\in W}\varepsilon(s)e^{s(\mu+\rho_k)}}{\Delta_k}$$

と変形できる．但し，$D=\{\mu\in\mathfrak{F}\,;\,(\mu,\alpha)\geq 0\ (\alpha\in P_k)\}$．

更に，

$$b_\lambda(\mu)=\sum_{w\in W}\varepsilon(w)\,Q(w(\mu+\rho_k)-(\lambda+\rho_k))$$

$$\chi_\mu=\sum_{s\in W}\varepsilon(s)e^{s(\mu+\rho_k)}/\Delta_k$$

とおくと， χ_μ は Weyl の指標公式により最高 weight を μ とする K の既約表現の指標． 又我々の仮定 $(\Lambda,\alpha)>0$ の下では $b_\lambda(\mu)$ は非負な整数になることがわかる．

こうして少くとも形式的には

$$\Theta_{\pi_\Lambda}|T'=\sum_{\mu\in D}b_\lambda(\mu)\chi_\mu$$

と展開される．そこで Blattner は，表現 π_Λ を K に制限したとき，最高 weight を μ とする既約表現 τ_μ が $\pi_\Lambda|K$ におこる重複度 $m_{\pi_\Lambda}(\tau_\mu)=m_\Lambda(\mu)$ は実際

$$m_\Lambda(\mu)=b_\lambda(\mu)\qquad(\Lambda=\lambda+\rho_k-\rho_n)$$

を満たすのではないか？ と予想した．

実際 $m_\Lambda(\mu)$ をそのような本物の重複度とすると

$$\Theta_{\pi_\Lambda}|T'=\sum_{\mu\in D}m_\Lambda(\mu)\chi_\mu$$

が成立するのであるが，逆に上のような展開が $m_\Lambda(\mu)$ を

$b_\lambda(\mu)$ におきかえて成立するにしても　$m_\Lambda(\mu)=b_\lambda(\mu)$ なる保証は何もない。

今のところ知られている一般的な結果は，以下に述べる方法で

$$m_\Lambda(\mu) \leq b_\lambda(\mu)$$

なること，しかもすべての π_Λ ではなく，'大部分の' π_Λ に対してのみである(W. Schmid を始めとする).

2°.　実現による方法.

以下に述べることに関する詳しい記述は[2]を参照されたい. 本質的なアイデアは Schmid [1] による.

Discrete series 表現 π_Λ ($(\Lambda,\alpha)>0$ $(\alpha\in P)$, $\Lambda=\lambda+\rho_k-\rho_n$) に対して最高 weight を λ とする K の表現 $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ を考え，対称空間 G/K 上の K-principal bundle $G\to G/K$ に付随する vector bundle を $E_{V_\lambda}=G\times_K V_\lambda$ とする. このとき λ から決まる K の(既約とは限らぬ)有限次元表現 $V_\lambda^1, \cdots, V_\lambda^n$ が存在し，それぞれに付随する G/K 上の vector bundles を $E_{V_\lambda^i}$ と記すとき，楕円複体

$$(E_\lambda)\quad 0\to C^\infty(E_{V_\lambda})\xrightarrow{\mathcal{D}} C^\infty(E_{V_\lambda^1})\xrightarrow{\mathcal{D}}\cdots\xrightarrow{\mathcal{D}} C^\infty(E_{V_\lambda^n})\to 0$$

が構成される. こゝで $C^\infty(E_\bullet)$ は $E_\bullet$ の sections の空間を表わし，微分作用素 $\mathcal{D}$ はすべて一階である.

注意： K の double covering を $\tilde{K}$ とするとき（単連結ならば K 自身），G/K 上の spinor bundle（$\tilde{K}$ の tangent space における isotropy 表現に対する Spin 表現に付随するもの）に対して，最高 weight を $\lambda-\rho_n$ とずらして Dirac 作用素

$$D : C^\infty(E_{V_{\lambda-\rho_n}}\otimes Spin) \to C^\infty(E_{V_{\lambda-\rho_n}}\otimes Spin)$$

が考えられる．これを埋めこみ $E_{V_\lambda} \hookrightarrow E_{V_{\lambda-\rho_n}}\otimes Spin$ に関して"ほどいたもの"が long complex $\mathbb{E}_\lambda$ である．即ち

$$\mathcal{D}+\mathcal{D}^* : C^\infty(\bigoplus_i E_{V_\lambda^i}) \to C^\infty(\bigoplus_i E_{V_\lambda^i})$$

が上の Dirac 作用素と同型（詳しくは [2]）．

さて複体 $\mathbb{E}_\lambda$ を L^2-sections の範囲で考えると，

実現定理： ほゞすべての λ に対してはその高次の L^2-cohomology が消え，0 次の L^2-cohomology

$$H^0_{L^2}(\mathbb{E}_\lambda) = \mathrm{Ker}(\mathcal{D} : L^2(E_{V_\lambda}) \to L^2(E_{V_\lambda^1}))$$

が G の表現空間として初めの π_Λ に同値な表現を与える，

が証明できる．因みに，これは岡本，Narasimhan，Schmid，Parthasarathy らによる一連の仕事の中で示されたことゝ同等であるが，parametre λ に関する詳しい条件については [2] を参照されたい．

この π_Λ の実現を用いて Blattner の数 $b_\lambda(\mu)$ を考察しよう．さて複体 $\mathbb{E}_\lambda$ は実解析的である．即ち，実解析的多様体

としての G/K 上で，vector bundles $E_{V_\lambda^\cdot}$，微分作用素 $\mathcal{D}$ 達の係数はすべて実解析的である．実解析的 vector bundle E の実解析的 sections の空間を $\mathcal{a}(E)$ と書いて，base space に一点 o を固定したとき次のように Krull filtration を入れる．即ち，$\mathfrak{m}_o$ を o で消える函数のなす ideal とするとき，

$$\mathcal{a}_o^{(\ell)}(E) = \mathfrak{m}_o^{\ell}\,\mathcal{a}(E) \qquad (\ell = 0, 1, 2, \cdots)$$

なる部分加群を考えると

$$\mathcal{a}(E) = \mathcal{a}_o^{(0)}(E) \supset \mathcal{a}_o^{(1)}(E) \supset \cdots \supset \mathcal{a}_o^{(\ell)}(E) \supset \cdots,$$

$$\bigcap_{\ell} \mathcal{a}_o^{(\ell)}(E) = (0).$$

又 E_o を o における E の fibre，T_o^* を o における cotangent space とすると自然に

$$\mathcal{a}_o^{(\ell)}(E)/\mathcal{a}_o^{(\ell+1)}(E) \simeq E_o \otimes S^{\ell}(T_o^*)$$

なる同型がある（$S^{\ell}(\cdot)$ は ℓ 階の対称積）．今複体 E_λ の初項

$$\mathcal{D} : \mathcal{a}(E_{V_\lambda}) \to \mathcal{a}(E_{V_\lambda^1})$$

を考え，o として G/K の原点 $\{K\}$ をとると，$\mathcal{D}$ が一階だから

$$\mathcal{D}(\mathcal{a}_o^{(\ell)}(E_{V_\lambda})) \subset \mathcal{a}_o^{(\ell-1)}(E_{V_\lambda^1}).$$

従って，

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}_0^{(\ell)} : \ \mathcal{a}_0^{(\ell)}(E_{V_\lambda})/\mathcal{a}_0^{(\ell+1)}(E_{V_\lambda}) & \rightarrow & \mathcal{a}_0^{(\ell-1)}(E_{V_\lambda^1})/\mathcal{a}_0^{(\ell)}(E_{V_\lambda^1}) \\ \wr\mathrm{|} & & \wr\mathrm{|} \\ V_\lambda \otimes S^\ell(T_0^*) & \longrightarrow & V_\lambda^1 \otimes S^\ell(T_0^*) \end{array}$$

なる写像をひき起す（$\ell=0,1,2,\cdots$）. こゝで 0 を G/K の原点ととったから，V_λ ，T_0^* は K の表現空間で $\mathscr{D}_0^{(\ell)}$ 達は K の働きと可換であり，$\mathrm{Ker}\,\mathscr{D}_0^{(\ell)}$ は又 K の表現を与える.

補題： $\bigoplus_{\ell\geq 0} \mathrm{Ker}\,\mathscr{D}_0^{(\ell)}$ は K の表現として $\bigoplus_{\mu\in D} b_\lambda(\mu)\tau_\mu$ に同値；即ち，最高 weight μ なる K の既約表現の $\bigoplus_{\ell\geq 0} \mathrm{Ker}\,\mathscr{D}_0^{(\ell)}$ における重複度は Blattner の数 $b_\lambda(\mu)$ に等しい.

（証明は若干の cohomological な議論による [2]）.

$$H_a^0(\mathbb{E}_\lambda) = \mathrm{Ker}(\mathscr{D} : a(E_{V_\lambda}) \rightarrow a(E_{V_\lambda^1}))$$

に filtration を $\{\mathcal{a}_0^{(\ell)}(E_{V_\lambda}) \cap H_a^0(\mathbb{E}_\lambda)\}$ によって導入すると，その graduating に関して

$$\text{(I)} \qquad gr(H_a^0(\mathbb{E}_\lambda)) \hookrightarrow \bigoplus_{\ell\geq 0} \mathrm{Ker}\,\mathscr{D}_0^{(\ell)}.$$

一般に K の（無限次元）表現 H が与えられたとき，K-finite な元（$K.v$ が有限次元を張るような元 v）のなす部分空間を $H^\bullet$ と書く. このとき $\bigcap_\ell \mathcal{a}_0^{(\ell)} = (0)$ より K の表現空間として

$$H_a^0(\mathbb{E}_\lambda)^\bullet \simeq gr(H_a^0(\mathbb{E}_\lambda)).$$

又最初の π_Λ が実現されている L^2-cohomology 空間に関しては，楕円性より $H^0_{L^2}(\mathbb{E}_\lambda) \subset H^0_a(\mathbb{E}_\lambda)$ だから

(II) $\quad H^0_{L^2}(\mathbb{E}_\lambda)^\bullet \hookrightarrow H^0_a(\mathbb{E}_\lambda)^\bullet$.

かくして我々は K の表現空間の包含列

$$H^0_{L^2}(\mathbb{E}_\lambda)^\bullet \hookrightarrow H^0_a(\mathbb{E}_\lambda)^\bullet \simeq gr(H^0_a(\mathbb{E}_\lambda)) \hookrightarrow \bigoplus_{l\geq 0} \operatorname{Ker} \mathcal{D}_0^{(l)}$$

を得る．実現定理より最初の空間が K の表現 $\bigoplus_{\mu\in D} m_\Lambda(\mu)\tau_\mu$ を与え，補題により最後の空間が $\bigoplus_{\mu\in D} b_\lambda(\mu)\tau_\mu$ を与える．従って 1° に述べた $m_\Lambda(\mu) \leq b_\lambda(\mu)$ が得られる．さらに注意すると；

⊙ Blattner 予想 $m_\Lambda(\mu) = b_\lambda(\mu)$ と (I), (II) の包含関係が共に等号であることとは同値である．

注意 1. W. Schmid [1] は大方の λ に対しては complex analysis (on G/T) を用いて (I) において等号が成立することを示しているようである．しかし方法はまわりくどく，もっと直接的なものが望まれる．

注意 2. 最初の parametre $\Lambda \in \mathcal{F}'$ に対し正の root 系 $P = \{\alpha\in\Sigma\ ;\ (\Lambda,\alpha)>0\}$ が特別のタイプのとき ($\alpha+\beta \notin \Sigma$ for $\alpha, \beta \in P_n$), G/K は複素多様体になり $\mathbb{E}_\lambda$ は Dolbeault complex になる．このとき π_Λ は holomorphic discrete series 表現とよばれる．この場合，G/K の自然な有界領域としての実現 (Harish-Chandra imbedding）による座標系を考え，E_{V_λ} を適当に trivialize しておくと $H^0_a(\mathbb{E}_\lambda)^\bullet$ は（holomorphic な）多項式で表わせる sections（$= V_\lambda$-値函数）の全体になっており，(I) における等号は容易である．Harish-Chandra は，ほゞ20年前，この条件の下では constant function が L^2 になること，従って（G/K が有界領域より）すべての多項式は L^2，即ち（II）において $H^0_{L^2}(\mathbb{E}_\lambda)^\bullet = H^0_a(\mathbb{E}_\lambda)^\bullet$ なることを示した．holomorphic discrete series に対しては問題は大昔に解決ずみで，逆に（よく知られているように）1° で述べた指標公式もこの方法で求められるわけである．

—— x ——

[1] W. Schmid, Homogeneous complex manifolds and representations of semisimple Lie groups, Thesis at Univ. of Calif. - Berkeley 1967.

[2] R. Hotta and R. Parthasarathy, Multiplicity formulae for discrete series (preprint).