数理解析研究所講究録
第 228 巻 1975 年 16-30

Conditional Expectations と Tensor Product of Banach Spaces

東工大 理　梅垣壽春

Banach空間，或いは一般な位相線型空間の間のTensor積に関する一般論は種々な立場から論じられているが，この報告では，与へられたBanach空間Eに値をとる一つの確率量の解析を，確率変数の生成するBanach空間とBanach空間Eの間のTensor積を構成することによって行ない，このTensor積が手法として大変有効に適用されることなどを含めながら述べる。しかし内容の主体はBanach空間に値をとる確率変数のConditional Expectationsを巡る部分である．そのために，この概念を通常のnumericalな場合から論議する．

§1. Conditional Expectations の導入.

Conditional expectation は元来，確率論における基本的概念であるが，それに対して種々な函数解析的手法が付加され，さらに様々な応用面が拓かれている．まずそれの構成から述べることにする．

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ を確率測度空間とする（これはこの報告を通して固定する）． $\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}$ の有限部分代数とする，つまり $(\mathcal{B}, P)$ は確率事象系である． 事象 $B \in \mathcal{B}$ $(P(B) \neq 0)$ が起ったという条件の下で事象 $A \in \mathcal{A}$ が起る確率は

$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$$

によって与へられる． これによって

$$P(A/\mathcal{B}) = \sum \chi_B \cdot P(A/B)$$

とおき， conditional probability of A relative to $\mathcal{B}$ という． 茲で χ_B は B の定義函数， Σ は $\mathcal{B}$ の atoms についての和とする． さらに，一般な，有限な期待値をもつ確率変数 f に対して

$$E[f/\mathcal{B}] = \sum \frac{1}{P(B)} \int_B f(\omega) P(d\omega) \cdot \chi_B$$

とおき，これを Conditional expectation of f relative to $\mathcal{B}$ という． ここで， $f = \chi_A$ とおくと

$$P(A/\mathcal{B}) = E[\chi_A/\mathcal{B}].$$

Conditional expectations に関する重要な定式は

$$\int_B E[f/\mathcal{B}](\omega)P(d\omega) = \int_B f(\omega)P(d\omega), \ \forall B \in \mathcal{B} \quad (1.1)$$

である。この式が conditional expectations の characterization である。以上では，$\mathcal{B}$ を有限な部分代数と仮定したが，この仮定を取り去り，以下では常に $\mathcal{B}$ を任意の（固定した）σ－部分代数とする。この一般な $\mathcal{B}$ に対しては上に述べた有限な場合の手法は不可となる。然し，ここで，函数解析的手法が用いられて，Radon－Nikodym の定理を適応して，次の基本定理が得られる。

<u>定理 1.1.</u> $\forall f \in L^1(\Omega) = L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ に対して，一意に函数 $E[f/\mathcal{B}] \in L^1(\mathcal{B}) = L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ が存在して定式（1.1）を満足する。

函数解析的立場において眺めるとき，$E[\cdot/\mathcal{B}]$ は次の性質をもつことが知られる。Moy [4]，Umegaki [8].

1° $E[\cdot/\mathcal{B}]$ は Banach 空間 $L^1(\Omega)$ よりその閉部分空間上への norm-one projection である，

2° $E[\bar{f}/\mathcal{B}] = \overline{E[f/\mathcal{B}]}$; $E[f/\mathcal{B}] \geq 0$ if $f \geq 0$,

3° $E[fg/\mathcal{B}] = E[f/\mathcal{B}]\cdot g$, $\forall g \in L^\infty(\mathcal{B})$, 4° $E[1/\mathfrak{B}] = 1$,

5° $\int E[f/\mathfrak{B}](\omega)P(d\omega) = \int f(\omega)P(d\omega)$.

Characterization Theorem として‘「3°〜5°」を満せば，Conditional expectation となる’が云へる．条件3°は歴史的にも意義ある定式で Rynolds 等式という．これは平均作用素などの中心的な条件でもある．

Conditional Expectations に関しては，一般な立場に立って構成することが可能であるが，特にVon Neumann Algebras に関しては1954年(Nakamura-Turumaru [5], Umegaki [8]) 以来，理論が建設され，種々な応用がなされて来た．この報告ではBanach空間に値をとる確率変数について論ずることになる．Von Neumann Algebrasでなされたように Martingales の概念も当然導入され，それについて重要な特性化定理が述べられる．この場合のConditional expectation の構成は二つのBanach空間の間のテンソル積が本質的に効力を発揮する．また，Conditional expectation とテンソル積の理論は最適化定理にも適用され，それの数学的定式化が明らかになる．

§2. Banach Space Valued Random Variables.

確率測度空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 上で定義され Banach 空間 $\mathbb{E}$ に値をとる確率変数 $f(\cdot)$ を考へる。この $f(\cdot)$ が simple random variable であるとは，Ω の有限可測分割 $\{A_i\}$ $(\subset \mathcal{A})$ とベクトルの有限列 $\{\xi_i\}$ $(\subset \mathbb{E})$ に対して

$$f(\omega) = \sum \chi_{A_i}(\omega)\xi_i \qquad \text{a.e. } \omega \in \Omega,$$

と表示されているときを云う。$f(\cdot)$ が strong random variable とは $\exists \{f_n(\cdot)\}$: simple random variables の列であり，$\|f_n(\omega) - f(\omega)\| \to 0$, a.e. $\omega \in \Omega$. この f の全体は線型空間をなす。ここで線型演算は a.e.-sense で定義されている，cf. Hille-Phillips の本 [2]. Strong の代りに weak-case が次のように定義される。函数 $f: \Omega \to \mathbb{E}$ が weak random variable とは，$\xi^*(f(\omega)) = \langle f(\omega), \xi^* \rangle$ がすべての $\xi^* \in \mathbb{E}^*$ (= Dual of $\mathbb{E}$) で可測である。よく知られているように，もし $\mathbb{E}$ が可分ならば，この両者の notion は同等である，或いは，さらに一般に f の値域が可分 (mod P) ならば同じく同等である。

次に L^p-空間 $(1 \leqq p < +\infty)$ を定義する。Strong random variables $f(\cdot)$ で

$$[f]_p = \left(\int_\Omega \|f(\omega)\|^p P(d\omega)\right)^{1/p} < +\infty$$

を満すものゝ全体を $L^p(\Omega;\mathbb{E}) = L^p(\Omega,\mathfrak{a},P;\mathbb{E})$ とおき，

また

$$[f]_\infty = \operatorname*{ess.sup}_{\omega\in\Omega} \|f(\omega)\| < +\infty$$

を満す f の全体を $L^\infty(\Omega;\mathbb{E}) = L^\infty(\Omega,\mathfrak{a},P;\mathbb{E})$ とおく．

これらは，それぞれノルム $[\ ]_p$ or $[\ ]_\infty$ によって Banach 空間となる．

§3. Tensor 積 $L^1(\Omega)\otimes\mathbb{E}$.

任意の有限列の対 $\{x_i\}\subset L^p(\Omega)$ と $\{\xi_i\}\subset\mathbb{E}$ に対して

$$\sum_{i=1}^n x_i\odot\xi_i = \sum_{i=1}^n x_i(\omega)\xi_i \pmod{P} \tag{3.1}$$

とおく．これは $L^p(\Omega;\mathbb{E})$ の要素であり，この形の函数の全体を $L^p(\Omega)\odot\mathbb{E}$ で表わす．つまり，これは二つの Banach 空間 $L^p(\Omega)$ と $\mathbb{E}$ の間の代数的な Tensor 積であり，また $L^p(\Omega;\mathbb{E})$ の dense な線型部分空間である．$L^p(\Omega;\mathbb{E})$ におけるノルム $[\cdot]_p$ は cross norm である：

$$[x\odot\xi]_p = \|x\|_p\cdot\|\xi\|,\quad x\in L^p(\Omega),\ \xi\in\mathbb{E},$$

cf. Schatten [6]. $L^p(\Omega)\odot\mathbb{E}$ のノルム $[\cdot]_p$ に関する

completion は $L^p(\Omega)$ と $\mathbb{E}$ の間の Tensor product Banach 空間 $L^p(\Omega)\otimes\mathbb{E}$ である。したがって

$$L^p(\Omega;\mathbb{E}) = L^p(\Omega)\otimes\mathbb{E}.$$

$\forall f\in L^p(\Omega;\mathbb{E})$ は Bochner 可積分である。即ち積分値 $\int f(\omega)P(d\omega)$ が $\mathbb{E}$ の要素として一意に存在する。

また自然な identification

$$\xi = 1\odot\xi,\quad \xi\in\mathbb{E},\quad 1=\chi_\Omega$$

によって range 空間 $\mathbb{E}$ は $L^p(\Omega;\mathbb{E})$ の閉部分空間と見做され，写像

$$f \longrightarrow \int f(\omega)P(d\omega)$$

は norm-one projection $L^p(\Omega;\mathbb{E})\rightarrow\mathbb{E}$ (onto) である。

この報告の main は $L^1(\Omega;\mathbb{E})$ と $L^\infty(\Omega;\mathbb{E})$ に置くので，以下これらの空間におけるノルムについての公式を与へる。Banach 空間 $L^1(\Omega;\mathbb{E})$ と $L^\infty(\Omega;\mathbb{E})$ のノルムは Tensor 積ノルム (in Schatten's sense) として表わすことが可能である。有限列 $\{x_i\}\subset L^1(\Omega)$ or $L^\infty(\Omega)$ 及び $\{\xi_i\}\subset\mathbb{E}$ に対して γ－ノルムと λ－ノルムが次のように定義される：

$$N_\gamma\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\odot\xi_i\Big) = \inf\sum_{j=1}^{m}\|y_j\|_1\cdot\|\eta_j\|$$

$$N_\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \odot \xi_i\right) = \sup \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x^*\rangle \cdot \langle \xi_i, \xi^*\rangle$$

ここで inf は $\sum^n x_i \odot \xi_i = \sum^m y_j \odot \eta_j$ である全ての $y_j \in L^1(\Omega)$ と $\eta_j \in \mathbb{E}$ について，sup は $\|x^*\|_\infty \leqq 1$, $\|\xi^*\| \leqq 1$ である全ての $x^*(\in L^\infty(\Omega)^*)$ と $\xi^* \in \mathbb{E}^*$ についてである．これらのノルム N_γ, N_λ はノルム $[\ ]_p$ ($p = 1$ or ∞) と同一のものとなる：

$$[\sum x_i \odot \xi_i]_1 = N_\gamma(\sum x_i \odot \xi_i), \quad x_i \in L^1(\Omega)$$

$$[\sum x_i \odot \xi_i]_\infty = N_\lambda(\sum x_i \odot \xi_i), \quad x_i \in L^\infty(\Omega).$$

これによって $L^1(\Omega;\mathbb{E}) = L^1(\Omega)\otimes_\gamma \mathbb{E}$ かつ $L^\infty(\Omega)\otimes_\lambda \mathbb{E}$ は $L^\infty(\Omega;\mathbb{E})$ の閉部分空間である．L^∞-空間については位相構造などに関して興味ある内容があるがここでは省略する．とくに

§4. Conditional Expectations of Strong Random Variables.

通常の Conditional expectations については §1 で既に述べたが，vector-valued の場合について論ずる．

DEFINITION. Strong random variable $\mathcal{E}[f/\mathcal{B}]$ が Strong random variable f の $\mathcal{B}$ に関する Conditional expectation であるとは

(i) $\mathcal{E}[f/\mathcal{B}]$ は $\mathcal{B}$ に関して可測で，かつ Bochner 可積分である，

(ii) $$\int_B \mathcal{E}[f/\mathcal{B}](\omega)P(d\omega) = \int_B f(\omega)P(d\omega) \quad \text{for } {}^\forall B\in\mathcal{B}.$$

ここで積分は Bochner-sense である。

Vector valued f の Conditional expectation が果して存在するかどうかが直ちに問題となる。通常の (scalar valued) の場合は Radon-Nikodym の定理を用いて，その存在が証明されるわけであるが，この場合はどうかということが問題となる。所がこれが無条件に，この存在が可能となる。これの構成は

$$\mathcal{E}[g\odot\xi/\mathcal{B}] = E[g/\mathcal{B}]\odot\xi,\quad g\in L^1(\Omega),\ \xi\in E$$

つまり $f=g\odot\xi$ の場合に (i), (ii) を験証し，これを linear-hull に拡大し，さらに γ-ノルム N_γ の性質を用いて $L^1(\Omega)\otimes E$ に有界性を保ちながら拡大して $\mathcal{E}$ が構成される。以上のように vector-valued f に対しても通常の Radon-Nikodym の定理と Tensor 積の手法を組合わせることによって conditional expectations の導入が何んの制約を受けることも無しに達成される。cf. Umegaki-Bharucha-Reid [8]

§5. Martingales of Strong Random Variables

Strong random variables の Conditional expectations が導入されたので，直ちに vector-valued martingales の概念が定義されることになる．

Definition. $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha\in D}$ は $\mathcal{Q}$ の σ-subalgebras の net であるとする．つまり D が有向集合で $\alpha, \beta \in D$ $\alpha \leq \beta \Rightarrow \mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{B}_\beta$ とする．同じ有向集合 D を index にもつ strong random variables の系 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in D}$ ($\subset L^1(\Omega;\mathbb{E})$) が $\{\mathcal{B}_\alpha\}$ に関して E-valued martingale であるとは

$$\mathcal{E}[f_\beta/\mathcal{B}_\alpha] = f_\alpha, \quad \text{for } \alpha \leq \beta$$

を満すときをいう．

Example 1. 上記の Def. における σ-subalgebras $\{\mathcal{B}_\alpha\}$ の net と任意の $f \in L^1(\Omega;\mathbb{E})$ に対して

$$f_\alpha = \mathcal{E}[f/\mathcal{B}_\alpha], \quad \alpha \in D$$

とおくと，$\{f_\alpha\} \subset L^1(\Omega;\mathbb{E})$ で $\{\mathcal{B}_\alpha\}$ に関して $\mathbb{E}$-valued martingale となる．

Example 2. μ を $\mathbb{E}$-valued σ-additive な集合函数 (on $\mathcal{Q}$)，$\mathbb{P}$ を Ω の有限可測分割 $\pi = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ ($P(A_i) > 0$) 全体からなる族．

$\mathbb{P}$ における ordering を

$$\pi_1 \leq \pi_2 \iff \forall A \in \pi_2 \ \exists B \in \pi_1 : A \subset B \ (P\text{-mod})$$

とおくと，$\mathbb{P}$ は有向集合となる．さらに $\forall \pi \in \mathbb{P}$ に対して

$$f_\pi(\omega) = \sum \chi_{A_i}(\omega)\, \mu(A_i) / P(A_i)$$

かつ $\mathcal{B}_\pi = \sigma\text{-alg}[\pi]$ とおくと，$\pi_1 \leq \pi_2 \iff \mathcal{B}_{\pi_1} \subset \mathcal{B}_{\pi_2}$ で $\{f_\pi ; \pi \in \mathbb{P}\}$ は $\{\mathcal{B}_\pi ; \pi \in \mathbb{P}\}$ に関して $\mathbb{E}$-valued martingale となる．

§6. Martingales の収束と Radon-Nikodym Property.

$\mathbb{E}$-valued martingales の収束に関する最も基本的な定理は次に述べるものである：

定理 6.1. (1) $\{f_\alpha\}_{\alpha \in D}$ を Example 1 で与えた Martingale とする．ならば

$$\int_\Omega \| f_\alpha(\omega) - f_\infty(\omega) \| \, P(d\omega) \longrightarrow 0$$

ここで $f_\infty = E[f / \sigma[\bigcup_\alpha \mathcal{B}_\alpha]]$．

(2) Example 2 で，もし $\mu(A) = \int_A f(\omega) P(d\omega)$，$A \in \mathcal{G}$，かある $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ で表されるならば

$$\int_\Omega \| f_\pi(\omega) - f(\omega) \| \, P(d\omega) \longrightarrow 0.$$

この定理6.1,(2)はRadon-Nikodym微分に関連しているのであるが，この性質を巡って，様々な議論が展開される。それらの内で，大変Clarifiedな結果がChatterji [1]によって得られているのでそれについて述べて見る。

<u>Definition</u>. Banach空間$\mathbb{E}$が確率測度空間$(\Omega, \mathcal{C}, P)$に関して<u>RN-property</u>をもつ

$\Longleftrightarrow$

$\forall$ $\mathbb{E}$-valued σ-additiveな$\mathcal{C}$上の集合函数μが

$$V(\Omega,\mu) = \sup\{\Sigma\|\mu(A_i)\| ; \{A_i\}\in\mathbb{P}\} < +\infty$$

($=\mu$の全変分)であり，且つ$\mu \ll P$(すなわち$P(A)=0$ならば$\mu(A)=0$；μはPに関して絶体連続)であるならば，つねに$\mu(\cdot)$は不定積分として表わされる，即ち，$\exists_1 f\in L^1(\Omega;\mathbb{E})$；

$$\mu(A) = \int_A f(\omega)\,P(d\omega), \quad \forall A\in\mathcal{C}.$$

<u>定理 6.2</u> [Chatterji]. Banach空間$\mathbb{E}$及び確率測度空間$(\Omega, \mathcal{C}, P)$を与へるとき，次の4条件は互いに同等である。

(1°) Banach空間$\mathbb{E}$は$(\Omega, \mathcal{C}, P)$に関してRN-propertyをもつ，

(2°) $\mathbb{E}$-valued martingals $\{f_n\}_{n\geq 1}$ について，もし $\sup_{n\geq 1}\int\|f_n(\omega)\|P(d\omega)<+\infty$ ならば $\lim f_n$ が strong a.e. に存在する．この極限は $\sigma[\cup\mathcal{B}_n]$－可測である，

(3°) $\mathbb{E}$-valued martingale $\{f_n\}_{n\geq 1}$ が一様に可積分（すなわち，$\lim_{N\to\infty}\int\|f_n(\omega)\|\chi_{\|f_n\|>N}(\omega)P(d\omega)=0$, unif. in $n\geq 1$）であるならば $f\in L^1(\Omega;\mathbb{E})$ が存在して

$$\int_\Omega\|f_n(\omega)-f(\omega)\|P(d\omega)\longrightarrow 0.$$

Chatterji [1] は他にも RN-property に関連して収束条件をいくつか与えている．

Radon-Nikodym の定理は一般な測度空間において論ずるとき，種々な可測構造との関連が現われて来るが，函数解析的な面に立つとき L^2-Hilbert 空間上の multiplication operator algebra の極大性とか，或いは Riesz の表現定理などとの同等性が明らかにされている．例へば Segal [7] 参照．この point を目標にして，この報告で論じて来たような vector-valued な函数とか，測度に対しても，このような同等性が或程度可能となる．これらについては Hirahara [3]

を参照．

この報告の範囲より多少はみだすので詳しくは述べないが Nakamura-Turumaru に始まる C*-algs. or W*-algs. 間の Tensor 積，或いは Nakamura-Takeda に始まる接合積の理論なども，vector-valued な函数の形式に formulate することも可能である．或いは，全く内容的に異なって来るが，情報理論における channel の構成が実は signed measures の成生する Banach 空間に値をとる函数として formulate されて行き Tensor 積の形式にも結びつけられて行くことが可能となって来る．他にも二，三の応用があるがここでは省略させて頂く．

References

[1] S. D. Chatterji, Martingale convergence and the Radon-Nikodym Theorem in Banach spaces, Math. Scand. 23 (1968), 21-41.

[2] E. Hille and R. S. Phillips, Functional Analysis and Semi-Groups. AMS Colloq. Pub. 31(1957).

[3] Mieko Hirahara, On the generalized Radon-Nikodym Theorems and Riesz's representation Theorems. M. A. Thesis 1972, 2, 30 pp.

[4] S-T C. Moy, Characterizations of conditional expectation as a transformation on function spaces, Pacific J. Math. 4(1954), 47-65.

[5] M. Nakamura and T. Turumaru, Expectations in an operator algebra, Tōhoku Math. J. 6(1954).

[6] R. Schatten, A Theory of Cross-Spaces. Ann. Math. Studies. 26(1950).

[7] I. E. Segal, Equivalences of measure spaces, Amer. J. Math. 73(1951), 275-313.

[8] H. Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, Tōhoku Math. J. 6(1954), 177-181; II, ibid 8(1956), 86-100; III, Kōdai Math. Sem. Rep. 11(1959); IV, ibid 14(1962), 59-85.

[9] H. Umegaki and A. T. Bharucha-Reid, Banach space-valued random variables and tensor product of Banach spaces, J. Math. Analysis and Appls. 31(1970), 49-67.