数理解析研究所講究録
第 228 巻 1975 年 40-50

Tensor Norm に関連した定数

北大 応電研 安藤 毅

1. Grothendieck [2] は抽象 M 空間のもつ extension の性質, および抽象 L 空間の lifting の性質をもとにして Categoricial な方法で種々の tensor norm を導入し, これ等の間の基本的関係を確立した。

以下では n 次元実 $l_1^{(n)}$, $l_2^{(n)}$ および $l_\infty^{(n)}$ に限定して代表的な tensor norm 相互の最良評価, および $n \to \infty$ での最良評価値の漸近挙動について概観する。

2. Object α が tensor norm であるとは, 有限次元 Banach 空間のどの pair $\{E, F\}$ に対しても $E \otimes F$ の上の norm $\|\cdot\|_\alpha$ が定まり

(i) $\quad \|x \otimes y\|_\alpha = \|x\| \cdot \|y\| \qquad x \in E,\ y \in F.$

(ii) $E'\otimes F'$ を $E\otimes F$ の dual と考えたとき $\|\cdot\|_\alpha$ の dual norm $\|\cdot\|_{\alpha'}$ は

$$\|x'\otimes y'\|_{\alpha'} = \|x'\|\cdot\|y'\| \qquad x'\in E',\ y'\in F'$$

(iii) $A: E_1 \mapsto E_2$, $B: F_1 \mapsto F_2$ が linear のとき $A\otimes B : E_1\overset{\alpha}{\otimes}F_1 \longmapsto E_2\overset{\alpha}{\otimes}F_2$ と考えて $\|A\otimes B\| \leqq \|A\|\cdot\|B\|$

E, F が一般の Banach 空間のときは $T\in E\otimes F$

$$\|T\|_\alpha = \inf\{\|T\|_{M\overset{\alpha}{\otimes}N} : T\in M\otimes N \subset E\otimes F\}$$

M, N 有限次元

で定める。

また α の dual norm に対応するのを α' でかく。これ等の事に関しては Amemiya − Shiga [1] が読み易い。

E, F が有限次元のとき, $\mathcal{L}(E,F)$ と $E'\otimes F$ と同一視出来るから tensor norm は $T: E\mapsto F$ への operator に対する norm とも考えられる。

以下では M は抽象 M-空間, L は抽象 L-空間 H は(実) Hilbert 空間, L_p は或る確率空間 (X,μ) 上の $L_p(X,\mu)$ をあらわすこととする。

全ての $T\in\mathcal{L}(E,F)$ に対し $\|T\|_\alpha \leqq \|T\|_\beta$ のとき $\alpha\leqq\beta$ (in $E'\otimes F$) とかく。また $\gamma_1\|T\|_\alpha \leqq \|T\|_\beta \leqq \gamma_2\|T\|_\alpha$ なる定数 γ_1, γ_2 があるとき $\alpha\sim\beta$ (in $E'\otimes F$) とかく。

以下で考察する tensor norm を定義しよう

$$\|T\|_{\varepsilon} = \text{operator norm}$$

$$\|T\|_{\backslash\varepsilon} = \inf \|B\|\cdot\|A\| \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "A"'] & & F \\ & M \arrow[ur, "B"'] & \end{tikzcd}$$

$$\|T\|_{\varepsilon/} = \inf \|B\|\,\|A\| \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "A"'] & & F \\ & L \arrow[ur, "B"'] & \end{tikzcd}$$

$$\|T\|_{\backslash\varepsilon/} = \inf \|C\|\cdot\|B\|\,\|A\| \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[rrr, "T"] \arrow[dr, "A"'] & & & F \\ & H \arrow[r, "B"] & L \arrow[ur, "C"'] & \end{tikzcd}$$

$$\|T\|_{H} = \inf \|B\|\cdot\|A\| \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "A"'] & & F \\ & H \arrow[ur, "B"'] & \end{tikzcd}$$

$$\|T\|_{2} = \inf \|B\|\cdot\|A\| \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[rrr, "T"] \arrow[dr, "A"'] & & & F \\ & L_\infty \arrow[r, phantom, "\subset"] & L_2 \arrow[ur, "B"'] & \end{tikzcd}$$

$$\|T\|_{\pi} = \inf \|B\|\cdot\|A\| \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[rrr, "T"] \arrow[dr, "A"'] & & & F \\ & L_\infty \arrow[r, phantom, "\subset"] & L_1 \arrow[ur, "B"'] & \end{tikzcd}$$

$$\|T\|_{/\pi} = \sup \frac{\|T\cdot A\|_{\pi}}{\|A\|} \qquad L \xrightarrow{A} E \xrightarrow{T} F$$

$$\|T\|_{\pi\backslash} = \sup \frac{\|B\cdot T\|_{\pi}}{\|B\|} \qquad E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{B} M$$

$$\|T\|_{/\pi\backslash} = \sup \frac{\|B\cdot T\cdot A\|_{\pi}}{\|B\|\cdot\|A\|} \qquad L \xrightarrow{A} E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{B} M$$

一般の tensor norm α に対し新しい tensor norm $/\alpha$, $\alpha\backslash$, $\backslash\alpha$, $\alpha/$, $\cdots$ の構成法はここに書かないが上より直ちに類推出来るであろう.

3. n 次実 $\ell_2^{(n)}$ 空間の回転群を G とし その上の normalized Haar measure を $m(\cdot)$ とする. 次の公式が成り立つことに注意する:

(1) $$\int_G \langle x, Sa\rangle \cdot \operatorname{sgn}\langle y, Sa\rangle \, dm(S) = M_n \langle x, y\rangle \frac{\|a\|}{\|y\|}$$

ここで $$M_n = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

(2) $$\int_G \langle x, Sa\rangle \cdot \langle y, Sa\rangle \, dm(S) = \frac{1}{n}\langle x, y\rangle \|a\|^2$$

(3) $$\int_G \operatorname{sgn}\langle x, Sa\rangle \cdot \operatorname{sgn}\langle y, Sa\rangle \, dm(S) = 1 - \frac{2}{\pi}\theta(x, y)$$

ここで $0 \leqslant \theta(x,y) \leqslant \pi$ 　 $\cos\theta(x,y) = \dfrac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}$

定理 1 (cf. Grothendieck [2, §3], Gordon [3])

$T \in \ell_2^{(n)} \otimes \ell_2^{(n)}$ で

(i) $\varepsilon = H \leqslant \backslash\varepsilon = \varepsilon/ \leqslant (2) \leqslant /\pi = \pi\backslash \leqslant \pi$

(ii) 1 を identity とすると

$\|1\|_\varepsilon = 1$ 　 $\|1\|_{\backslash\varepsilon} = nM_n$ 　 $\|1\|_2 = \sqrt{n}$

$\|1\|_{\pi\backslash} = \dfrac{1}{M_n}$ 　 $\|1\|_\pi = n$

(iii) $\alpha, \beta \in \{\varepsilon, \backslash\varepsilon, 2, \pi\backslash, \pi\}$ で $\alpha \leqslant \beta$ のとき

$$\sup_T \frac{\|T\|_\beta}{\|T\|_\alpha} = \frac{\|1\|_\beta}{\|1\|_\alpha}$$

証) (ii) $\pi\backslash$ の定義を少し変形すれば

$$\|1\|_{\pi\backslash} \text{の逆数} = \sup_{\substack{\sigma\ \text{確測度} \\ \text{on } S^{n-1}}} \left\{ \inf_{\|x\|=1} \int |\langle x, u\rangle|\, d\sigma(u) \right\}$$

所で

$$\inf_{\|x\|=1} \int |\langle x, u\rangle|\, d\sigma(u) = \int_{S^{n-1}} |\langle x, u\rangle|\, d\left(\int_G \sigma(S\cdot)\, dm(S)\right)$$

$$= \int_G |\langle x, Su\rangle|\, dm(S) = M_n \qquad \text{(1)より}$$

$\therefore\ \|1\|_{\pi\backslash} = \frac{1}{M_n}$.

Grothendieck [2] の成果の一つは $\|1\|_{/H'\backslash} = \frac{1}{nM_n^2}$ を示したことである。次の様にするとよい、

$$L_1(G) \ni f \xrightarrow{\ \varphi\ } \int f(S) S\cdot dm(S)\cdot a \in l_2^{(n)}$$

但し $\|a\|=1$ fix.

$L_1(G)/\varphi^{-1}(0) \simeq l_2^{(n)}$ は isometric onto

定義を変形すると $\|1\|_{/H'\backslash} = \|\varphi^*\circ\varphi\|_{H'}$

$L_\infty(G) \overset{J}{\subseteq} L_1(G)$ imbedding とすると. (1), (2)より

$$\|J\circ\varphi^*(x)\| = M_n\|x\|, \qquad \varphi\circ J\circ\varphi^* = \frac{1}{n}$$

$$l_2^{(n)} \xrightarrow{\ \varphi^*\ } L_\infty(G) \overset{J}{\subset} L_1(G) \xrightarrow{\ \varphi\ } l_2^{(n)} \xrightarrow{\ \varphi^*\ } L_\infty \overset{J}{\subset} L_1 \xrightarrow{\ \varphi\ } l_2^{(n)}$$

$$\frac{1}{n^2}\|1\|_\pi \leq \|\varphi\circ J\|\cdot\|\varphi^*\varphi\|_{H'}\,\|J\cdot\varphi^*\| = M_n^2\,\|1\|_{/H'\backslash}$$

$$\therefore\ \frac{n}{n^2M_n^2} \leq \|1\|_{/H'\backslash} \qquad \therefore\ \frac{1}{nM_n^2} \leq \|1\|_{/H'\backslash}$$

逆の不等式を出すには次のようにする,

$$A \overset{\text{def}}{=} \left[\int_G sgn\langle a, Sa\rangle S\, dm(S)\right]^* \left[\int_G sgn\langle a, Sa\rangle S\, dm(S)\right]$$

$$= \int_G \left[\int_G sgn\langle Sa, Ra\rangle \cdot sgn\langle a, Ra\rangle\, dm(R)\right] S\, dm(S)$$

を考えると, A は $l_2^{(n)}$ 上の positive definite operator で (1) を使うと, $Aa = M_n^2 a$ となり, 従って $\frac{1}{nM_n^2}A - \frac{1}{n}P_a$ は positive definite である, ここで P_a は a を含む 1次元部分空間への射影.

今

$$L_\infty(G) \ni h(S) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{nM_n^2}\int_G sgn\langle Sa, Ra\rangle \cdot sgn\langle a, Ra\rangle\, dm(R) - \langle a, Sa\rangle$$

を考えると, (2) より

$$\int_G h(S)\, S\, dm(S) = \frac{1}{nM_n^2} A - \frac{1}{n} P_a \quad (\text{posit. def}).$$

G は compact 群であるから, 上の positive definite 性から $h(S)$ の函数としての positive definite が出る: 即ち $f \in L_1(G)$ に対し

$$\int_G \int_G h(R^{-1}S) f(R) f(S)\, dm(R)\, dm(S)$$

$$= \frac{1}{nM_n^2} \int_G \left| \int_G f(R)\, sgn\langle Sa, Ra\rangle\, dm(R)\right|^2 dm(S)$$

$$- \int_G \int_G f(R) f(S) \langle Ra, Sa\rangle\, dm(R)\, dm(S) \geqq 0$$

すなはち

$$\langle \varphi^*\circ\varphi(f), f\rangle \leq \frac{1}{nM_n^2}\int_G |\langle f, \mathrm{sgn}\langle \xi a, \cdot a\rangle\rangle|^2\, dm(\xi) .$$

これから $\|\varphi^*\circ\varphi\|_{H'} \leq \frac{1}{nM_n^2}$ は容易に導かれる.
(cf. [1,]).

次に A, B を

$$\begin{tikzcd} l_2^{(n)} \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "A"'] & & l_2^{(n)} \arrow[rr, "T^*"] \arrow[dr, "B^*"] & & l_2^{(n)} \\ & L \arrow[ur, "B"'] & & M \arrow[ur, "A^*"'] & \end{tikzcd}$$

$\|T\|_{\backslash\varepsilon} = \|A\|\cdot\|B\|$ にとる.

定義から

$$\|T^*T\|_\pi \leq \|A^*\|\,\|B^*\|\,\|B\|\,\|A\|\,\|1\|_{/H'\backslash} = \frac{1}{nM_n^2}\|T\|_{\backslash\varepsilon}^2$$

一方 $\|T\|_2^2 = \|T^*T\|_\pi$

従って $\|T\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{n}\,M_n}\|T\|_{\backslash\varepsilon}$

dual にして $\|T\|_{\pi\backslash} \leq \frac{1}{\sqrt{n}\,M_n}\|T\|_2$.

ここで $T=1$ として $\|T\|_{\pi\backslash} = \frac{1}{M_n}$ $\|T\|_2 = \sqrt{n}$ より

$$\sup_T \frac{\|T\|_2}{\|T\|_{\backslash\varepsilon}} = \sup_T \frac{\|T\|_{\pi\backslash}}{\|T\|_2} = \frac{1}{\sqrt{n}\,M_n} = \frac{\|1\|_{\pi\backslash}}{\|1\|_2}.$$

明かに $\|1\|_{\backslash\varepsilon} \geq nM_n$, また

$$l_2^{(n)} \xrightarrow{\varphi^*} L_\infty(G) \overset{J}{\subset} L_1(G) \xrightarrow{\varphi} l_2^{(n)}$$

を考え $\|J\circ\varphi^*\| = M_n$, $\varphi\circ J\circ\varphi^* = \frac{1}{n}$. $\|\varphi\|=1$ より

$$\frac{1}{n}\|1\|_{\backslash\varepsilon} \leq M_n \qquad \therefore\ \|1\|_{\backslash\varepsilon} = nM_n$$

従って $\sup \frac{\|T\|_2}{\|T\|_{\backslash\varepsilon}} = \frac{\|1\|_2}{\|1\|_{\backslash\varepsilon}}$.

最後に $\|T\|_{\pi\backslash} \leq \frac{1}{\sqrt{n}\,M_n}\|T\|_2 \leq \frac{1}{nM_n^2}\|T\|_{\backslash\varepsilon}$ で $T=1$ で等号が成立. (終)

この定理で tensor norm の相互評価の値として nM_n, $\frac{1}{M_n}$, $\frac{1}{\sqrt{n}M_n}$, $\frac{1}{nM_n^2}$ が出て来るがこれ等の漸近挙動を示すため，

$$\Phi(n) \sim \Psi(n) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(n)}{\Psi(n)} = 1$$

なる記法を使うと

$$\frac{1}{M_n} \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{n}M_n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{および} \quad nM_n \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

4. $l_1^{(n)} \otimes l_1^{(n)}$ および $l_\infty^{(n)} \otimes l_\infty^{(n)}$ ではあまり正確には出ない．

定理 2 (Grothendieck [2], Lindenstrauss-Pelczynski [4], Gordon [3]). $T \in l_\infty^{(n)} \otimes l_\infty^{(n)}$

(i) $\varepsilon = \backslash\varepsilon = \varepsilon/$, $\pi\backslash = /\pi = \pi$.

(ii)
$$\sup_T \frac{\|T\|_2}{\|T\|_\varepsilon} \leq \sqrt{n} \qquad \sup_T \frac{\|T\|_\pi}{\|T\|_\varepsilon} \equiv J_n$$

ここで $$\sqrt{n} \leq J_n \leq \frac{2^n n}{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |n-2k|}$$

(iii)
$$\sup \frac{\|T\|_\pi}{\|T\|_H} \equiv K_n$$

ここで $\lim_n K_n \geq \frac{\pi}{2}$ 且 $K_n \leq \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Dual norm に移ると

定理 2′. $T \in l_1^{(n)} \otimes l_1^{(n)}$

(i)′ $\varepsilon = \backslash\varepsilon = \varepsilon/$, $\pi = /\pi = \pi\backslash$

(ii)′ $$\sup_T \frac{\|T\|_\pi}{\|T\|_\varepsilon} = J_n \leqq \frac{2^n n}{\sum_0^n \binom{n}{k}|n-2k|}$$

(iii)′ $$\sup_T \frac{\|T\|_2}{\|T\|_\varepsilon} \leqq \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

(証) (ii)′ $\|T\|_\pi = \|T\|_{\pi\backslash} \leqq \|T\|_\varepsilon \, \|1\|_{\pi\backslash \, \mathcal{L}(l_1, l_1)}$

$l_1^{(n)\prime}$ の unit ball の 端点 が $\Omega = \{(\pm1, \cdots, \pm1)\}$ の形 より

定理 1 の 場合 と 同じで 乗法群 Ω の Haar 測度 σ に対し

$$\|1\|_{\pi\backslash} \text{ の逆数} = \inf_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in l_\infty^{(n)}}} \int \left|\sum_i x_i \omega_i\right| d\sigma(\omega)$$

$$= \frac{1}{2^n n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n-2k|$$

従って $$\sup_T \frac{\|T\|_\pi}{\|T\|_\varepsilon} \leqq \frac{2^n n}{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}|n-2k|}.$$

(ii) の 前半. 上 と 同じくして

$$\|1\|_{2 \, \mathcal{L}(l_1^{(n)}, l_1^{(n)})} = \left[\frac{2^n n^2}{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(n-2k)^2}\right]^{1/2} = \sqrt{n}$$

$$\therefore \quad \|T\|_2 \leqq \|1\|_{2 \, \mathcal{L}(l_1^{(n)}, l_1^{(n)})} \|T\|_\varepsilon \doteqdot \sqrt{n} \, \|T\|_\varepsilon .$$

(iii). Grothendieck [3] の 最大の 成果は 一般の Banach 空間 の tensor 積で $\|T\|_H \leqq \|T\|_{/\pi\backslash} \leqq \sinh(\pi/2) \|T\|_H$ を示した ことである。 これは $\sup_n K_n \leqq \sinh(\pi/2)$ と同じである.

$T \in \ell_\infty^{(n)} \otimes \ell_\infty^{(n)}$ で $\|T\|_H = 1$ とすると 定義から

$$\begin{tikzcd}
\ell_1^{(n)} \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "A"'] & & \ell_\infty^{(n)} \\
& \ell_2^{(n)} \arrow[ur, "B"'] &
\end{tikzcd}
\qquad \|T\|_H = \|A\| = \|B\| = 1$$

のものがある.

$\ell_1^{(n)}$ (および $\ell_\infty^{(n)}$ の) canonical な基底を $e_1, \cdots, e_n$ とする.

$x_j = Ae_j$, $y_i = B^* e_i$ とすると T の matrix は

$T = [\langle y_i, x_j \rangle]$ となる. $0 \leq \theta(y_i, x_j) < \pi$ で

y_i と x_j の間の角とすると

$$\frac{\langle y_i, x_j \rangle}{\|y_i\| \cdot \|x_j\|} = \cos \theta(y_i, x_j) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta(y_i, x_j)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{2} - \theta(y_i, x_j)\right)^{2k+1}$$

一方 (1) より

$$\frac{\pi}{2} - \theta(y_i, x_j) = \frac{\pi}{2} \int_G sgn\langle y_i, \xi a \rangle \cdot sgn\langle x_i, \xi a \rangle \, dm(\xi)$$

で

$$\| [sgn\langle y_i, \xi a \rangle \cdot sgn\langle x_j, \xi a \rangle] \|_\pi \leq 1$$

従って $\ell_\infty^{(n)} \otimes \ell_\infty^{(n)}$ の π-norm の性質より

$$\left\| \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta(y_i, x_j)\right)^{2k+1} \right] \right\|_\pi \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}.$$

また $\|A\| = \|B\| = 1$ より $\|x_i\|, \|y_j\| \leq 1$ より

$$\|T\|_\pi \leq \left\| \left[\frac{\langle y_i, x_j \rangle}{\|y_i\| \|x_j\|} \right] \right\|_\pi \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} = \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

これから $\|T\|_\pi \leq \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) \|T\|_H$.

5. J_n, K_n を実際に計算するのはかなり困難である.

$$J_2 \leq J_3 \leq \frac{2^3 \times 3}{\sum_0^3 \binom{3}{k} |3-2k|} = 2$$

であり, $T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ または $T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

を考えて $\|T\|_\varepsilon = 1$ (in $l_1 \otimes l_1$) 且 $\|T\|_\pi = 2$ より

$$J_2 = J_3 = 2$$

この T に対し $\|T\|_{H'} = \sqrt{2}$ が極値を与え

$$\sup_{S \in l_\infty^{(3)} \otimes l_\infty^{(3)}} \frac{\|S\|_\pi}{\|S\|_H} = \sqrt{2} \quad \text{となり}$$

$$K_2 = K_3 = \sqrt{2} \qquad \text{(cf. Stephens \& Cohen [5])}.$$

[文 献]

[1] I. Amemiya & K. Shiga On tensor products of Banach spaces, Kodai Math. Rep. 9 (1957)

[2] A. Grothendieck, Resumé de la theorie des produits tensoriels topologiques, Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 8 (1956)

[3] Y. Gordon, On p-absolutely summing constants of Banach spaces, Israel J. Math. 7 (1969)

[4] J. Lindenstrauss & A. Pelczynski, Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ spaces, Studia Math. 29 (1968)

[5] Stephens & Cohen, Optimization problem for K_G (preprint)