

Tensor Product of Ordered Spaces

北大理 越 昭 三

函数空間の tensor 積 $C(X) \otimes C(Y)$ は $C(X \times Y)$ に、また $L_1(\mu) \otimes L_1(\nu)$ は $L_1(\mu \otimes \nu)$ に自然に imbedd されて、しかも適当な位相で dense に含まれている。すなわち、同じ type の函数空間の tensor 積の completion が同じ type の函数空間となる。したがって、これらの各々の函数空間の自然な order structure が tensor 積の order structure に product の意味で密接につながっているものと考えられる。このことから、一般の order space の Tensor 積の order structure をどのように考えたらよいかの方法を考えてみたい。

ここでは、Fermelin の結果を参照しつつ、vector lattice (v.l. と書く = ともある。最近では Riesz space とも云う) の立場から Tensor 積の order structure を調べたい。E を vector lattice, すなわち linear space であって、order relation が定義され、 $\forall x, y \in E$ に対して $\sup(x, y)$, $\inf(x, y)$ が定まり、これが加法、

非負数係数に関して commute するものとする。

$E^+ = \{x \geq 0, x \in E\}$ は convex cone となり, positive cone と云われる。

$E_0 \subset E$ を sub vector lattice とする。 E_0 が order-dense とは $\forall 0 < x \in E, \exists y \in E_0$ s.t. $0 < y \leq x$. E が Archimedean とする。 すなわち $x > 0$ に対して, $\{nx, n \in \mathbb{N}\}$ が order-bounded でない。 このとき $E \supset E_0$ が order-dense のとき

$\forall x \in E^+ \quad x = \sup \{y; y \in E_0^+, 0 \leq y \leq x\}$
となる。

Tensor 積と bilinear transformation とは基本的に密接な関係がある。 E, F, G を Archimedean vector lattice (以後 A.v.l) とし, bilinear transformation $\phi: E \times F \rightarrow G$ が positive とは $\phi(x, y)$ が $x \in E^+, y \in F^+$ をそれぞれ固定して $E \rightarrow G$ および $F \rightarrow G$ と考えて, positive linear transformation となっていることを云う。 また $\phi: E \times F \rightarrow G$ が lattice bismorphism とは, $\phi(x, y)$ が $x \in E^+, y \in F^+$ をそれぞれ固定したとき, $E \rightarrow G$ および $F \rightarrow G$ が lattice homomorphism になっている。

X が compact のとき $C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ が non-trivial lattice

homomorphism であれば", これは X の一員で定まるのに
 対して, $\phi: C(X) \times C(Y) \rightarrow \mathbb{R}$ が lattice bimorphism
 ならば $\phi(x, y) = \alpha x(s) y(t)$ for some $s \in X,$
 $t \in Y, \alpha \geq 0$ となる。

Positive bilinear form $\phi: C(X) \times C(Y) \rightarrow \mathbb{R}$ につ
 いては, $x_i \in C(X), y_i \in C(Y) (i=1, 2, \dots, n)$ について
 すべての $s \in X, t \in Y$ に対して $\sum_{i=1}^n x_i(s) y_i(t) \geq 0$ とな
 るならば,

$$\sum_{i=1}^n \phi(x_i, y_i) \geq 0 \quad \text{となる。}$$

このとき, Yoshida の A. u. l. に関する表現定理 (E
 が A. u. l. で order unit をもてば E は適当な compact set
 X に関する $C(X)$ に order-dense (この場合 norm dense)
 に imbedd され, order unit は $1 \in C(X)$ と対応する。) と
 Nakano-Brown の表現定理 (必ずしも order unit
 をもたない A. u. l. は $\mathbb{R}^X / \text{ideal}$ に同型になる) とを用
 いることにより, つぎの結果が得られる。

定理

$E, F \in \text{A. u. l.}$ とする。このとき A. u. l. H と適当な
 $\phi: E \times F \rightarrow H$ なる lattice bimorphism が存在して,
 ϕ から induce された linear transformation $E \otimes F \rightarrow H$
 が一対一となる。

2. E, F を A. v. l. とする。このとき A. v. l. G と lattice bimorphism ϕ がつきのような性質をもつように作る = ことが出来る。これは essentially に unique である。

① A. v. l. H と lattice bimorphism $\psi: E \times F \rightarrow H$ があれば, lattice homomorphism $T: G \rightarrow H$ が存在して $T\phi = \psi$ となる。

② ϕ は $E \otimes F$ を G の中に $-$ 対 $-$ に imbedd する 対応を induce する。

③ $E \otimes F$ は G の中で order-dense であり, 更に $\forall w \in G$ に対して $\exists x_0 \in E^+, \exists y_0 \in F^+$ で $\delta > 0$ に対して, $v \in E \otimes F$ を適当に定めれば $|w - v| \leq \delta x_0 \otimes y_0$ 。

このようにして, A. v. l. E, F に対して, tensor 積 $E \otimes F$ を含む A. v. l. G が構成出来たわけである。これは essentially に unique であるから, これを $E \otimes F$ と表わすこととする。

今 $E \times F \rightarrow E \otimes F$ なる lattice bimorphism を \otimes で表わすこととする。

上の定理の直接の結果として, $E, F, H \in$ A. v. l. とし, $\psi: E \times F \rightarrow H$ が $\psi(x, y) > 0$ if $x > 0, y > 0$ であれば, $T: E \otimes F \rightarrow H$ を $T \otimes = \psi$ となる lattice homomorphism が存在するので, $E \otimes F$ は $\psi(E \times F)$ が generate した H の

sub-vector lattice と同型になることが分る。

また, $E_0 \subset E$, $F_0 \subset F$ どちらも sub-vector lattice のとき, $E_0 \bar{\otimes} F_0$ は $E_0 \otimes F_0$ から generate される $E \otimes F$ の sub-vector lattice と同一視出来る。

以上 E, F ともに Archimedean の場合には定理を成立せしめるように $E \otimes F$ が考えられるが Archimedean でないときにはよく分らない。なお, $\varphi: E \times F \rightarrow H$ で H が Archimedean でないならば, φ が lattice bimorphism でも $T \otimes = \varphi$ となる T で lattice homomorphism になるものが存在しないことがある。すなわち定理の 2 ①がみたされない場合がある。

E, F, H が A. v. l. とする。 $\phi: E \times F \rightarrow H$ が positive bilinear transformation とする。このとき, induce された linear transformation $E \otimes F \rightarrow H$ は positive となる。($E \otimes F$ の order は $E \bar{\otimes} F$ の中の order と考えて。)

定理 E, F を A. v. l. とし, H が更に σ -complete または, Banach lattice のとき $\phi: E \times F \rightarrow H$ を positive bilinear transformation, $T: E \otimes F \rightarrow H$ を induced positive linear transformation, このとき $T: E \bar{\otimes} F \rightarrow H$ なる positive linear transformation が存在して, $\phi = T \otimes$ となる。 T は unique である。

この定理は H がつぎのように弱 ∞ complete 性で置きかえても成立する。 すなわち

$H \ni x \geq 0$, $H \ni y_n (n=1, 2, \dots)$ に対し

$$|y_n - y_m| \leq 2^{-n} x \quad m \geq n$$

ならば $\exists y \in H$ で $|y_n - y| \leq 2^{-n} x (n=1, 2, \dots)$ が成立する。

non-trivial positive linear functional が存在するとき、そのような vector lattice E を regular という。

このときには E は A. v. l. となるのは当然である。

E, F を A. v. l. として $\{x \otimes y, x \in E^+, y \in F^+\}$ から generate される $E \otimes F$ の convex cone を P で表わすこととする。 $E \otimes F$ の positive cone との間につぎのような関係がある。

定理 E, F を vector lattice として regular とする。

$E \otimes F$ の positive cone と $E \otimes F$ との intersection を

$(E \otimes F)^+$ で表わすものとする。このとき $(E \otimes F)^+ = P^-$

となる。ここで $-$ は closure notation で closure を定める

位相は $E \otimes F$ 上の一番強い local convex topology である。

すなわち

$$(E \otimes F)^+ = \{ \omega \in E \otimes F, T\omega \geq 0 \text{ for all } T : E \otimes F \rightarrow H \}$$

with $Tv \geq 0$ for $v \in P$ }.

『 E が vector lattice として regular $\Leftrightarrow E$ は 適当な local convex topology τ をもち, positive cone E^+ が τ の位相で closed 』

に注意すると,

定理 E, F を regular vector lattice として, E^+, F^+ を closed set とする local convex topology τ による dual E', F' とする。

$$(E \otimes F)^+ = \overline{\bigcup_{\lambda} (E \otimes F, E' \otimes F')} \text{ による } P \text{ の closure.}$$

以上の結果を参照にすると,

1. E, F が vector lattice として σ -complete の場合,
2. E, F が vector lattice として complete 且 order の意味で連続な linear functional が十分澤山ある場合.
3. A. v. lattices $E_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ が無限個の場合の tensor 積の考察

等について, 同種の考察をなすに結果を得ることは出来る。

(紙面の制約上, 概念, 定義, 定理は はぶきます。)

References

[1] D. H. Fremlin : Tensor products of Archimedean vector lattices. Amer. J. M (1972) p. 777 ~ 798

[2] A. Hulanicki and P. R. Phelps : Some applications of tensor products of partially ordered linear spaces. J. Funct. Analysis 2 (1968) p 177 ~ 201

[3] H. Nakano : Product space of semi-ordered linear spaces J. Hokkaido Univ. 12 No.4 (1953)