数理解析研究所講究録
第 228 巻 1975 年 88-100

Von Neumann algebra の algebraic generation

東北大 教養　齋藤 傾四郎

§1. 序論. Von Neumann algebra の generation の問題として研究対象になったものとして次の二つがある.

問題1. separable Hilbert space 上の von Neumann algebra は single generator をもつか. もし肯定的ならば, どんな種類の operator が single generator たり得るか.

問題2. von Neumann algebra がその projections 全体 (あるいはその他の class の operators) で代数的に生成されるのはどんな場合か.

ここで, von Neumann algebra $\mathcal{A}$ が subset $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ で代数的に生成されるとは, 任意の operator $A \in \mathcal{A}$ が $\mathcal{S}$ の中の operators の algebraic combination として表わされることである.

問題1においては von Neumann algebra $\mathcal{A}$ が hyperfinite II_1, properly infinite の場合には $\mathcal{A} \otimes B(H)$ ($B(H)$ は Hilbert space H 上の bounded operators 全体の作る von Neumann algebra) と同型であるということが有効に働き，簡単な operator matrix の計算に帰着できて議論が進められた[4].

ここではこのテクニックを問題2に適用して，文献[2], [3] で得られた結果を統一的に証明する.

はじめに von Neumann algebras のテンソル積に関する基本的な事実をまとめておく. H_1, H_2 を Hilbert spaces，そのテンソル積を $H_1 \otimes H_2$ とする. $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ を H_2 の orthonormal basis とすると

$$U_\alpha : H_1 \to H^\alpha \equiv H_1 \otimes e_\alpha, \quad x \in H_1 \mapsto x \otimes e_\alpha \in H^\alpha$$

は isometric map である. $H^\alpha = H_1$ と identify すると

$$H_1 \otimes H_2 = \sum \oplus_{\alpha\in I} H^\alpha, \quad H^\alpha = H_1 \quad \text{for all } \alpha \in I$$

である. $T \in B(H_1 \otimes H_2)$ は次のような matrix 表現ができる; $U_\alpha^*: H_1 \otimes H_2 \to H_1$ は H^α を H_1 上へ isometric に写し，$H_1 \otimes H_2 \ominus H^\alpha$ を $\{0\}$ に写す. $T_{\alpha\beta} = U_\alpha^* T U_\beta$ とおけば，

$$T = (T_{\alpha\beta}), \quad T_{\alpha\beta} \in B(H_1).$$

特に $\mathcal{A}$ を H_1 上の von Neumann algebra とすると，

$$\mathcal{A} \otimes B(H_2) = \{T \in (T_{\alpha\beta})\ ;\ T_{\alpha\beta} \in \mathcal{A}\}$$

である.

いま，$\mathcal{A}$ を Hilbert space H 上の von Neumann algebra とし，$\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$ を $\mathcal{A}$ の equivalent orthogonal projections の

family で $\sum_{\alpha\in I} E_\alpha = I$ とする．$E_\alpha \sim E_\beta$ を与える $\mathcal{A}$ の partial isometry を $V_{\alpha\beta}$ とする：$V_{\alpha\beta}^* V_{\alpha\beta} = E_\alpha$, $V_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}^* = E_\beta$. ．$\alpha_0 \in I$ を一つ固定して $V_{\alpha_0\alpha}$ の定める $H_1 \equiv E_{\alpha_0} H$ から $H^\alpha \equiv E_\alpha H$ 上への isomorphism を U_α とする．H^α と H_1 を identify して，

$$H = H_1 \otimes H_2 , \quad H_2 = L^2_{\mathbb{C}}(I)$$

を得る．この時，$T \in \mathcal{A}$ の matrix 表現は

$$T = (T_{\alpha\beta}) , \quad T_{\alpha\beta} = (V_{\alpha_0\alpha}^* T V_{\alpha_0\beta})_{E_{\alpha_0}} \in \mathcal{A}_{E_{\alpha_0}} ,$$

$T' \in \mathcal{A}'$ の matrix 表現は

$$T' = (T'_{\alpha\beta}), \quad T'_{\alpha\beta} = (V_{\alpha_0\alpha}^* T' V_{\alpha_0\beta})_{E_{\alpha_0}} = \delta_{\alpha\beta} T'_{E_{\alpha_0}} \in \mathcal{A}'_{E_{\alpha_0}}$$

となり，$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{E_{\alpha_0}} \otimes \mathcal{B}(H_2)$ である．特に $\mathcal{A}$ が continuous あるいは properly infinite であれば，

$$\exists E, F \in \mathcal{A} : E \perp F , \ E \sim F , \ E + F = I$$

であるから

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_E \otimes \mathcal{B}(H_2) \equiv M_2(\mathcal{A}_E) , \quad \dim . H_2 = 2$$

である．すなわち $\mathcal{A}$ の operator は entries が $\mathcal{A}_E$ の operators の 2×2 matrix として表現される．

$\mathcal{A}$ が n-homogeneous とは n 個の equivalent orthogonal abelian projections で和が I のものが選べるときである．従ってこの時

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(H_n) , \ \mathcal{B} \text{ abelian} , \ \dim H_n = n$$

となる. type I の von Neumann algebra は homogeneous von Neumann algebras の direct sum である.

§2. 補題. §1で述べた目的の結果を証明するのに必要ないくつかの補題を準備する.

補題 1. 任意の von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ に対して, $M_2(\mathfrak{A})$ $(=\mathfrak{A}\otimes B(H_2),\ \dim H_2=2)$ はその projections 全体で代数的に生成される.

証明. $M_2(\mathfrak{A})$ の任意の operator $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ を取る.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & C^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} 0 & D^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^*\begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから, $\begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(X\in\mathfrak{A})$ の形の operator を考えればよい。任意の $X\in\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A}$ の unitary operators の一次結合であるから, $X=U$, unitary として十分である. この時,

$$E=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I & U \\ U^* & I \end{bmatrix},\quad F=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I & -iU \\ iU^* & I \end{bmatrix}$$

と定義すれば, E, $F\in M_2(\mathfrak{A})$ は projections で,

$$\begin{bmatrix} 0 & U \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(2E-I)+\frac{i}{2}(2F-I)$$

であるから結論が得られる.

補題 2. 任意の von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ に対して $M_2(\mathfrak{A})$ はその index 2 の nilpotent (i.e. square が zero) partial isometries 全体で代数的に生成される.

証明. 補題 1 の証明から分る様に, $\begin{bmatrix} 0 & U \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ($U \in \mathfrak{A}$ は unitary) の形の $M_2(\mathfrak{A})$ の element のみを考えて十分である. 所で,

$$\begin{bmatrix} 0 & U \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & U \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & U \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} UU^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから $\begin{bmatrix} 0 & U \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 自身が index 2 の nilpotent partial isometry である. 故に $M_2(\mathfrak{A})$ のすべての elements は index 2 の nilpotent partial isometries 全体で代数的に生成される.

type I の von Neumann algebra の case を処理するために次の補題を準備する.

補題 3. $\mathfrak{A}$ を n-homogeneous ($n < \infty$) von Neumann algebra, $S \in \mathfrak{A}$ を任意の self-adjoint operator とする. この時次の性質を持つ equivalent orthogonal projections $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ が選べる.

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = I; \quad E_i S = S E_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

証明. $\mathfrak{A}$ は n-homogeneous であるから, $\mathfrak{A}$ の equivalent orthogonal abelian projections $\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$ が存

在して，

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = I, \quad \mathcal{A} = \mathcal{B} \otimes B(H_n), \quad \dim H_n = n, \quad \mathcal{B} \text{ abelian}$$

となる．Gelfand 表現により，$\mathcal{B}$ はその maximal ideal space X 上の連続関数と考えてよい：$\mathcal{B} = C(X)$．故に $\mathcal{A}$ は $C(X)$ の elements を entries とする $n \times n$ 行列全体の algebra と考えてよい：$\mathcal{A} = M_n(C(X))$．従って次の Deckard-Pearcy [1] の結果が適用できる．

DECKARD-PEARCY の補題．　任意の self-adjoint element $A \in M_n(C(X))$ に対して unitary element $U \in M_n(C(X))$ が存在して，次の性質を持つ．

$$\forall t \in X : (U^*AU)(t) \text{ は diagonal.}$$

この Deckard-Pearcy の結果を吾々の case に適用すると

$$\exists U \in \mathcal{A} \text{ unitary}, \forall t \in X : (U^*SU)(t) \text{ は diagonal}$$

を得る．故に

$$(U^*SU)P_i = P_i(U^*SU) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

となる．従って $E_i = UP_iU^*$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とおけば，$\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ が求める性質を持つ．

補題4．　von Neumann algebra $\mathcal{A}$ が abelian であるための必要十分条件は，$T^2 = 0$ なる $T \in \mathcal{A}$ は $T = 0$ 以外に存在しないことである．

証明．($\Leftarrow$) $\mathcal{A}$ が non-abelian であれば，non-zero orthogonal equivalent projections $E, F \in \mathfrak{A}$ が存在する．

$$T^*T = E,\quad TT^* = F\quad, T \in \mathfrak{A}$$

とすると，$TE = FT = T \neq 0$ であり，

$$T^2 = (TE)(FT) = TEFT = 0.$$

($\Rightarrow$) 次の事実から明らかである．

"$\mathfrak{A}$ を任意の von Neumann algebra とし，$A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{A}'$, $AB = 0$ ならば central projection $E \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$ が存在して，$EA = 0$, $EB = B$ をみたす．" (実際，すべての $T \in \mathfrak{A}$ に対して $ATx = 0$ となる x 全体の subspace を $\mathfrak{M}$ とすると $\mathfrak{M}$ 上への projection E が求める性質を持つ)

これを $T = A \in \mathfrak{A}$，$T = B \in \mathfrak{A}'$ に適用すれば $ET = TE = 0$ なる projection $E \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ が存在することになる．

§3. 定理. §2 の補題を用いて目的の定理を証明する．

定理 1. von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ がその projections 全体で代数的に生成されるための必要十分条件は，$\mathfrak{A}$ が infinite dimensional abelian summand を含まないことである．

証明. 最初 $\mathfrak{A}$ がその projections 全体で代数的に生成されると仮定する．この時 $\mathfrak{A}$ のすべての summand はまたその中の projections 全体で代数的に生成されることを注意しておく．いま，$\mathfrak{A}$ が infinite dimensional abelian summand $\mathfrak{B}$

を含むと仮定する．Gelfand 表現で，$\mathfrak{B}$はある compact Hausdorff space 上の連続関数全体$C(X)$とみなしてよい．この時$\mathfrak{B}$の projection は$C(X)$の中の特性関数に対応する．従って$\mathfrak{B}$の projections 全体で代数的に生成される algebra $\mathfrak{B}_0$は$C(X)$の中の finite-valued な関数全体からなる．他方で$\mathfrak{B}$は infinite dimensional であるから，Xは infinite 従って$C(X)$は infinitely many valued な関数を含み，$\mathfrak{B}$はその中の projections で代数的には生成され得ない．これははじめに注意した事に反する．すなわち，$\mathfrak{A}$は infinite dimensional abelian summand を含み得ない．

次に$\mathfrak{A}$が infinite dimensional abelian summand を含まないと仮定する．

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2 ; \quad \mathfrak{A}_1 \text{ type I}, \quad \mathfrak{A}_2 \text{ continuous}$$

と直和分解しておく．§1で述べた様に$\mathfrak{A}_2$はある von Neumann algebra $\mathfrak{B}$上の2×2 matrix 全体$M_2(\mathfrak{B})$であるから，補題1から$\mathfrak{A}_2$はその projections 全体で代数的に生成される．故に$\mathfrak{A}$は type I と仮定してよい．この時

$$\mathfrak{A} = \sum_n \oplus \mathfrak{B}_n ; \quad \mathfrak{B}_n \text{ } n\text{-homogeneous}$$

と分解しておく．finite dimensional abelian summand はその projections の linear span であるから，$\mathfrak{A}$は最初から abelian summand を含まないとしてよい．さらに，も

l n が infinite cardinal であれば $\mathcal{B}_n$ の中に cardinality n の equivalent orthogonal projections で和が $I_n \in \mathcal{B}_n$, identity のものがとれるからその family を 2つの cardinality n の disjoint family に分けそれぞれの projections の和を作れば

$$\exists E_n, F_n \in \mathcal{B}_n : E_n \perp F_n,\ E_n \sim F_n,\ E_n + F_n = I_n .$$

そこで $\mathcal{A}_0 = \sum \oplus_n \{\mathcal{B}_n : n \text{ infinite}\}$ について $E = \sum E_n$, $F = \sum F_n$ を作れば $\mathcal{A}_0 = (E\mathcal{A}_0 E) \otimes \mathcal{B}(H_2)$, $\dim H_2 = 2$ となって補題1が適用できる．結局

$$\mathcal{A} = \sum \oplus_{n \geq 2} \mathcal{B}_n \ ;\ n \text{ finite}$$

と仮定してよい．

この時，$\mathcal{B} = \sum \oplus \{\mathcal{B}_n : n \text{ even}\}$，$\mathcal{C} = \sum \oplus \{\mathcal{B}_n : n \text{ odd}\}$ とする．n が even の時は，和が I_n の equivalent orthogonal abelian projections $P_1, P_2, \cdots, P_n \in \mathcal{B}_n$ が存在するから，$E_n = P_1 + \cdots + P_{n/2}$，$F_n = P_{n/2+1} + \cdots + P_n$ とすると，$E_n \sim F_n$，$E_n \perp F_n$，$E_n + F_n = I_n$ である．even n について $E = \sum E_n$，$F = \sum F_n$ とおけば，

$$E \perp F,\ E \sim F,\ E + F = I \ (\text{in } \mathcal{B})$$

従って $\mathcal{B} = (E\mathcal{B}E) \otimes \mathcal{B}(H_2)$, $\dim H_2 = 2$ となって再び補題1から $\mathcal{B}$ はその projections 全体で代数的に生成される．

最後に $\mathcal{C}$ がその projections 全体で代数的に生成されること

を示す．$A \in \mathcal{C}$ を任意の self-adjoint operator とする．A が $\mathcal{C}$ の projections の algebraic combination であることを示せば十分である．

$$A = \sum \oplus A_n \in \mathcal{C}, \quad A_n \in \mathcal{B}_n, \quad A_n^* = A_n, \quad (n \text{ odd})$$

とする．各 $\mathcal{B}_n$ (n odd) について補題3を用いると

$$E_k A_n = A_n E_k \ (k = 1, 2, \cdots, n), \quad \sum_{k=1}^{n} E_k = I_n \ (\text{in } \mathcal{B}_n)$$

なる equivalent orthogonal projections $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ (in $\mathcal{B}_n$) が存在する．$n = 2m+1$ に対して

$$P_n = E_1 + \cdots + E_m, \quad Q_n = E_{m+1} + \cdots + E_{2m}, \quad R_n = E_{2m+1}$$

とおき，すべての odd n についての和

$$P = \sum P_n, \quad Q = \sum Q_n, \quad R = \sum R_n \quad (n \text{ odd})$$

を作れば，$P, Q, R \in \mathcal{C}$，$A = AP + AQ + AR$ であって，P, Q は $(P+Q)\mathcal{C}(P+Q)$ において orthogonal, equivalent で

$$AP, AQ \in (P+Q)\mathcal{C}(P+Q)$$

である．更に，$(P+Q)\mathcal{C}(P+Q) = (P\mathcal{C}P) \otimes B(H_2)$, $\dim H_2 = 2$ であるから補題1を用いて，AP, AQ は $\mathcal{C}$ の projections の algebraic combinations である．結局 AR の処理だけが残る．

$$P_n' = E_1, \quad R_n' = E_2 + \cdots + E_m + E_{2m+1}$$

とおけば $A = AP' + AQ + AR'$ であって，

$$Q \perp R', \quad Q \sim R' \quad \text{in} \quad (Q+R')\mathcal{C}(Q+R').$$

$$AR = (Q+R')AR(Q+R') \in (Q+R')\mathcal{C}(Q+R').$$

故に AR についても補題1が適用できる.

上の reduction は有限個の step で完了するから十分性が得られる.

定理1の証明に於ける reduction の各段階で補題1の代りに補題2を用いれば次の定理が得られる.

定理2. von Neumann algebra $\mathfrak{a}$ が index 2 の nilpotent partial isometries 全体で代数的に生成される必要十分条件は $\mathfrak{a}$ が abelian summand を含まないことである.

証明. $\mathfrak{a}$ が abelian summand を含めばその summand は $T^2=0$ なる non-zero operator を含み得ない(補題4). 従って勿論, $\mathfrak{a}$ は index 2 の nilpotent partial isometries では代数的に生成し得ない.

$\mathfrak{a}$ が abelian summand を含まなければ定理1の十分性の証明と全く同じ reduction が可能で, 補題2が直接適用できない場合として残るのは

$$\mathfrak{a} = \sum_{n \geq 2}^{\oplus} \{\mathcal{B}_n : n < \infty, \text{odd}\}$$

である. これについては定理1の証明の最後の段階で補題1を補題2で置き代えればよいことは殆んど明らかである.

定理1, 2の系として次を得る.

系. von Neumann algebra $\mathcal{A}$ が abelian summand を含まないとする. $p(\lambda)$ を次数が $\geqq 2$ の多項式とするとき, $\mathcal{A}$ は

$$\mathcal{S} = \{ I,\ T \in \mathcal{A} \ :\ p(T) = 0 \}$$

で代数的に生成される.

証明. $\mathcal{A}_0$ を $\mathcal{S}$ で代数的に生成された $\mathcal{A}$ の subalgebra とする.

$$p(\lambda) = q(\lambda) r(\lambda), \quad q(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta$$

とおける.

(i) $\alpha^2 - 4\beta = 0$ の時: $T \in \mathcal{A}$ を $T^2 = 0$ なる任意の operator とする. $A = T - \frac{1}{2}\alpha I$ とおけば $q(A) = 0$.

$$\therefore\ p(A) = q(A) r(A) = 0, \quad A \in \mathcal{S}.$$

故に定理2から $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ である.

(ii) $\alpha^2 - 4\beta \neq 0$ の時: $E \in \mathcal{A}$ を任意の projection とする. $A = (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2} E - \frac{1}{2}\{\alpha + (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}\} I$ とおけば,

$$q(A) = 0, \quad \therefore\ p(A) = 0.$$

従って定理1から $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ である.

参考文献

[1] D. Deckard and C. Pearcy, On matrices over the ring of continuous complex valued functions on a Stonean space, Proc. Amer. Math. Soc. 14(1963), 322 - 328.

[2] R. Douglas and D. Topping, Operators whose squares are zero, Rev. Roumaine Math. pure et appl. 12(1967), 645 - 652.

[3] P. Fillmore and D. Topping, Operator algebras generated by projections, Duke Math. J. 34(1967), 333 - 336.

[4] T. Saito, Von Neumann algebras の generators, 第10回実関数論, 第9回関数解析合同シンポジューム講演集録. (1971), 49 - 61