数理解析研究所講究録
第 231 巻 1975 年 36-46

直交群およびユニタリー群上の invariant measure に関するある表現について

広島大 理　小西 貞則

§1. 序

多変量解析においてある種の固有値の分布を求める場合，直交群 $O(P)$ あるいはユニタリー群 $U(P)$ 上の invariant measure に関する定積分を求めることに帰着される。例えば Wishart 分布 nW ; $W_P(n, \Sigma)$ に対して，W の固有値を $L=\mathrm{diag}(l_1, l_2, \cdots, l_p)$ $(l_1 \geq \cdots \geq l_p > 0)$，$\Sigma^{-1}$ の固有値を $A=\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ $(0 < a_1 \leqq \cdots \leqq a_p)$ とするとき，W の固有値の分布は定積分

(1.1) $$\int_{O(P)} \exp\left[-\frac{n}{2} \mathrm{tr} ATLT'\right] (T'dT) \qquad T \in O(P)$$

(ここに $(T'dT)$ は，$O(P)$ 上の invariant measure とする。)

を求めることに帰着される。さらに 2 つの互いに独立な，Wishart 分布 W_i ; $W_P(n_i, \Sigma_i)$ $(i=1,2)$ からなる $W_1 W_2^{-1}$ の固有値の分布は上記対角行列 L，A を各々 $W_1 W_2^{-1}$，$(\Sigma_1 \Sigma_2^{-1})^{-1}$ の固有値とした場合次の定積分を求めることに帰着される。

(1.2) $$\int_{O(P)} \left| I_P + ATLT' \right|^{-(n_1+n_2)/2} (T'dT)$$

また complex Wishart 行列に対する議論は直交行列 T をユニタリー行列 U におきかえて U(P) 上の invariant measure に対して同様に考えることができる。G.A. Anderson [1] は，直交群 O(P) 上の invariant measure に関する積分に対して，漸近展開を与える一つの方法として，固有直交行列 T に対して

(1.3)　　$T = \exp S$　　($S_{(P\times P)}$; 実交代行列)

なる変換を考えている。Anderson は，(1.1) の積分に対して A の対角要素がすべて異なる場合に n^{-1} の項まで計算し，n^{-2} の項の Conjecture を与えている。この変換は A の対角要素が一般の場合にも，また (1.2) の漸近展開を求めるにも有効である。[2], [3], [6]。なお complex case には，(1.3) の変換に対応して次の変換を考えればよい。[6]

(1.4)　　$U = \exp(iH)$　　(H : エルミート行列，$i^2 = -1$)

ここで問題とするのは，(1.3), (1.4) の変換の Jacobian であるが，G.A. Anderson は，(1.3) に対して，ある種の parameter 表示を用いて，S の order にしたがって展開する形でこれを求めている。この方法の基本となるのが，Murnaghan [8] の Group representation の理論であるが，この方法ではひじょうに複雑となり結果に到達するまでにいくつかの段階が必要である。そこでここではこれとまったく異なったより簡単で直接的な方法で，(1.1), (1.2) の漸近展開において n^{-2} までの

項を求めるのに必要な(1.3), (1.4)の変換のJacobianの展開式を求めてゆく。

§2. $T=\exp S$ の変換のJacobianについて

この節では変換(1.3)のJacobianを求めてゆく。直交群O(P)上のinvariant measureに対するdifferential formは,

$$(T'dT)=\prod_{j<k} t_j' dt_k \tag{2.1}$$

によって与えられる。ここに t_j, dt_k は各々 T, dT の j 列, k 列とする。いま(1.3)における実交代行列 S を

$$S=(s_1, s_2, \cdots, s_p) \qquad s_i ; \ P\text{-次元 vector}$$

とおく。このとき S^2, S^3, S^4 の (j,k)-elementは各々

$$S^2=-(s_j' s_k), \quad S^3=-(s_j' \sum_{g=1}^{p} s_g e_g' s_k), \quad S^4=(s_j' \sum_{g=1}^{p} s_g s_g' s_k) \tag{2.2}$$

と表わすことができる。ここに $e_g'=(0,\cdots,0,\overset{g}{1},0\cdots,0)$。

したがって $T=\exp S = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} S^k$ より, t_j および dt_k の第 ℓ 成分は各々,

$$t_{\ell j} = \delta_{\ell j} + e_\ell' s_j - \frac{1}{2!} s_\ell' s_j - \frac{1}{3!} s_\ell' \sum_g s_g e_g' s_j + \frac{1}{4!} s_\ell' \sum_g s_g s_g' s_j + \cdots, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} dt_{\ell k} = {} & e_\ell' ds_k - \frac{1}{2!}(ds_\ell' s_k + s_\ell' ds_k) - \frac{1}{3!}(ds_\ell' \sum_g s_g e_g' s_k + \\ & s_\ell' \sum_g ds_g e_g' s_k + s_\ell' \sum_g s_g e_g' ds_k) + \frac{1}{4!}(ds_\ell' \sum_g s_g s_g' s_k + \\ & s_\ell' \sum_g ds_g s_g' s_k + s_\ell' \sum_g s_g ds_g' s_k + s_\ell' \sum_g s_g s_g' ds_k) + \cdots . \end{aligned} \tag{2.4}$$

と書き表わすことができる。

そこで第 ℓ 成分が(2.3), (2.4)で表わせる P-次元vector t_j, dt_k を

differential form (2.1)へ代入することによって

$$(2.5)\quad \mathcal{I}_1=\prod_{j<k}t_j' dt_k=\prod_{j<k}\Big\{ds_{jk}-\frac{1}{2}(s_k' ds_j-s_j' ds_k) -\frac{1}{6}\Big(\sum_g s_g' s_k ds_{jg}+\sum_g s_j' s_g ds_{gk}+2\sum_{g,h} s_{jh} s_{gk} ds_{hg}\Big)+\cdots\Big\}.$$

をえる。したがってこれからすぐに$\mathcal{I}_1$の展開式の第1項は，$\prod_{j<k} ds_{jk}$ となることがわかる。次に$\mathcal{I}_1$の展開式においてSに関する1次の項は(2.5)から

$-\frac{1}{2}(s_2' ds_1-s_1' ds_2)ds_{13}\cdots ds_{p-1,p}+ds_{12}\{-\frac{1}{2}(s_3' ds_1-s_1' ds_3)\}ds_{14}\cdots ds_{p-1,p}+\cdots+ ds_{12}ds_{13}\cdots\{-\frac{1}{2}(s_k' ds_j-s_j' ds_k)\}\cdots ds_{p-1,p}+\cdots$，を計算することによってえられる。いまここでSは実交代行列であることと，$ds_{jk}ds_{jk}=0$ $(j<k;\ j,k=1,\cdots,P)$ なることを使えば，上式は0となることがわかる。それゆえSに関する1次の項は0である。

次に$\mathcal{I}_1$の展開式においてSに関する2次の項を計算しよう。それは(2.5)からわかるように

$$(2.6)\quad ds_{12}ds_{13}\cdots\Big\{-\frac{1}{2}(s_k' ds_j-s_j' ds_k)\Big\}\cdots\Big\{-\frac{1}{2}(s_m' ds_l-s_l' ds_m)\Big\}\cdots ds_{p-1,p}$$

ここに$j<k$，$l<m$，$j\leqq l$ また $j=l$ ならば $k<m$ とする。

$$(2.7)\quad ds_{12}ds_{13}\cdots\Big\{-\frac{1}{6}\Big(\sum_g s_g' s_k ds_{jg}+\sum_g s_j' s_g ds_{gk}+2\sum_{g,h} s_{jh}s_{gk}ds_{hg}\Big)\Big\}\cdots ds_{p-1,p}\quad,\quad 1\leqq j<k\leqq P$$

を計算することによってえられる。differential の積に関しては $ds_{jk}ds_{lm}=-ds_{lm}ds_{jk}$，特に$ds_{jk}ds_{jk}=0$ であるからいま

$$(2.8)\quad \Big\{-\frac{1}{2}(s_k' ds_j-s_j' ds_k)\Big\}\Big\{-\frac{1}{2}(s_m' ds_l-s_l' ds_m)\Big\}$$

$$= \frac{1}{4}\Big\{\sum_{g,h} s_{gk} s_{hm}\, ds_{gj}\, ds_{hl} - s_{gj} s_{hm}\, ds_{gk}\, ds_{hl} - s_{gk} s_{hl}\, ds_{gj}\, ds_{hm} + s_{gj} s_{hl}\, ds_{gk}\, ds_{hm})\Big\}$$

において $f_1(S)\, ds_{jk}\, ds_{lm}$ の項のみ考えればよいことがわかる。さらに(2.7)式においては $f_2(S)\, ds_{jk}$ の項のみ考えればよい。ここに $f_1(S)$, $f_2(S)$ は S の element に関して2次の同時多項式である。まず(2.8)において $j=l$ の場合を考える。このとき(2.8)の右辺の第1項のみ

(2.9) $\quad s_{km}^2\, ds_{jk}\, ds_{jm} + \sum_{g\neq m,\, h\neq k} s_{gk} s_{hm}\, ds_{gj}\, ds_{hj}$

の形に表わすことができる。それは S が実交代行列であることからわかる。同様に $k=l$ のときには(2.8)の第2項のみ、また $k=m$ のときには(2.8)の第4項のみ各々

(2.10) $\quad s_{jm}^2\, ds_{jk}\, ds_{km} - \sum_{g\neq m,\, h\neq j} s_{gj} s_{hm}\, ds_{gk}\, ds_{hk}$

(2.11) $\quad s_{jl}^2\, ds_{jk}\, ds_{lk} + \sum_{g\neq l,\, h\neq j} s_{gj} s_{hl}\, ds_{gk}\, ds_{hk}$

と表わすことができる。したがって(2.9)(2.10)(2.11)より

(2.12) $\quad \dfrac{(p-2)}{4} \sum_{j<k} s_{jk}^2 \ \Big(\prod_{j<k} ds_{jk}\Big)$

をえる。さらに $\operatorname{tr} S^2 = -2\sum_{j<k} s_{jk}^2$ であるから(2.12)は,

(2.13) $\quad -\dfrac{p-2}{8} \operatorname{tr} S^2 \prod_{j<k} ds_{jk}$

とかくことができる。最後に(2.7)における $f_2(S)\, ds_{jk}$ の項を計算しよう。(2.7)をかきなおすと

(2.14) $\quad (s_k' s_k + s_j' s_j - 2 s_{jk}^2)\, ds_{jk} + \sum_{g\neq k} s_g' s_k\, ds_{jg} + \sum_{g\neq j} s_j' s_g\, ds_{gk} + 2\sum_{g\neq j,\, h\neq k} s_{jh} s_{gk}\, ds_{hg}\,.$

また $trS^2 = -\sum_{j} s_j' s_j$ であるから (2.14) から、$\mathcal{J}_1$ を展開すると次の式をえる。

(2.15) $-\frac{1}{6}\{\sum_{j<k}(s_k' s_k + s_j' s_j) - 2\sum_{j<k} s_{jk}^2\}\prod_{j<k} ds_{jk} = \frac{1}{6}(p-2)\, trS^2 \prod_{j<k} ds_{jk}$

したがって (2.13), (2.15) より $\mathcal{J}_1$ の展開式における S に関する2次の項は、

(2.16) $$\frac{p-2}{24}\, trS^2 \prod_{j<k} ds_{jk}$$

となることがわかる。同様な方法によって $\mathcal{J}_1$ の展開式においてSに関する3次の項を計算すると0となることがわかる。したがって次の定理をえる。

定理 1.

任意の p×p 固有直交行列T は

$$T = \exp S \qquad S\text{; p×p 実交代行列}$$

と表わすことができる。このときこの変換によって固有直交群上の invariant measure $(T'dT)$ は

(2.17) $$(T'dT) = \left(1 + \frac{p-2}{24}\, trS^2 + \cdots\right)\prod_{j<k} ds_{jk}$$

と表わすことができる。

§3. $U = \exp(iH)$ の変換の Jacobian について

この第3節では§2と同様な方法を用いて変換(1.4)の Jacobian について考えてゆく。いま $U^* dU = \Omega = (\omega_{jk})$ とおく。ここに $U^* = \overline{U}'$ とする。このときユニタリー群 $U(p)$ 上の

invariant measureに対する differential formは

(3.1) $$i^{-p}\prod_j w_{jj}\left(\frac{i}{2}\right)^{\frac{1}{2}p(p-1)}\prod_{j<k} w_{jk}\overline{w_{jk}}$$

と表わすことができる。ここで $U=[u_1, u_2, \cdots, u_p]$ (u_j : p次元 vector) とすると $w_{jk}=\overline{u}_j' du_k = u_{jR}' du_{kR} + u_{jI}' du_{kI} + i(u_{jR}' du_{kI} - u_{jI}' du_{kR})$ とかける。ここに $u_j = u_{jR} + i u_{jI}$, $du_k = du_{kR} + i du_{kI}$ とする。指数関数の定義より $U=\exp(iH)=I + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(iH)^k$ であるから§2と同様にエルミート行列 $H=(h_{jk})=(h_1, h_2, \cdots, h_p)$ とおくと, u_j, du_k の第 g 成分は

(3.2) $$u_{gj}=\delta_{gj}+ih_{gj}-\frac{1}{2!}\overline{h}_g' h_j-\frac{1}{3!}i\sum_g \overline{h}_g' h_g e_g' h_j+\cdots,$$

(3.3) $$du_{gk}=i\,dh_{gj}-\frac{1}{2!}(d\overline{h}_g' h_k+\overline{h}_g' dh_k)$$
$$-\frac{1}{3!}i\left(\sum_g d\overline{h}_g' h_g e_g' h_k+\sum_g \overline{h}_g' dh_g e_g' h_k+\sum_g \overline{h}_g' h_g e_g' dh_k\right)+\cdots.$$

したがって Ω の (j,k)-element は

(3.4) $$w_{jk}=\overline{u}_j' du_k=-dh_{jkI}+i\,dh_{jkR}-\frac{1}{2}(d\overline{h}_j' h_k-\overline{h}_j' dh_k)$$
$$-\frac{i}{6}\left(\sum_g \overline{h}_g' h_k dh_{jg}+\sum_g \overline{h}_j' h_g dh_{gk}-2\sum_{g,l} h_{jl} h_{gk} dh_{lg}\right)+\cdots$$

となる。ここで $w_{jk}=w_{jkR}+iw_{jkI}$ とおくと $w_{jk}\overline{w_{jk}}=2i\times w_{jkI}w_{jkR}$, $w_{jj}=iw_{jjI}$ であるから (3.4) の w_{jk} を, real part と imaginary part に分割する。すなわち

(3.5) $$w_{jk}=-dh_{jkI}-\frac{1}{2}f_{jkI}(H)+\cdots+i\{dh_{jkR}-\frac{1}{2}f_{jkR}(H)+\cdots\}$$

ここに $$f_{jkI}(H)=h_{kR}' dh_{jR}+h_{kI}' dh_{jI}-h_{jR}' dh_{kR}-h_{jI}' dh_{kI}$$
$$f_{jkR}(H)=h_{kI}' dh_{jR}-h_{kR}' dh_{jI}-h_{jR}' dh_{kI}+h_{jI}' dh_{kR}\quad (j<k)$$

(3.6) $$w_{jj}=i(dh_{jjR}-f_{jjR}(H)+\cdots)$$

ここに　$f_{jjR}(H)=h'_{jI}\,dh_{jR}-h'_{jR}\,dh_{jI}$

この2式を(3.1)に代入して

$$(3.7)\quad \mathcal{J}_2=\prod_j\{dh_{jjR}-f_{jjR}(H)+\cdots\}\prod_{j<k}\{dh_{jkR}-\tfrac{1}{2}f_{jkR}(H)+\cdots\}$$
$$\times\{-dh_{jkI}-\tfrac{1}{2}f_{jkI}(H)+\cdots\}$$

をえる。これからすぐに $\mathcal{J}_2$ の展開式における第1項は，$\prod_j dh_{jjR}\prod_{j<k}dh_{jkR}\,dh_{jkI}$ となることがわかる。次に $\mathcal{J}_2$ の展開式においてHに関する1次の項について考える。これは $f_{jkR}(H)$ において dh_{jkR} の，$f_{jkI}(H)$ において dh_{jkI} の，さらに $f_{jjR}(H)$ において dh_{jjR} の係数についてのみ考えればよい。しかしHはエルミート行列であることからこれらの係数はすべて0となり，したがって $\mathcal{J}_2$ の展開式におけるHに関する1次の項は0である。この場合§2と同様に $j<k$ の時(3.4)式右辺の第4項において，imaginary part から dh_{jkR} の係数をさらに real part から $-dh_{jkI}$ の係数のみを考えればよいことがわかる。したがって(3.4)式右辺第4項を dh_{jkR}，dh_{jkI} そして残りの項に分割してやると

$$(3.8)\quad -\tfrac{1}{6}\{(\bar{h}'_j h_j+\bar{h}'_k h_k+2h_{jkR}^2-2h_{jkI}^2-2h_{jjR}h_{kkR})(-dh_{jkI})$$
$$+4h_{jkR}h_{jkI}\,dh_{jkR}\}+i\{(\bar{h}'_j h_j+\bar{h}'_k h_k-2h_{jkR}^2+2h_{jkI}^2$$
$$-2h_{jjR}h_{kkR})\,dh_{jkR}-4h_{jkR}h_{jkI}\,dh_{jkI}\}+\text{order terms}$$

をえる。それゆえ $\mathcal{J}_2$ を展開すると上式より

$$(3.9)\quad -\tfrac{1}{3}\{\sum_{j<k}(\bar{h}'_j h_j+\bar{h}'_k h_k)-2\sum_{j<k}h_{jjR}h_{kkR}\}\prod_j dh_{jjR}\prod_{j<k}dh_{jkR}\,dh_{jkI}.$$

をえる。$j=k$の場合(3.4)式右辺第4項において$j=k$とすると

(3.10) $-\frac{i}{6}\left(\sum_{g}\bar{h}_g'h_j\,dh_{jg}+\sum_{g}\bar{h}_j'h_g\,dh_{gj}-2\sum_{g,l}h_{jl}h_{gj}\,dh_{lg}\right)$

となるから上式のimaginary partにおけるdh_{jjR}の係数のみ考えればよい。したがって先と同様にして

(3.11) $-\frac{1}{3}\sum_{j}\left(\bar{h}_j'h_j-h_{jjR}^2\right)\prod_{j}dh_{jjR}\prod_{j<k}dh_{jkR}\,dh_{jkI}$

をえる。さらに(3.5),(3.6)によって示される$w_{jk}\,(j<k)$, w_{jj}の展開式におけるHに関してorder 1の任意の2項の積を求める必要がある。これらを§2と同様な方法で計算してゆくと次のような結果をえる。

(3.12) $\left\{\frac{1}{4}(p-1)\sum_{j}h_{jjR}^2-\frac{1}{2}\sum_{j<k}h_{jjR}h_{kkR}+\frac{p}{2}\left(\sum_{j<k}h_{jkR}^2+\sum_{j<k}h_{jkI}^2\right)\right\}$
$\times\prod_{j}dh_{jjR}\prod_{j<k}dh_{jkR}\,dh_{jkI}$

したがって(3.9),(3.11)(3.12)より$\mathcal{J}_2$の展開式におけるHに関する2次の項は,

(3.13) $\left[-\frac{1}{3}\left\{\sum_{j<k}\left(\bar{h}_j'h_j+\bar{h}_k'h_k\right)+\sum_{j}\bar{h}_j'h_j\right\}+\frac{p}{2}\sum_{j<k}\left(h_{jkR}^2+h_{jkI}^2\right)\right.$
$\left.+\frac{1}{6}\sum_{j<k}h_{jjR}h_{kkR}+\frac{3p+1}{12}\sum_{j}h_{jjR}^2\right]\prod_{j}dh_{jjR}\prod_{j<k}dh_{jkR}\,dh_{jkI}$

であることがわかる。さらにこれを$(\mathrm{tr}\,H)^2=2\sum_{j<k}h_{jjR}h_{kkR}+\sum_{j}h_{jjR}^2$, $\mathrm{tr}\,H^2=\sum_{j}\bar{h}_j'h_j=2\sum_{j<k}\left(h_{jkR}^2+h_{jkI}^2\right)+\sum_{j}h_{jjR}^2$を用いて書きなおすと

(3.14) $-\frac{p}{12}\mathrm{tr}\,H^2+\frac{1}{12}(\mathrm{tr}\,H)^2$

をえる。したがってこれから次の定理をえる。

定理 2. 任意の $p \times p$ ユニタリー行列 U は

$$U = \exp(iH) \quad H; \ p \times p \text{ エルミート行列}$$

と表わすことができる。このときこの変換によってユニタリー群上の invariant measure $(U^* dU)$ は

$$(3.15) \quad (U^* dU) = \left\{1 - \frac{p}{12} \operatorname{tr} H^2 + \frac{1}{12} (\operatorname{tr} H)^2 + \cdots \right\} \prod_j dh_{jjR} \prod_{j<k} dh_{jkR} \, dh_{jkI}$$

と表わすことができる。

References

[1] Anderson, G.A.(1965). An asymptotic expansion for the distribution of the latent roots of the estimated covariance matrix. Ann. Math. Statist. 36, 1153-1173.

[2] Chang, T.C.(1970). On an asymptotic representation of the distribution of the characteristic roots of $S_1 S_2^{-1}$. Ann.Math.Statist. 41, 440-445.

[3] Chattopadhyay, A.K.and Pillai, K.C.S.(1970). Asymptotic expansions for the distributions of characteristic roots when the parameter matrix has several multiple roots. Multivariate Analysis, 3. (P.R.Krishnaiah, ed.). Academic Press, New York.

[4] James, A.T.(1954). Normal multivariate analysis and the orthogonal group. Ann. Math. Statist. 25, 40-75.

[5] James, A.T.(1969). Tests of equality of latent roots of the covariance matrix. Multivariate Analysis, 2. (P.R.Krishnaiah,ed.). Academic Press, New York.

[6] Li, H.C., Pillai, K.C.S. and Chang, T.C. (1970). Asymptotic expansions of the distributions of the roots of two matrices from classical and complex Gaussian populations. Ann. Math. Statist. 41, 1541-1556.

[7] Littlewood, D.E.(1940). The Theory of Group Characters, (2nd ed.). Oxford, 1958.

[8] Murnaghan, F.D. (1938). The Theory of Group Representations. The Johns Hopkins Press, Baltimore.