数理解析研究所講究録
第232巻 1975年 1-14

Weak-*Dirichlet algebras の maximality について

北大 応電研　　中路 貴彦

A を $L^{\infty}(m)$ の weak-*Dirichlet algebra とする。$H^{\infty}(m)$ を含む $L^{\infty}(m)$ の subalgebra の形を決定する。Muhly は特別な場合に、$H^{\infty}(m)$ が $L^{\infty}(m)$ の maximal な weak-*閉 subalgebra であること、すなわち $H^{\infty}(m)$ を含む $L^{\infty}(m)$ の subalgebra は $H^{\infty}(m)$ と $L^{\infty}(m)$ のみであることを示した。更に、torus 上のある weak-* Dirichlet algebra $H^{\infty}(d\theta d\varphi)$ を不変部分空間によって特長づける。Merrill は circle 上の古典的な $H^{\infty}(d\theta)$ を、不変部分空間によって特長づけた。

§1. 準備

A が weak-*Dirichlet algebra であるとは、(i) A が確率測度空間 $(X, \mathfrak{M}, m)$ の上の $L^{\infty}(m)$ の subalgebra である、(ii) $A+\bar{A}$ は $L^{\infty}(m)$ で weak-* 稠密である、(iii) m は A 上

multiplicative である、ことである。
抽象的な Hardy 空間 H^p $(1 \leq p \leq \infty)$ とは、$1 \leq p < \infty$ のときは H^p は A の $L^p(m)$－閉包でありかつ H^∞ は A の $L^\infty(m)$ における weak－*閉包である。$H^p_0 = \{ f \in H^p : \int f\,dm = 0 \}$ とする。M を $L^\infty(m)$ の部分集合とするとき、$[M]_2$ は M の $L^2(m)$－閉包である。X 上の可測集合 E に対して、χ_E はその特性関数である。$f \in L^p(m)$ に対して、χ_f は f の support set E_f の特性関数である。

(a) M は $L^\infty(m)$ の weak－*閉な不変部分空間とするとき、$M = [M]_2 \cap L^\infty(m)$ 。

§2. Torus 上の $H^\infty(d\theta d\varphi)$ の特長づけ

A を torus $T^2 = \{(z, w) : |z| = |w| = 1\}$ 上で $z^n w^m$ (n、m は整数で $(n, m) \in \Gamma$) の多項式で一様近似される連続関数の全体とする。ここで、$\Gamma = \{(n, m) : m > 0\} \cup \{(n, 0) : n \geq 0\}$。$d\theta d\varphi / 4\pi^2$ を T^2 上の正規 Haar 測度とし、$d\theta d\varphi$ と書くことにする。このとき、A は $L^\infty(d\theta d\varphi)$ における weak－*Dirichlet algebra となる。H^p を $H^p(d\theta d\varphi)$ と書くことにする。

Aを一般的に weak-* Dirichlet algebra とする。そして、mをA上の multiplicative な関数と考えたときの Gleason part はmのみではないとする。このとき、H^∞のある inner 関数Zを用いて$H_0^\infty = ZH^\infty$とできる。

(b) 次の(1)〜(4)は同値である。

(1) H^∞は古典的な circle 上の$H^\infty(d\theta)$に等距離同型である。

(2) H^∞はL^∞におけるZの多項式の weak-*閉包の全体である。

(3) MはH^∞の任意の weak-*閉不変部分空間で、$M \neq \{0\}$とする。このとき、Mのある inner 関数Fを用いて、$M = FH^\infty$と書ける。

(4) H^∞はL^∞の maximal な weak-*閉 subalgebra である。

(1)と(2)の同値性は下の(d)による。Merrill[3]は(2)、(3)、(4)が同値であることを示した。

この節では、circle 上の$H^\infty(d\theta)$の特長づけに対応して、torus 上の$H^\infty(d\theta d\varphi)$の特長づけをする。

$J^\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bar{Z}^n H^\infty$の weak-*閉包、$I^\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} Z^n H_0^\infty$とする。

$\boxed{\text{定理1}}$　(1)　J^∞ は H^∞ を本当に含む最小の *weak*-* 閉 *subalgebra* である。

(2)　I^∞ は H^∞ における J^∞ の最大の *weak*-* 閉イデアルである。

$\mathcal{H}^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ は Z の多項式の $L^p(m)$ における閉包とする（$p=\infty$ のときは *weak*-* 閉包）。$\mathcal{L}^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ は Z と $\bar{Z}$ の多項式の $L^p(m)$ における閉包する。I^p は $L^p(m)$ における I^∞ の閉包で、$\mathcal{I}^p$ は $L^p(m)$ における $I^p + \bar{I}^p$ の閉包とする。J^p は J^∞ の $L^p(m)$ における閉包とする。

次の事が知られている〔4. *Lemma* 5〕。

(c)　$H^p = \mathcal{H}^p + I^p$　、　$L^p = \mathcal{L}^p + \mathcal{I}^p$　、

　　$J^p = \mathcal{L}^p + I^p$　、　$L^2 = J^2 + I^2$　。

ここで、＋は代数的な直和であり、$p = 2$ のときは直交分解である。

次は *Lummer* の等距離〔2〕である。

(d)　$1 \leq p \leq \infty$ で、*circle* 上の $L^p(d\theta)$ と $\mathcal{L}^p$（*circle* 上の $H^p(d\theta)$ に対しては $\mathcal{H}^p$）とが、等距離 * － 同型となる。

ここで*－同型とは、複素共役は複素共役に写っていることである。

この節における主定理を証明するために、上の2つの事実に対応するものとして（e）と（f）を述べる。証明は上の（c）と（d）にほとんど同じである。gをI^∞の定数ではない inner 関数とする。$\mathbb{H}^p$（$1 \le p \le \infty$）は$L^p(m)$での$z^n g^m$（$(n, m) \in \Gamma$）の多項式の$L^p(m)$－閉包とする。このとき、$zI^p = I^p$から、$\mathbb{H}^p$はH^pの部分空間でありかつ$\mathbb{H}^\infty$はH^∞の subalgebra である。$\mathbb{L}^p$（$1 \le p \le \infty$）は$L^p(m)$でのz、$\bar{z}$、g、$\bar{g}$の多項式の閉包とする。

$$S^p = \left\{ f \in H^p : \int z^n g^m f \, dm = 0, \ (n, m) \in \Gamma \right\}$$

とする。$\mathcal{S}^p$は$S^p + \bar{S}^p$の$L^p(m)$における閉包である。

（e）　$1 \le p \le \infty$とする。このとき、torus 上の$L^p(d\theta d\varphi)$と$\mathbb{L}^p$（torus 上の$H^p(d\theta d\varphi)$に対しては$\mathbb{H}^p$）とが、等距離に*－同型となる。

（f）　$1 \le p \le \infty$ とする。このとき、

$$H^p = \mathbb{H}^p + S^p, \quad L^p = \mathbb{L}^p + \mathcal{S}^p.$$

ここで、やはり$p = 2$のときは直交分解である。

$\boxed{\text{補題}}$ $I^\infty = gJ^\infty$ とする。このとき、この *inner* 関数に対して定義されるS^∞はJ^∞-不変部分空間となり、$gS^\infty = S^\infty$ である。

今は、(*b*) に対応して、次の定理を証明できる。

$\boxed{\text{定理2}}$ H^∞の次の性質は同値である。

(1) H^∞ は *torus* 上の$H^\infty(d\theta d\varphi)$に等距離同型である。

(2) H^∞ はL^∞ における$z^n g^m$ ($(n, m) \in \Gamma$) の多項式の *weak*-* 閉包の全体となる。ここで、gはH^∞ の *inner* 関数である。

(3) J^∞ は *doubly* - 不変部分空間を含まない。MをH^∞の *weak*-* 閉なJ^∞-不変部分空間で$M \neq \{0\}$ とする。このとき、*unimodular* 関数 F とある$\chi_E \in J^\infty$ が存在して、

$$M = \chi_E F J^\infty$$

とかける。

<u>証明</u> (1) ⇔ (2) は (*e*) である。(2) ⇒ (3) は〔4、p 473〕にある。(3) ⇒ (2) を示す。仮定からある$\chi_E \in J^\infty$と *unimodular* 関数があって、$I^\infty = \chi_E F J^\infty$ とできる。もし、$m(E) < 1$ なら、(*c*) からJ^∞ は *doubly* - 不変部分空間を含んでしまう。よって$I^\infty = FJ^\infty$ とできる。補題のgと

してこのFをとると、S^∞はH^∞のJ^∞-不変部分空間となりかつ仮定から$FS^\infty=S^\infty$とできる。もし$S^\infty\neq\{0\}$なら、仮定より、ある*inner*関数Gとある$\chi_F\in J^\infty$があり、

$$S^\infty = \chi_F G J^\infty.$$

$\chi_F G\in\chi_F G J^\infty$と$\bar{F}S^\infty=S^\infty$より、$\chi_F G\bar{F}\in\chi_F G J^\infty$。よって$\chi_F\bar{F}=\chi_F g$となる$g\in J^\infty$がある。だから、$\chi_F=\chi_F F g$。$F\in I^\infty$から$Fg\in I^\infty$よって$\chi_F\in I^\infty$となる。特性関数に関しては$\chi_F\in\mathcal{L}^\infty$と$\chi_F\in J^\infty$は同値だから、$\chi_F\in\mathcal{L}^\infty$である。$\chi_F\in I^\infty\cap\mathcal{L}^\infty$から、$\chi_F=0$ *a.e.* となり、$S^\infty\neq\{0\}$に反する。よって$S^\infty=\{0\}$となり、(f)により$H^\infty=\mathbb{H}^\infty$となる。これは(2)である。

(b)の(4)に対応するH^∞の性質は何であり、その性質は定理2の(1)と同値となるかを考えるのは自然である。これは次の節にゆずる。

§3. H^∞を含む *subalgebra*

Aは$L^\infty(m)$の *weak-* Dirichlet algebra* とする。特に断わらない限りは、mを含む *Gleason part* はmのみであってもかまわない。

Muhly [5] は、$\forall f \in H^\infty$ なら $|f| > 0$ a.e. であることと H^∞ が $L^\infty(m)$ の maximal な weak-*閉 subalgebra であることが同値であることを示した。しかし、一般的には、H^∞ の恒等的に零ではない関数で、正測度の集合上で零である関数が存在する。よって H^∞ と $L^\infty(m)$ との間に、weak-*閉な subalgebra が存在する。そんな subalgebra がどんな形をしているか、そして H^∞ の関数の support set とどのような関係にあるかを知りたい。

$\boxed{\text{定理3}}$　V は H^∞ を含む $L^\infty(m)$ の weak-*閉な subalgebra とする。そのとき、次の事は同値である。

（1）　すべての $f \in V$ に対して、$\chi_f \in V$。

（2）　すべての $f \in H^\infty$ に対して、$\chi_f \in V$。

（3）　B が L^∞ の V を含む weak-*閉 subalgebra ならば、ある $\chi_E \in V$ があって、次の形をしている。

$$B = \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty \quad 。$$

このとき、$\chi_E V$ は doubly-不変部分空間を含まない。

$\boxed{\text{系}}$　（Muhly [5]）　H^∞ についての次の性質は同値である。

（1）　すべての $f \in H^\infty$ に対して、$|f| > 0$ a.e. 。

（2）H^∞ は L^∞ の *maximal* な *weak*－∗閉 *subalgebra* である。

<u>定理3の証明</u>　（1）⇒（2）は明らか。（2）⇒（3）。
K を L^2 での B の直交補空間とする。$K \neq \{0\}$ としてよい。

E を K の *support set* とすると、$\chi_E \in V$ となる。何故なら、$H^\infty \subseteq B$ から、$K \subset \overline{H}^2_0$ [6, p226]。$f \in H^2$ なら、H^∞ に関数 g があり、$\chi_f = \chi_g$ とできる[5]。よって $\forall f, g \in K$ ならば、$F = E_f \setminus E_g$ とすると、$\chi_F \in V$ である。$\chi_F B \subseteq B$ だから、$\chi_F K \subseteq K$ である。よって $h = g + \chi_F f$ は K に属する。これは、$\forall f, g \in K$ なら、関数 $h \in K$ で $E_h = E_f \cup E_g$ となるものがあることを示している。$F_\alpha \subseteq E$ かつ $\chi_{F_\alpha} \in V$ となる集合に対して、$F_0 = \bigcup F_\alpha$ とすると、$\chi_{F_0} \in V$ かつ $F_0 \subseteq E$。$m(F_0) = m(E)$ を導くことができる。

$\chi_{E^c} K = \{0\}$ から、$B \supseteq \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty$ となる。E は K の *support set* であり、K は B の直交補空間であるから、$\chi_E V$ は *doubly*－不変部分空間を含まない。

今は、$B = \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty$ となることを示す。$B \neq \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty$ とする。そのとき、*Muhly* [5] のようにして、定数でない *unimodular* 関数 g で、g、$\bar{g} \in B$ だが $\bar{g} \notin \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty$ となるものがある。このとき、$\chi_E \bar{g} \notin \chi_E V$ となっている。

Nをg、$\bar{g}$とVに属するすべての特性関数χ_Fの多項式のweak-*閉包とする。そのとき、NはL^2上の作用素の作るalgebraとして可換なvon Neuman algebraとなりBに含まれる。$\chi_E \bar{g} \notin V$によりVは$\chi_E N$の全体を含むことはできない。これを用いて、Nの中にχ_{E_0}があり、$\chi_{E_0 \cap E} \neq 0$ a.e. かつ$^\forall \chi_F \in V$かつ$\chi_F \neq 0$ a.e. のとき、

$$\chi_{E_0 \cap E} \cdot \chi_F \neq \chi_F$$

とできることを示すことができる。$\chi_{E_0 \cap E} \in B$から$\chi_{E_0 \cap E} K \subseteq K$である。もし$\chi_{E_0 \cap E} K \neq \{0\}$なら、$\chi_{E_0 \cap E} \cdot \chi_{F_0} = \chi_{F_0}$となる零でない$\chi_{F_0} \in V$があることを示すことができる。この矛盾により、$\chi_{E_0 \cap E} K = \{0\}$でなければならない。$m(E_0 \cap E) > 0$だからEがKのsupport setであることに反する。かくして、$B = \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty$となる。

(3)⇒(1)。fをVの任意の関数とする。$\chi_f \neq 0$ a.e. としてよい。$D = D(f) = \{ f \cdot g : g \in V \}$のweak-*閉包とすると、$D \subseteq V$でDのsupport setは$E_f$と一致する。

$$B = \{ v \in L^\infty : vD \subset D \}$$

とすると、BはVを含む。(3)の条件より、$\chi_f \in V$を導びくことができる。

もし、mを含むGleason partがmのみではないとすると、

VとしてJ^∞を考えることができる。J^∞は定理1よりH^∞を含む最小の weak−*閉 subalgebra であった。
§2の終りで触れた(b)の(4)に対応するH^∞の性質として定理3の(2)を考えるのは自然である。しかし、次の定理4と§4の例(2)は、その条件が torus 上の$H^\infty(d\theta d\varphi)$の特長づけとはならないことを示している。

$\boxed{\text{定理4}}$ H^∞についての次の性質は同値である。

(1) すべての$f \in H^\infty$に対して、$\chi_f \in J^\infty$。

(2) BがL^∞のH^∞を含む weak−*閉 subalgebra ならば、ある$\chi_E \in J^\infty$があって、次の形をしている。

$$B = \chi_E J^\infty + \chi_{E^c} L^\infty .$$

このとき、$\chi_E J^\infty$は doubly−不変部分空間を含まない。

$\boxed{\text{系}}$ もしすべての$f \in H^\infty$に対して、$\chi_f \in J^\infty$となっているなら、H^∞を含むL^∞のL^∞と一致しない weak−*閉 subalgebra で、maximal なものはない。

§4. 例

（1）　Aを§2の初めに定義した、torus 上の weak-* Dirichlet algebra とする。このとき、$d\theta d\varphi$ を含む Gleason part は $d\theta d\varphi$ のみではない。この $H^\infty(d\theta d\varphi)$ は Merrill [3] が maximal でない weak-*閉 subalgebra の例として述べたものである。しかし、すべての $f \in H^\infty(d\theta d\varphi)$ に対して、$\chi_f \in J^\infty$ を示すことができるから、定理4によって $H^\infty(d\theta d\varphi)$ を含む $L^\infty(d\theta d\varphi)$ の weak-*閉な subalgebra の形がわかる。更に、[1, p303] によりAを含む torus 上の複素数値連続関数の全体 $C(T^2)$ の一様に閉な maximal subalgebra が存在するが、定理4の系により $H^\infty(d\theta d\varphi)$ を含む $L^\infty(d\theta d\varphi)$ の weak-*閉 subalgebra の中に maximal なものはない。

（2）　Kを実数直線の Bohr コンパクト化とする。Aを $T \times K$ 上で $z^n \chi_\tau$ の多項式で一様近似される連続関数の全体とする。このとき、χ_τ はK上の character で、$(n, \tau) \in \Gamma$、$\Gamma = \{(n, \tau) : \tau > 0\} \cup \{(n, 0) : n \geq 0\}$ であるとする。mを $T \times K$ 上の正規 Haar 測度とする。このとき、mの Gleason part はmのみではない。すべての $f \in H^\infty$ に対して、$\chi_f \in J^\infty$ を示すことができる。しかし、H^∞ は torus 上の $H^\infty(d\theta d\varphi)$ に等距離同型ではない。

(3)　Kを(2)と同じとする。AをK×K上で$\chi_{\tau_1}\chi_{\tau_2}$の多項式で一様近似される連続関数の全体とする。このとき、χ_{τ_i}はK上の character で、$(\tau_1, \tau_2) \in \Gamma$ で、$\Gamma = \{(\tau_1, \tau_2) : \tau_2 > 0\} \cup \{(\tau_1, 0) : \tau_1 \geq 0\}$ であるとする。mをK×K上の正規 Haar 測度とする。このとき、mの Gleason part はmのみである。

$V = \bigcup_{\tau_1 \geq 0} \bar{\chi}_{\tau_1} H^\infty$ の weak－*閉包

とすると、$H^\infty \subsetneq V \subsetneq L^\infty_{(m)}$ かつVは subalgebra である。よってH^∞は$L^\infty_{(m)}$の maximal weak－*閉 subalgebra ではない。しかしすべての$f \in H^\infty$に対して、$\chi_f \in V$となっているから、定理3を用いて、Vを含むすべての weak－*閉な subalgebra の形がわかる。

文　献

1.　K. Hoffman, Maximal subalgebras of $C(\Gamma)$, Amer. J. Math., 79(1957), 295-305.

2.　G. Lumer, H^∞ and the imbedding of the classical H^p spaces in arbitrary ones, Proc. Internat. Sympos. on Function Algebras (Tulane Univ., 1965), Scott-Foresman, Chicago, III., 1966, 285-286.

3. S. Merrill, Maximality of Certain Algebras $H^{\infty}(dm)$, Math. Zeit., 106(1968), 261-266.

4. S. Merrill and N. Lal, Characterization of certain invariant subspaces of H^{p} and L^{p} spaces derived from logmodular algebras, Pacific J. Math., 30(1969), 463-474.

5. P. S. Muhly, Maximal weak-*Dirichlet algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 36(1972), 515-518.

6. T.P. Srinivasan and Ju-kwei Wang, Weak*-Dirichlet algebras, Proc. Internat. Sympos. on Function Algebras. (Tulane Univ., 1965), Scott-Foresman, Chicago, III., 1966, 216-249.