数理解析研究所講究録
第 232 巻 1975 年 65-79

$H^\infty(D)$ の二，三の話題

和歌山大 教育　貴志 一男

§0. 序.

次の(1)〜(3)について述べる.

(1) Lindelöf の定理. 関数 $f \in H^\infty(D)$ の境界関数を $f^*(e^{i\theta})$ とする. もし $\theta \to 0^+$ (または 0^-) のとき $\operatorname{ess\,lim} f^*(e^{i\theta}) = 0$ ならば頂点を 1 とする任意の Stolz 角領域 A に対して $\lim_{\substack{z \in A \\ z \to 1}} f(z) = 0$ となる. この定理の uniform algebra 的解釈について ([6]).

(2) 単位開円板 D の境界点 1 に近づく D の部分集合からなるフィルター Γ (例えば点 1 に nontangential に近づくことに対応するフィルター Γ_A) にそっての $H^\infty(D)$ の関数の極限について ([2]).

(3) $H^\infty(D)$ の極大イデアル空間の点 1 上の fiber 中にある Gleason part に関係ある話について.

§1. Harmonic measure.

D上で有界な正則関数の全体からなるBanach algebraを$H^\infty(D)=H^\infty$で表わし，H^∞の極大イデアル空間$\mathcal{M}(H^\infty)$を$\bar{D}$で表わす．Dは$\bar{D}$で稠密である．D上の連続関数fが$\bar{D}$上の連続関数に拡張できるとき，この拡張した関数を$\hat{f}$で表わす．uをD上の調和関数で上方(または下方)に有界であるとし，vをuの共役調和関数とすると，$f=\exp(u+iv)$（または$1/f$）がH^∞に属する．この事からuは$\bar{D}$の実数値連続関数$\hat{u}$に拡張出来る．

集合$A(\subset\bar{D})$の$\bar{D}$における閉包を$\bar{A}$で，また$\bar{A}\cap(\bar{D}-D)$をA'で表わす．特に$D'=\bar{D}-D$．またidentity function $f(z)=z$に対して，$\{z\in D' : \hat{f}(z)=1\}=D_1$を点1上のfiberという．

単位円周C上のLebesgue測度$d\theta$による$L^\infty(d\theta)$を$L^\infty(C)$で，$L^\infty(C)$の極大イデアル空間をXで表わすと，$X\subset D'$でH^∞のŠilov境界と同一視出来る．$X_1=X\cap D_1$とおく．関数$u^*\in L^\infty(C)$のPoisson積分

$$u(z)=P_z(u^*)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u^*(e^{i\theta})\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\theta$$
$$(z=re^{i\varphi},\quad 0\leq r<1)$$

はD上の有界な複素調和関数である．$u^*\longmapsto u^s=\hat{u}|X$なる写像によって$L^\infty(C)$と$C(X)$はBanach algebraとして同型になる．

特に $u^* = \chi_A$ を C 上の Lebesgue 可測集合 A の特性関数とすると，u^s は X 上の clopen 集合 A^s ($= \{x \in X : \hat{\chi}_A = 1\}$，$\hat{\chi}_A$ は $\chi_A \in L^\infty(C)$ の Gelfand 表現）の特性関数になる．

$u^* = \chi_A$ の Poisson 積分 $u(z) = \mu(z, A) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi_A(e^{i\theta}) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} d\theta$ ($z = re^{i\varphi}$, $0 \leq r < 1$) は A の harmonic 測度である．

一般に $u^* \in L^\infty(C)$ に対しては

$$u(z) = \int_C u^*(\xi)\, \mu(z, d\xi), \quad z \in D$$

となる．(u^*, u, u^s) と $z \in \overline{D}$ に対して，写像 $u^s \longmapsto \hat{u}(z)$ は $C(X)$ 上の線形汎関数であって，X 上の確率測度 $\nu(z, \cdot)$ によって

$$\hat{u}(z) = \int_X u^s(\xi)\, \nu(z, d\xi) = \int_X \hat{u}(\xi)\, \nu(z, d\xi), \quad z \in \overline{D}$$

と表わされる．測度 $\nu(z, \cdot)$ は (X 上の測度の vague 位相で) $z \in \overline{D}$ の連続関数である．

$A^s (\subset X)$ が clopen 集合であるときは $\nu(\cdot, A^s) | D = \mu(\cdot, A)$ は D 上の調和関数で，$\overline{D}$ の連続関数 $\nu(\cdot, A^s) = \hat{\mu}(\cdot, A)$ に拡張出来る．

$f \in H^\infty$ に対して

$$\log|f(z)| \leq \int_C \log|f^*(\xi)|\, \mu(z, d\xi), \quad z \in D$$

または，

$$\log|\hat{f}(z)| \leq \int_X \log|\hat{f}(\xi)|\, \nu(z, d\xi), \quad z \in \overline{D}$$

§2. Cluster sets.

Γ を D の部分集合からなる filter で，ユークリッド極限 1 をもつものとする。$f \in H^\infty$ に対して $\bigcap_{A \in \Gamma} \overline{f(A)}$ （$\overline{f(A)}$ は $f(A)$ の閉包）を 1 における f の Γ cluster values の集合という。特に f が identity function のときは $\Gamma' = \bigcap_{A \in \Gamma} \overline{f(A)} = \bigcap_{A \in \Gamma} \overline{A}$ は D_1 のコンパクト集合である。Γ' の点を Γ 点という。$f \in H^\infty$ に対して，$\alpha \in \bigcap_{A \in \Gamma} \overline{f(A)} \Longleftrightarrow \alpha \in \hat{f}(\Gamma')$ であり，また $\lim_{\Gamma} f = \alpha \Longleftrightarrow \hat{f}|\Gamma' = \alpha$ である。B を D_1 の閉部分集合とするとき，B の $\bar{D}$ 近傍の D 上の trace からなる filter を $\Gamma(B)$ で表わす。このとき $B = \Gamma(B)'$ である。一般に $\Gamma(\Gamma') \subset \Gamma$ であるが $\lim_{\Gamma} f = \alpha \Longleftrightarrow \lim_{\Gamma(\Gamma')} f = \alpha$ が成り立つ。

§3. Lindelöf の定理.

Lindelöf の定理. $f \in H^\infty(D)$ の境界関数を $f^*(e^{i\theta})$ とする。もし $\theta \to 0^+$（または 0^-）のとき $\mathrm{ess}\lim f^*(e^{i\theta}) = 0$ であるとする。このとき頂点を 1 とする任意の Stolz 角領域 S に対して $\lim_{\substack{z \in S \\ z \to 1}} f(z) = 0$ となる。

（注. 任意正数 ε に対して円周 C 上の 1 の任意の近傍 $U(1)$ が存在して $m(\{|f^*| < \varepsilon\} \cap \{M^+ \cap U(1)\}) = m(M^+ \cap U(1))$ となることは $\mathrm{ess}\lim_{\theta \to 0^+} f^*(e^{i\theta}) = 0$ を意味する。ただし，M^+ は C 上の弧 $\widehat{1\, e^{i\theta_0}}$（$0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$）である。）

定理の解釈．$\mathcal{L}=\{z\in D_1-X_1:\ \text{ess}\lim f^*(e^{i\theta})=0$ as $\theta\to 0^+$ (or 0^-) $\Rightarrow \hat{f}(z)=0\}$ とおき，$\mathcal{L}$ の点を Lindelöf 点という．また頂点を 1 とする Stolz 角領域 S と点 1 の（ユークリッド）近傍系 $\mathcal{U}$ に対して，$\{S\cap U: U\in\mathcal{U}\}$ によって生成される filter を $S\ulcorner$ で表わし $\mathcal{S}=\bigcup_S (S\ulcorner)'$ ($=\bigcup_S S'$) とおく（$(S\ulcorner)'=S'$ となることは容易にわかる）．$\mathcal{S}$ に属する点を Stolz 点という．函数 $f\in H^\infty$ に対して

$$\lim_{\substack{z\in S\\ z\to 1}} f=\alpha \Leftrightarrow \lim_{S\ulcorner} f=\alpha \Leftrightarrow \hat{f}\big|_{(S\ulcorner)'}=\alpha \Leftrightarrow \hat{f}\big|_{S'}=\alpha$$

であるから，任意の Stolz 角領域 S に対して $\lim_{\substack{z\in S\\ z\to 1}} f=\alpha$ ということと $\hat{f}\big|_{\mathcal{S}}=\alpha$ ということは同値である．よって，

Lindelöf の定理は $\mathcal{S}\subset\mathcal{L}$ と書き換えることが出来る。

$\mathcal{L}$ について．C 上の可測集合 M に対して $M_1^{\mathcal{S}}=M^{\mathcal{S}}\cap X_1$ とおくと，任意の $f\in L^\infty(C)$ に対して

$$\hat{f}(M_1^{\mathcal{S}})=\{\alpha:\ m(\{|f-\alpha|<\varepsilon\}\cap(M\cap N(1)))>0 \text{ for } \forall\varepsilon>0,\ \forall N(1)\ (C\text{ 上の点 1 の近傍})\}$$

となる（ただし m は C 上の Lebesgue 測度）．

C 上の弧 $M=1\frown e^{i\theta_0}$ $(0<\theta_0<\frac{\pi}{2})$ に対して，$M_1^{\mathcal{S}}=M^{\mathcal{S}}\cap X_1$ を X_1 の上部という．このとき定理の仮定の部分（$\text{ess}\lim f^*(e^{i\theta})=0$ as $\theta\to 0^+$ (or $\theta\to 0^-$)）は X_1 の上部 $M_1^{\mathcal{S}}$ に対して $\hat{f}(M_1^{\mathcal{S}})=\{0\}$ (or $\hat{f}(X_1-M_1^{\mathcal{S}})=\{0\}$) となることを意味す

る．よって

$$\mathcal{L} = \{ z \in D_1 - X_1 : \hat{f} \equiv 0 \text{ on } M_1^S \text{ or } X_1 - M_1^S \Rightarrow \hat{f}(z) = 0 \}$$

となる．

$\mathcal{S}$について．$M = \widehat{1 e^{i\theta_0}}$ $(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2})$とする．$z_0 \in D$に対して$\{z \in D : \mu(z, M) = \mu(z_0, M)\} = \beta$は三点$1, e^{i\theta_0}, z_0$を通る円とDの共通部分であり，$z \in \beta$に対して$\mu(z, M) = \frac{\delta}{\pi} \in (0, 1)$である．（C. Carathéodory, Funktionentheorie I, Birkhäuser, Basel, 1950）ただし，δはβと弧$C - \widehat{1 e^{i\theta_0}}$のなす角である．$\overline{\beta} \cap D_1$上にあるStolz点を$z$とすると，ネット$\{z_\alpha\}$ $(\subset \beta)$が存在して$z_\alpha \to z$となるから，$\mu(z_\alpha, M) \to \nu(z, M_1^S)$，ゆえに$\nu(z, M_1^S) = \delta/\pi \in (0, 1)$．このことから

$$\mathcal{S} = \{ z \in D_1 : 0 < \nu(z, M_1^S) < 1 \}$$

となる．

Lindelöfの定理の証明，すなわち$\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$を示すために次の命題を用意する．

命題．MをX $(= M(L^\infty(C)))$上のBorel集合とする．H^∞の関数fが$\|f\| \le 1$でかつM上で$|\hat{f}| \le \varepsilon$ならば

$$|\hat{f}(z)| \le \varepsilon^{\nu(z, M)} \quad \text{for } z \in \overline{D}$$

特に，M（またはX－M）上で$\hat{f} \equiv 0$ならば，$0 < \nu(z, M) < 1$なる$z \in \overline{D}$に対して$\hat{f}(z) = 0$となる．

証明. $z \in \overline{D}$ とする.

$$\log|\hat{f}(z)| \le \int_X \log|\hat{f}|\, \nu(z, d\xi) = \int_M \log|\hat{f}|\, \nu(z, d\xi) + \int_{X-M} \log|\hat{f}|\, \nu(z, d\xi)$$

$$\le \int_M \log|\hat{f}|\, \nu(z, d\xi) \le (\log \varepsilon)\, \nu(z, M) = \log \varepsilon^{\nu(z, M)}.$$

$$\therefore |\hat{f}(z)| \le \varepsilon^{\nu(z, M)}$$ (証了)

この命題から直ちに $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ がわかる. (Lindelöf の定理の証明終り).

$M = \Gamma e^{i\theta_0}$ $(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2})$ とする. z を $\overline{D}$ の点として, z の表現測度の(閉) support を $\mathcal{S}(z)$ で表わす.

$$z \in \mathrm{hull}\, M_1^s = \{ z \in D_1 : |\hat{f}(z)| \le \sup_{M_1^s} |\hat{f}| \text{ for } \forall f \in M^\infty \}$$

$$\iff \mathcal{S}(z) \subset M_1^s$$

よって,

$$z \notin \mathrm{hull}\, M_1^s \iff 0 \le \nu(z, M_1^s) < 1$$

$$z \notin \mathrm{hull}\, (X_1 - M_1^s) \iff 0 \le \nu(z, X_1 - M_1^s) < 1$$

$$\therefore 0 < \nu(z, M_1^s)$$

$$\therefore z \in (\mathrm{hull}\, M_1^s)^c \cap (\mathrm{hull}\, (X_1 - M_1^s))^c \iff 0 < \nu(z, M_1^s) < 1$$

よって, $\mathcal{S} = (\mathrm{hull}\, M_1^s)^c \cap (\mathrm{hull}\, (X_1 - M_1^s))^c$ となる.

$\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{L}$ となることが証明されている. (cf. [6])

§4. Nontangential points と Tangential points

D の部分集合 U が点 1 の削られた (deleted) nontangential

近傍であるとは，点1を頂点としたすべてのStolz角領域Sに対して，点1を中心とする十分小さい円板内にあるSの部分をUが含むときをいう。点1の削られた近傍からなるfilterをΓ_Aで表わす．Γ_A'の点をnontangential pointという。

定理．(1) Stolz点の集合$\mathcal{S}$の$\bar{D}$における閉包はΓ_A'である。したがって$\Gamma_A' = \mathcal{L}$となる。

(2) $D'-D_1$の$\bar{D}$における閉包とΓ_A'は交わらない。

(3) $\mathcal{S}\,(\subset D_1)$は$D'$の開集合である。

(4) Γ_A'は連結集合である。

証明．(1) 省略

(2) $f(z)=\exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$を考えると，$D'-D_1$上では$|\hat{f}(z)|=1$であるから，$\overline{D'-D_1}$上でも$|\hat{f}(z)|=1$となる。一方$\mathcal{S}$上では$\hat{f}=0$であるから$\Gamma_A'$上でも$\hat{f}=0$となる。

(3) $(\mathcal{S}\subset)\,\Gamma_A'$は$D'$の開集合$D'-(\overline{D'-D_1})$に含まれ，また$\mathcal{S}$は$D_1$の開集合であることを既にみているから。

(4) 省略 (証了)。

Dにおける調和関数$u(z)=\arg(1-z)$ $\left(-\frac{\pi}{2}<u(z)<\frac{\pi}{2}\right)$を考える。$D$の部分集合$B$が点1において$C$に接するとは

$\lim\limits_{\substack{z\in B\\ z\to 1}}|u| = \frac{\pi}{2}$ （$\Leftrightarrow$ $D-B$ が点1の削られ nontangential 近傍である）のときをいう．また D_1 の点 z が tangential であるとは点1において C に接するある集合 B に対して，$z\in B'$ となっていることである．tangential points の集合を $\mathcal{T}$ で表わす．

定理．$D_1 = \Gamma_A' \cup \mathcal{T}$ でかつ $\Gamma_A' \cap \mathcal{T} = \phi$ である．

定理．A を点1における削られた nontangential 近傍とすると，$A\cup D_1$ は（$\bar{D}$ における）Γ_A' の近傍である．よって $\Gamma_A = \Gamma(\Gamma_A')$ である．

証明．A を点1における削られた nontangential 近傍とすると $(D-A)'$ は tangential 点のみからなり，$\overline{D-A}\cap\Gamma_A' = \phi$ となる．また $\overline{D'-D_1}\cap\Gamma_A' = \phi$ であることを証明しているから．（証了）．

$\lim\limits_{\Gamma_A} f = \alpha$ ならば $\exists B\in\Gamma_A$，$\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in B}} f(z) = \alpha$ となることが証明出来る．（このことを Γ_A は安定収束（convergence stable）であるという）．いま $f\in H^\infty$ に対して $\lim\limits_{\Gamma_A} f = \alpha$ とする．そうすると $\hat{f}|\Gamma_A' = \alpha$ となる．$\Gamma_A = \Gamma(\Gamma_A')$ であったから，Γ_A' のある $\bar{D}$ 近傍 $U(\Gamma_A')$ があって，$U(\Gamma_A')$ の D 上の trace $T = U(\Gamma_A')\cap D$ に対して $\lim\limits_{\substack{z\in T\\ z\to 1}} f = \alpha$．よって $\hat{f}|T' = \alpha$．しかるに $T' \supset U(\Gamma_A')\cap D'$ であるから，Γ_A' の D_1 に関するある近傍上で $\hat{f}\equiv\alpha$ となる．

§5. L minimal filter と L maximal filter

Γ を D の部分集合からなる filter でユークリッド極限 1 をもつものとする．Γ が L minimal であるとは Γ より真に粗いユークリッド極限 1 をもつ filter Γ_1 で，$f \in H^\infty$ に対して $\lim_{\Gamma} f$ が存在するならば $\lim_{\Gamma_1} f$ も存在するという Γ_1 が存在しないことである．

H^∞ の函数 f に対して，$\lim_{\Gamma} f = \alpha$ であることと $\lim_{\Gamma(\Gamma')} f = \alpha$ であることと同値であるから，Γ が L minimal であるならば $\Gamma(\Gamma') = \Gamma$ となる。

D_1 の部分集合 A が L maximal であるとは，$A \subsetneq A_1$ でかつ $f \in H^\infty$, $\hat{f}|A = c$（定数）ならば $\hat{f}|A_1 = c$ となる A_1 が存在しないことである。次のことがなりたつ。

$$\Gamma : \text{L minimal} \Longleftrightarrow \Gamma = \Gamma(\Gamma'),\ \Gamma' ; \text{L maximal}$$

任意個数の L maximal 集合の共通部分はまた L maximal 集合である．有限個の L maximal 集合の和集合はまた L maximal 集合である．

定理 u を D 上の有界な調和函数で $a = \inf u < b = \sup u$ であるとする．このとき

$\{z \in D_1 ; a < \hat{u}(z)\}^-$, $\{z \in D_1 ; \hat{u}(z) < b\}^-$

$\{z \in D_1 : a < \hat{u}(z) < b\}^-$

は L maximal が空集合である。

D上の調和関数 $u(z)=\arg(1-z)$ $(-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2})$ を考える。$\inf u=-\frac{\pi}{2}$, $\sup u=\frac{\pi}{2}$ で、$\overline{\{z\in D_1 : -\frac{\pi}{2}<\hat{u}(z)<\frac{\pi}{2}\}}=\Gamma_A'$ であるから Γ_A' は L maximal, よって Γ_A は L minimal である。

§6. Fiber D_1 中にある Gleason part.

(一般論) コンパクトなハウスドルフ空間 X 上の uniform algebra A の極大イデアル空間 M(A) の点 m を通る Gleason part P(m) が nontrivial であるとする。さらに m の表現測度がただ一つであると仮定する。そうすると P(m) の各要素 φ の表現測度もただ一つであるので、それをまた φ で表わすことにする。A の $L^p(m)$ ノルムによる閉包を $H^p(m)$ ($p=\infty$ のときは w^* 閉包) で表わす。また Wermer の embedding function Z についての多項式の $L^p(m)$ ノルム閉包 ($p=\infty$ のときは w^* 閉包) を $\mathcal{H}^p$ で表わす。また $I^p=\{f\in H^p(m) : \int \bar{Z}^n f\, dm=0,$ $n=0,1,2,\cdots\}$ とおく。このとき

$$H^p(m)=\mathcal{H}^p\oplus I^p$$

となる。ただし $\oplus$ は代数的直和である。

写像 $\sum_{n=1}^{k} a_n e^{in\theta} \longmapsto \sum_{n=1}^{k} a_n Z^n$ は古典的 Hardy space $H^p(d\theta)$ から $\mathcal{H}^p$ 上への isometrically isomorphic map に拡張出

来る.

$\hat{Z}(\varphi)$ $(=\int Z\,d\varphi)$ は $P(m)$ から D 上への一対一写像であり, その逆写像 $\tau(t)$ は連続で, 関数 $f\in H^\infty(m)$ に対して

$$\hat{f}(\tau(t))=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n\ ,\quad a_n=\int\bar{Z}^n f\,dm$$

となる (Wermer の定理)

このとき (集合として)

$$\hat{H}^\infty(m)\,|\,\tau(D)=\hat{\mathcal{H}}^\infty(\tau(D))=H^\infty(D)$$

となる. (Cf. S. Merrill and N. Lal, Characterization of certain invariant subspace of H^p and L^p spaces derived from logmodular algebra, Pacif. J. Math. 30 (1969), 463—474) (一般論終り)

$\hat{H}^\infty(D)$ を fiber D_1 に制限することによって得られる algebra を A_1 で表わす.

D_1 の任意の一点 m の表現測度の閉 support $S(m)$ は A_1 の peak sets の積集合で $A=A_1|S(m)$ とおくと $\log|A^{-1}|=C_R(S(m))$ となる. また m を通る Gleason part $P(m)$ の D_1 における閉包と $S(m)$ は交わらない.

D_1 の中に次のような m が存在する.

(1) m を通る Gleason part $P(m)$ が nontrivial である.

(2) Wermer の embedding function Z が $H^\infty(D)$ の関数であって, $\tau: D\to P(m)$ が同相写像である.

(3) 任意の $H^\infty(D)$ の関数 f に対して $\hat{f}\circ\tau$ が $H^\infty(D)$ の関数であり，逆に任意の $H^\infty(D)$ の関数 f に対してある関数 $g\in H^\infty(D)$ が存在して $\|g\|=\|f\|$, $\hat{g}\circ\tau=f$ となる．すなわち $A|P=H^\infty(D)$ となる．逆に次の定理が成り立つ

定理 $A|P=H^\infty(D)$ のときは P と D は同相になる．

証明．$m\ (\in P)$ をとり，A の $L^\infty(m)$ w^* 閉包を $H^\infty(m)$ で表わす．$\varphi\in P$ のとき $H^\infty(m)=H^\infty(\varphi)$ である．

$$\tilde{\varphi}(f)=\int f\,d\varphi \quad , \quad f\in H^\infty(m)$$

によって定義される $\tilde{\varphi}$ は $M(H^\infty(m))$ の要素で，

$$\mathcal{P}=\{\tilde{\varphi} : \varphi\in P(m)\}$$

は $M(H^\infty(m))$ の Gleason part である．

$$H^\infty(D)=A|P=A|\mathcal{P}\subset H^\infty(m)|\mathcal{P}$$
$$=\mathcal{H}^\infty|\mathcal{P}=H^\infty(D)$$

から $A|\mathcal{P}=\mathcal{H}^\infty|\mathcal{P}$ $\therefore$ $A|\bar{\mathcal{P}}=\mathcal{H}^\infty|\bar{\mathcal{P}}$.

$\Phi\in M(H^\infty(m))$ に対して $\pi\Phi=\Phi|A$ によって π を定義すると，π は連続で，

$$\pi\bar{\mathcal{P}}=\bar{P}$$

となる．ゆえに

$$\mathcal{H}^\infty|\bar{\mathcal{P}}=A|\bar{\mathcal{P}}=A|\pi\bar{\mathcal{P}}=A|\bar{P}$$

となるから，π は $\bar{\mathcal{P}}$ から $\bar{P}$ 上への一対一連続な写像である．

よって π は $\wp$ から P 上への同相写像になる．一方 D と $\wp$ とは同相であることが知られているから $\pi: D \to P$ は同相写像である．（証了）．

よって P と D が同相でないと $A|P \neq H^{\infty}(D)$ となる．そのような例は（[4], p.109）にある．

文献

[1] T. K. Boehme, M. Rosenfeld and Max. L. Weiss. Relations between bounded analytic functions and their boundary functions. J. London Math. Soc. (2), 1 (1969), 609–618.

[2] J. L. Doob, Boundary approach filters for analytic functions. Ann. Inst. Fourier, 23 (1973), 187–217.

[3] K. Hoffman, Banach space of analytic functions, Prentice Hall 1962.

[4] ——————, Bounded analytic functions and Gleason parts, Ann. Math. 86 (1967), 74–111.

[5] M. Rosenfeld and Max. L. Weiss, Bounded analytic functions tending radially to zero. Proc. London Math. Soc. (3), 18 (1968), 714–726.

[6] M. Rosenfeld and Max. L. Weiss, A function algebra approach to a theorem of Lindelöf, J. London Math. Soc. (2) 2 (1970), 209–215.

[7] I. J. Schark, Maximal ideals in an algebra of bounded analytic functions, J. Math. Mech., 10 (1961), 735–746.