数理解析研究所講究録
第232巻 1975年 80-89



# A-measure について

阪大 教養　阪井 章

$G$ を $\mathbb{C}^n$ の有界領域とし，$\bar{G}$ で連続で $G$ で正則な関数全体のつくる関数環を $A(G)$，$A(G)$ の Silov 境界を $\Gamma$ とする（$\mathbb{C}^n$ における $G$ の位相的境界は $\partial G$ であらわす）．$\Gamma$ 上の測度 $\mu$ が次の条件をみたすとき，$\mu$ は A-measure と呼ばれる：

$$f_n \in A(G),\ \|f_n\| \leq 1,\quad \forall z \in G\ \ f_n(z) \to 0$$
$$\Rightarrow \qquad \lim \int f_n \, d\mu = 0.$$

この概念は，$G$ が $\mathbb{C}^n$ の超球 $B_n$ である場合に，$A(B_n)$ と $A(D^m)$（$D^m$ は $\mathbb{C}^m$ の多重円板）が Banach 空間として同型でないことを示すために導入された．（Henkin [4]）この場合の基本的な結果は次の定理である．

定理 H．$\mu$ が A-measure，$\nu \ll \mu \Rightarrow \nu$ は A-measure．

この定理は後に $G$ が $\mathbb{C}^n$ の強擬凸領域の場合に証明された．([5])．更に Cole-Range は [2] において $G$ が複素多様体の強

擬凸領域である場合に，Henkinのとは少し異なる方法で定理Hを証明した．こゝでは後の方法で述べる．

また最近，Khanh [8] は Hilbert空間の contraction の話に関聯して，$\partial D^2$ 上の Torus $T^2$ の上の A-measure を扱っている．

1. $A(B_n)$ と $A(D^m)$ $(m \geqq 2)$．

$A(B_n)$ の Šilov 境界は超球面 $\Sigma = \partial B_n$ である．$C(\Sigma)^*$ の閉部分空間 $L_1$ が structurally complete であるとは

$$\mu \in L_1 ,\ \nu \ll \mu \quad \Rightarrow \quad \nu \in L_1$$

をみたすことゝする．この時，$L_1$ のすべての測度に対して特異である測度全体を $M_1$ とすれば，

$$C(\Sigma)^* = L_1 \oplus M_1 .$$

自然な埋蔵 $I : A(B_n) \longrightarrow C(\Sigma)$ を考え，$IA(B_n)$ に直交する $\Sigma$ 上の測度全体を $H$ であらわす．もし $H \subset L$ が成立するなら

$$C(\Sigma)^*/H = L_1/H \oplus M_1 .$$

$H = \ker I^*$ であるから，$L = I^* L_1$，$M = I^* M_1$ とすれば

$$A(B_n)^* = L \oplus M .$$

となる．

一般にコムパクト集合 $X$，Banach空間 $B$，$B$ から $C(X)$ の中への同型写像 $I$ が与えられたとき，$B^*$ の任意の閉部分空間 $M$ に対して，線形作用素 $S : M \to C(X)^*$ で $I^* \circ S : M \to M$

が恒等写像であるようなすべての $S$ についての $\|S\|$ の下限を $\chi_I(M)$ であらわす. $I: B \longrightarrow C(X_1)$, $J: B \longrightarrow C(X_2)$ がともに isometric であるときには $\chi_I(M)=\chi_J(M)$ が成り立つ（[3]参照）ので，これを単に $\chi(M)$ とかく.

上の場合 $I: A(B_n) \longrightarrow C(\Sigma)$ については $\chi(M)=1$ である.

さて $n=1$（このときは $B_1=D$）の場合は，$C(T)^*$ の structurally complete な部分空間 $L_1$ として，$T$ 上の Lebesgue 測度 $m$ に対して絶対連続な測度全体をとれば，F. M. Riesz の定理によって $H \subset L_1$ であるから，上の分解が可能である. この場合 $L_1$，従って $L$ は可分で，$\chi(L)=\infty$ であり，このことを用いて $A(D)$ と $A(D^m)$ が同型でないことが証明されるのである（[3]）.

$n>1$ の場合は上のことは成立しない. 例えば $\Sigma$ の部分集合 $E=\{z\in\Sigma\ ;\ |z_1|=1,\ z_2=\cdots=z_n=0\}$ 上に台をもつ測度として $\frac{1}{2\pi}e^{i\theta_1}d\theta_1$ によって導かれる測度 $\mu$ をとれば，$\mu\in H$ であるが，$m$ に対して $\mu$ は絶対連続でない. そこで $\Sigma$ 上の測度 $\mu$ で，

$$\left.\begin{array}{l} f_n\in A(B_n),\ \|f_n\|\leqslant 1. \\ \forall k=(k_1,\cdots,k_n),\ \dfrac{\partial^{|k|}f_n}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_n^{k_n}}(0)\to 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \lim\int f_n\,d\mu=0$$

をみたすものの全体を $L_1$（$B_n$ に対する積分表示によって，これは $\Sigma$ 上の A-measure 全体と一致することがわかる）とすると，

定理Hによって，$L_1$は structurally complete で，明らかに $H \subset L_1$であるから，上の分解が可能である．この場合，Lは analytic functional の空間（$B_n$の各点を point evaluation と同一視することによって，$B_n$を$A(B_n)^*$に埋め込んだときの$B_n$の$A(B_n)^*$における norm closure）であって，可分である．このことから$A(B_n)$と$A(D^m)$とが同型でないことが証明されるのである（[4]）．

## 2. 定理Hの証明．

$\mathbb{C}^n$の開集合Uで定義された$C^\infty$級実関数$\rho(z)$で Hermite 行列$\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z)\right)$がUの各点zで正値であるとき，$\rho$を強多重劣調和関数と呼ぶ．$\mathbb{C}^n$の有界領域Gが，$\bar{G}$の近傍Uで強多重劣調和である$\rho$によって $G = \{z \in U ; \rho(z) < 0\}$ とあらわされており，$\partial G$上の各点で$d\rho \neq 0$であるとき，Gは強擬凸領域と呼ばれる．$B_n$はその特別の場合である．$A(G)$のSilov境界は$\partial G$と一致する．

G上の関数uについて，$L^p$-norm $(1 \leq p \leq \infty)$およびHölder-normを夫々$\|u\|_{L^p(G)}$および$\|u\|_{H^\alpha(G)}$とし，G上の(0,1)形式$\omega = \sum_{k=1}^n f_k d\bar{z}_k$については$L^p$-normを$\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L^p(G)} = \|\omega\|_{L^p_{(0,1)}(G)}$で定義する．$K^\infty_{(0,1)}(G) = \{\omega \in L^\infty_{(0,1)}(G) ; \bar{\partial}\omega = 0\}$とおく．

次の定理は Kerzman [7] による.

定理K. $G$ を強擬凸領域とする. コムパクト線形作用素 $T: K^\infty_{(0,1)}(G) \longrightarrow C(\bar{G})$ で次の性質をみたすものがある:

(i) $u = T(\omega) \Rightarrow \bar{\partial} u = \omega$.

(ii) $\omega \in C^\infty_{(0,1)}(G) \Rightarrow T(\omega) \in C^\infty(G)$.

これから直に次のことがある.

(iii) $\omega_n \longrightarrow 0$ (weak * in $K^\infty_{(0,1)}(G)$) $\Rightarrow T(\omega_n) \longrightarrow 0$ (in $C(\bar{G})$).

次の定理は定理Hと同等である.

定理H′ $G$ は強擬凸領域, $\mu$ は $\partial G$ 上の A-measure とする.

$$f_n \in A(G),\ \|f_n\| \leqslant 1,\quad f_n(z) \longrightarrow 0 \quad (\forall z \in G)$$
$$\Rightarrow \quad f_n \rightarrow 0 \quad (\text{weak}* \text{ in } L^\infty(\mu)).$$

(証明). 任意の $\varphi \in C^\infty(\bar{G})$ に対して $\omega_n = f_n \bar{\partial}\varphi$ とおくと $\omega_n \in K^\infty_{(0,1)}(G)$ で, $z \in G$ なら $f_n(z) \longrightarrow 0$ だから $\omega_n(z) \longrightarrow 0$. $\|\omega_n\|_{L^\infty_{(0,1)}(G)} \leqslant M$ だから $\omega_n \rightarrow 0$ (weak * in $K^\infty_{(0,1)}(G)$). (iii) から. $u_n = T(\omega_n) \rightarrow 0$ (in $C(\bar{G})$).

$F_n = f_n\varphi - u_n$ とおくと. $F_n \in A(G)$, $\|F_n\| \leqslant M'$ で $z \in G$ に対して. $F_n(z) \rightarrow 0$. $\{f_n\}$ の $L^\infty(\mu)$ の weak*-limit の 1 つを $f$ とすれば, $\mu$ が A-measure であることから

$$\int f \varphi \, d\mu = \lim \int f_n \varphi \, d\mu = \lim \int F_n \, d\mu = 0 \qquad //$$

註.) Henkin は定理Hを最初Gが超球$B_n$の場合に証明した([4]) その方法は$B_n$の積分表示を用いるものである. 後に[5]では$\mathbb{C}^n$の強擬凸領域Gについて積分表示式を証明し, それを用いて定理Hを証明した. 上の証明はそれとは異なり, $\bar\partial$-問題の解の評価を用いている. $G\subset\mathbb{C}^n$の場合には, Henkinの積分表示から$\bar\partial$-問題の解の同様な評価が得られる([6])から証明の内容は同等といえるだろう. しかしKerzmanによる$\bar\partial$-問題の解は, まず局所的に積分表示式を証明して, そこで$\bar\partial$-問題を解き, それから大域的な解とその評価を得る方法によるので, Gが多様体の強擬凸領域の場合にも適用する. したがって上の定理H′は多様体の場合にも成立する.

3. 多重円板の場合.

簡単の為, $n=2$とする. $T^2=T\times T$上のLebesgue測度を$m$, T上のLebesgue測度を$\sigma$とする. $\mu$を$T^2$上の測度とするとき, T上のBorel集合$e$に対して

$$\mu_1(e)=|\mu|(e\times T),\quad \mu_2(e)=|\mu|(T\times e)$$

によって定まるT上の測度$\mu_1$, $\mu_2$を$\mu$の成分という. 以下, $T^2$の結果はKhanh [8] によるが, 証明の主な idea は[1]にあるようである.

補題 1. T上の測度でσについて絶対連続なものはA-measureである.

補題 2. $\mu$はT$^2$の測度で $f_n \in A(D^2)$, $\|f_n\| \leqq 1$ とする. 任意の$(z_0, w_0) \in D^2$に対して $\lim \int f_n(z,w)(z-z_0)^{-1}(w-w_0)^{-1} d\mu(z,w) = 0$ ならば, T$^2$の任意のBorel集合Eに対し, $\lim \int_E f_n d|\mu| = 0$.

これは $\{g(z,w)(z-z_0)^{-1}(w-w_0)^{-1}, g \in A(D^2), (z_0, w_0) \in D^2\}$ の一次結合が $C(T^2)$においてdenseなことから出る.

Lemma 1, 2により

定理 3. $\mu$はT$^2$上のA-measureで, その成分はσについて絶対連続とする. $f_n \in A(D^2)$, $\|f_n\| \leqq 1$, $f_n(z) \to 0$ $(\forall z \in D^2)$ ならば, T$^2$上の任意のBorel集合Eに対して.
$\lim \int_E f_n d|\mu| = 0$, 故にとくに, $|\mu|$はA-measureである.

4. 正のA-measure.

補題 4. Gは$\mathbb{C}^n$の有界領域, $\mu$はΓ上の正のA-measureとする. Gのある点$z_0$に対して, $\mu$が$z_0$のすべての表現測度について特異であれば, $\mu = 0$.

証明はabstact F. M. Rieszの定理による.

補題5. $\mu$が$T^2$上の正のA-measureであれば，その成分は$\sigma$について絶対連続である．したがって，$f_n \in A(D^2)$, $\|f_n\| \leq 1$, $\lim f_n(z) = 0$ $(\forall z \in D^2)$ であれば，$T^2$の任意のBorel集合Eに対して $\lim \int_E f_n d\mu = 0$.

これはT上の$\sigma(F) = 0$なる閉集合が，A(D)のpeak interpolation setであることからわかる．これに関聯して，$T^2$上で$K = \{(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \in T^2 ; \theta + \varphi = 1\}$を考え，K上のLebesgue測度から導かれる$T^2$上の測度を$\mu$とすると，$\mu$は正の測度でその成分は$\sigma$について絶対連続．しかしKがpeak interpolation setであるから，$\mu$はA-measureではない．

定理6. $\mu$が$T^2$上の正のA-measure, $\nu \ll \mu \Rightarrow \nu$はA-measure.

5. A-measureの特徴づけ.

定理7. Gは$\mathbb{C}^n$の強擬凸領域とする．$\partial G$上の測度$\mu$がA-measureであるための必要十分条件は，Gの任意の1点$z_0$に対し，$\mu$が$z_0$の ある 表現測度に絶対連続なことである．

定理8. $T^2$上の正の測度がA-measureなる為の必要十分条件は，$z_0 \in D^2$に対し，$\mu$が$z_0$の ある 表現測度に絶対連続なこと．

何れの場合も，$z_0$ のある表現測度について絶対連続である測度の全体をL，Lのすべての測度に特異な測度全体をMとするとき，$\mu=\mu_a+\mu_s$，$\mu_a\in L$，$\mu_s\in M$と書ける．しかも，$\mu$が$A(G)$（又は$A(D^2)$）と直交するなら，$\mu_a, \mu_s$もそうである．必要性を示す為には，$\mu$がA-measure $\Rightarrow$ $\mu_s \doteq 0$ を示せばよいが，Gのときは定理Hから，$D^2$のときは定理3から，いづれも$|\mu|$がA-measureとなり証明は補題4に帰着する．十分性は，いづれの場合も$z_0$の表現測度が正のA-measureであることゝ，定理H又は定理6とから出る．

その他，A-measureの応用等については省略する．

## 引用文献


1 E.Briem, A.M.Davie and B.K.Oksendal; A Functional calculus for pairs of commuting contractions, J.London Math.Soc. (2), 7 (1973), 709-718.

2 B.Cole and R.M.Range: A-Measures on Complex Manifolds and Some Applications, J.Functional Analysis 11 (1972) 393-400.

3 G.M.Henkin:Nonisomorphism of certain spaces of functions of different numbers of variables,Funkcional.Anal. i Prilozen 1 (1967) 57-68.

4 G.M.Henkin: The Banach spaces of analytic functions in a sphere and in a bicylinder are not isomorphic, Funkcional. Anal. i Prilozen 2 (1968) 82-91.

5 G.M.Henkin: Integral representations of functions holomorphic in strictly pseudoconvex domains and some applications, Amer. Math. Soc. Transl.: Math. USSR-Sb. 7 (1969) 597-616.

6 G.M.Henkin: Integral representations of functions in strictly pseudoconvex domains and applications to the $\bar{\partial}$-problem, Amer. Math. Soc. Transl.: Math. USSR-Sb.11 (1970) 273-281.

7 N.Kerzman: Holder and $L^p$ estimates for solutions of $\bar{\partial}u = f$ in strongly pseudoconvex domains, Comm.Pure Appl. Math. 24 (1971), 301-307.

8 B.D.Khanh: Les A-mesures sur le Tore de deux Dimensions et le Calcul Symbolique de deux Contractions Permutables J. Functional analysis 15 (1974) 33 - 44.