数理解析研究所講究録
第 232 巻 1975 年 90-96

Function algebra と flow

早大 教育 和田淳蔵

Function algebra と、数学の他の分野との関連については いろいろ研究されているが、ここではエルゴード理論との関係、とくに flow との関連について述べる。これについての研究は Forelli [4] によって始められ、それに続いて Muhly [7, 8, 9] が一連の論文を発表している。これらの結果をもとにしてこの話題を考えていく。

§1. Flow.

S を局所コンパクト Hausdorff 空間とし、$\mathbb{R}$ を実数空間とする。

$(\mathbb{R}, S)$ が flow であるとは、$T: \mathbb{R}\times S \to S$ は連続写像であって

$$T(0, x) = x \quad (x \in S)$$

$$T(s+t, x) = T(t, T(s, x)) \quad (s, t \in \mathbb{R},\ x \in S)$$

となる T が存在することである。

Forelli [4] ではSを局所コンパクト空間として考えているが、ここでは$X=S$をコンパクトHausdorff空間とする。

$C(X)\ni\varphi$に対して

$$\varphi(x+t)=\varphi[T(t,x)]$$

とおくとき、$\varphi\in C(X)$がanalyticであるとは、$\forall x$で$\varphi(x+t)\in H^\infty(\mathbb{R})$であることをいう。ここで$H^\infty(\mathbb{R})$は$\mathbb{C}$の上半分$\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,z>0\}$で有界なanalytic functionの$\mathbb{R}$でのboundary function全体を表わす。

$H^\infty(\mathbb{R})$はつぎのようにも書くことができる([2])。

$H^\infty(\mathbb{R})\ni f$となる必要かつ十分条件は$f\in L^\infty(\mathbb{R})$かつ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{t-z}\right)f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}f(t)\,dt\quad(z=x+iy)$$

は$\{z:\mathrm{Im}(z)>0\}$でanalyticとなることである。

$C(X)$の中のanalytic function全体を$\mathfrak{A}$とおくとき、$\mathfrak{A}$は$C(X)$のclosed subalgebraとなり1を含む。

いま$\mathcal{B}$を$C(X)$のsubalgebraとしたとき、Xの上の確率測度μが乗法的であるとは、$\forall f,g\in\mathcal{B}$で$\int_X fg\,d\mu=\left(\int_X f\,d\mu\right)\left(\int_X g\,d\mu\right)$となることをいう。また$\mu$が不変(invariant)であるとは、$\forall t\in\mathbb{R}$と$\forall$Baire set $E\subset X$に対して$\mu[T(t,E)]=\mu(E)$となることであり、μがエルゴード的(ergodic)であるとはBaire set $E\subset X$がTで

μ－不変であれば $\mu(E)=0$ または $\mu(E)=\mu(X)$ となることをいう．E が μ－不変とは $\forall t\in\mathbb{R}$ で $\mu[E\triangle T(t,E)]=0$ のことである．Flow $(\mathbb{R},X)$ が強い意味でエルゴード的 (strictly ergodic) であるとは，T のもとに不変である X の上の確率測度が唯1つ存在することをいう．また flow $(\mathbb{R},X)$ が極小 (minimal) であるとは，$\forall x\in X$ で x の orbit $\{T(t,x)\,;\,t\in\mathbb{R}\}$ が X の中で稠密のときである．

§2. Subalgebra $\mathfrak{A}$

$(\mathbb{R},X)$ を flow としたとき $\mathfrak{A}$ を §1 で定義された $C(X)$ の subalgebra とする．$(\mathbb{R},X)$ と $\mathfrak{A}$ との関係をつぎに述べる．

定理 2.1　$\mathfrak{A}$ の確率測度 μ が不変でエルゴード的とする．そのとき $\mathfrak{A}$ は $L^\infty(\mu)$ における weak-*Dirichlet algebra である．

定理 2.2　Flow $(\mathbb{R},X)$ が強い意味でエルゴード的であれば $\mathfrak{A}$ は Dirichlet algebra である．

例．Γ を (0) でない $\mathbb{R}$ の部分群とし，Γ に discrete topology を与え，G を Γ の指標群 (character group) とする．勿論 G はコンパクト群である．$\chi_a(x)=x(a)$ $(a\in\Gamma,\ x\in G)$ とおくとき χ_a $(a\in\Gamma,\ a\geqq 0)$ で生成された G の上の function algebra を A とする．A は Dirichlet algebra であり，A の

の関数は generalized analytic function といわれる.

$\mathbb{R} \ni \forall s$ で $e_s(a) = e^{ias}$ $(a \in \Gamma)$ とおけば $e_s \in G$ となることから $s \longrightarrow e_s$ となる写像によって $\mathbb{R}$ は G の中で稠密な部分群に写される. ここで Flow $(\mathbb{R}, G)$ をつぎのように定義する.

$$T : (t, x) \longrightarrow e_t + x$$

ここで flow $(\mathbb{R}, G)$ から $\mathfrak{A}$ を作ると $\mathfrak{A} = A$ となる. これは $f = \sum c_j \chi_{a_j}$ とすれば $f(e_t) = \sum c_j e^{ia_j t}$ が $\forall a_j \geqq 0$ であれば $\mathbb{C}$ の上半分の有界な analytic function に拡張できることからわかる. この場合 T によって不変となる G の上の唯1つの確率測度は Haar 測度であることから, flow $(\mathbb{R}, G)$ は強い意味でエルゴード的である.

定理 2.3 Flow $(\mathbb{R}, X)$ が極小であれば $\mathfrak{A}$ は $C(X)$ の maximal closed subalgebra となる.

系 2.4 (Wermer maximality theorem) Disc algebra は maximal algebra である.

前の例において Γ を $\mathbb{R}$ の整数全体の部分群とする. そのとき $\mathfrak{A}$ は disc algebra となる. このとき $T(t, x) = t + x$ の orbit は G となるから flow $(\mathbb{R}, G)$ は minimal となることがわかる.

定理 2.5 Flow $(\mathbb{R}, X)$ が minimal なら $\mathfrak{A}$ は pervasive algebra となる。ここで $\mathfrak{A}$ が pervasive であるとは、X の任意の閉集合（$F \neq X$）に対して $\mathfrak{A}|F$ は $C(F)$ で稠密であることをいう。

注 Forelli [4] においては、定理 2.3 定理 2.5 は別々に証明されているが、$(\mathbb{R}, X)$ が minimal なら $\mathfrak{A}$ は essential であることが容易にわかるから、定理 2.3 より定理 2.5 が導かれる。

§3 $H^p(m)$ と flow

Helson and Lowdenslager [6] は generalized analytic function の algebra に付随する Hardy space $H^p(m)$ の性質を考えた。それを flow を用いて §1 で定義された algebra $\mathfrak{A}$ の場合に拡張すると、つぎのようになる。

$\mathfrak{A}$ の上の乗法的な確率測度を m とする。そのとき

定理 3.1 $H^2(m)$ が定数関数以外の関数を含むとする。そのとき、m がエルゴード的であるための必要かつ十分条件は $H^2(m) \ni f$ が $m(E) > 0$ となる E の上で 0 なら $f \doteqdot 0$ $(a.e.\ m)$ となることである。

定理 3.2 測度 m は dirac 測度でないとし、$\mathfrak{A}$ は $L^\infty(m)$ の weak-* Dirichlet algebra とする。そのときつぎの条件は同等である。

(1) m はエルゴード的である。

(2) $1 \leqq p \leqq \infty$ に対して $H^p(m) \ni f$ が $m(E) > 0$ となる E の上で 0 なら $f = 0$ (a.e. m).

(3) $H^\infty(m)$ は $L^\infty(m)$ の maximal weak*-closed subalgebra である.

定理 3.3 Flow $(\mathbb{R}, X)$ が強い意味でエルゴード的で m が dirac 測度でなければ m は エルゴード的である。

§4. $\mathfrak{A}$ の maximal ideal space.

$X \times [0,1]$ において $X \times \{0\}$ を1点 $\hat{0}$ とした quotient space を $\mathbb{D}$ で表わす.

定理 4.1 X の上の乗法測度 m は dirac 測度でないとする。そのとき $\mathbb{D}$ から $\mathfrak{A}$ の maximal ideal space $M_{\mathfrak{A}}$ の上への同相写像 Γ が存在する。さらに $0 < r < 1$ となる r について $\{\Gamma(x, r) ; x \in X\}$ はある non-trivial な Gleason part に含まれ、$C_0 = \Gamma(\hat{0})$ を含む Gleason part が non-trivial である必要かつ十分条件は m はある orbit に凝集することである。

参考文献

[1] R. Arens and I. Singer : Generalized analytic functions, Trans. Amer. Math. Soc., 81 (1956) 379-393.

[2] P. L. Duren : Theory of H^p Spaces, Academic Press 1970.

[3] F. Forelli : Analytic and quasi-invariant measures, Acta Math. 118 (1967) 33-59.

[4] —— : A maximal algebra, Math. Scand. 30 (1972) 152-158.

[5] T. Gamelin : Uniform algebras, Prentice Hall 1969.

[6] H. Helson and D. Lowdenslager : Prediction theory and Fourier series in several variables II Acta Math., 106 (1961), 175-213.

[7] P. S. Muhly : Function algebras and flows : Acta Scien. Math. 35 (1973) 111-121.

[8] —— : Function algebras and flows II : Arkiv Math. 11 (1973) 203-213.

[9] —— : Function algebras and flows III : Math. Z. 136 (1974) 253-260.