数理解析研究所講究録
第 235 巻 1975 年 1-25

全ての有限生成R－加群が巡回R－加群の直和にかける環Rについて

山大 文理　大城 紀代市

Pierce は（ノイマンの意味の）正則環R上に於いて次の興味ある２つの結果を示した（[11]）。

(I) 全ての有限生成torsion free R－加群が巡回R－加群の直和にかけるならば Spec(R)は 3-point を持たない。

(II) 全ての有限生成R－加群が巡回R－加群の直和にかけるならばRの巾等元は有限個しかない。

この稿では，(I)の逆を究明することと，(II)は一般の環についても成立するかという問題を取り扱う。

以下，扱う環Rは全て可換環で単位元を持つとし，R－加群といえばunitalであると仮定する。R－加群Mが<u>torsion free</u>であるとは $\{x\in M \mid \mathrm{Hom}_R(Rx, E(R))=\{0\}\}=\{0\}$ の時を言う。ただし，E(R) はRの injective hull。

§1. 準備.

[a]. sheaf の定義.

定義 1.1. X, $\mathcal{R}$ は位相空間とする。X の各点 x に対して stalk とよばれる環 $\mathcal{R}_x$ が与えられて

$$\mathcal{R} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{R}_x, \quad \mathcal{R}_z \cap \mathcal{R}_y = \phi \text{ for } z \neq y.$$

π は r が $\mathcal{R}_x$ の元のとき $\pi(r) = x$ で定義される $\mathcal{R}$ から X への写像とする。次の4つの axioms が満たされるとき, $\mathcal{R}$ は sheaf of rings over X とか単に $(X, \mathcal{R})$ は ringed space であると呼ばれる。

(I) r を $\mathcal{R}$ の点とすると r を含む $\mathcal{R}$ の開集合 U と X の開集合 N が存在して, U と N は π で位相同型になる。

(II) $\mathcal{R}$ から $\mathcal{R}$ への $r \longmapsto -r$ なる写像は連続写像である。

(III) $\mathcal{R} + \mathcal{R} = \{(r, s) \mid \pi(r) = \pi(s)\}$ とおく。$\mathcal{R} + \mathcal{R}$ を積空間 $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ の部分空間とみるとき $(r, s) \longmapsto r + s$, $(r, s) \longmapsto rs$ なる写像は $\mathcal{R} + \mathcal{R}$ から $\mathcal{R}$ への連続写像。

(IV) X から $\mathcal{R}$ への $x \longmapsto 1_x$ なる写像は連続写像である。ただし, 1_x は $\mathcal{R}_x$ の単位元。

定義 1.2. $(X, \mathcal{R})$ は ringed space とする。$\mathcal{A}$ は位相空間で, X の各点 x に対して stalk とよばれる $\mathcal{R}_x$-加群 $\mathcal{A}_x$ が与えられ

$$\mathcal{A} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{A}_x, \quad \mathcal{A}_z \cap \mathcal{A}_y = \phi \text{ for } z \neq y.$$

π' は a が $\mathcal{A}_x$ の元のとき $\pi'(a) = x$ で定義される $\mathcal{A}$ から X

への写像とする．次の2つの axioms が満たされるとき，$\mathcal{A}$ は sheaf of $\mathcal{R}$-modules over X とよばれる。

(I) a を $\mathcal{A}$ の点とすると，a を含む $\mathcal{A}$ の開集合 U と X の開集合 N が存在して，U と N は π' で位相同型。

(II) $\mathcal{R}+\mathcal{A}=\{(r,a) \mid r\in\mathcal{R},\ a\in\mathcal{A},\ \pi(r)=\pi'(a)\}$, $\mathcal{A}+\mathcal{A}=\{(a,b) \mid \pi'(a)=\pi'(b)\}$ とおき，それぞれ積空間 $\mathcal{R}\times\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ の部分空間とみる。この時，$(r,a)\mapsto ra$, $(a,b)\mapsto a+b$ はそれぞれ $\mathcal{R}+\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}$ へ，$\mathcal{A}+\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}$ への連続写像。

<u>定義 1.3.</u> $(X,\mathcal{R})$ は ringed space とする。X から $\mathcal{R}$ への連続写像 σ は $\pi(\sigma(x))=x$ for all $x\in X$ が言える時（$(X,\mathcal{R})$ の）section とよばれる。ここに，section の全体を $\Gamma(X,\mathcal{R})$ で表わす。$\mathcal{A}$ が sheaf of $\mathcal{R}$-modules over X である時，（$\mathcal{A}$ の）section が同様に定義され，section の全体を $\Gamma(X,\mathcal{A})$ で表わす。

次の補題は sheaf に関する基本的性質である。

<u>補題 1.4</u> ([11, 3.2]). $(X,\mathcal{R})$ は ringed space, $\mathcal{A}$ は sheaf of $\mathcal{R}$-modules over X とすると次が言える。

(1) $\Gamma(X,\mathcal{R})$ は $(\sigma_1+\sigma_2)(x)=\sigma_1(x)+\sigma_2(x)$, $\sigma_1\sigma_2(x)=\sigma_1(x)\sigma_2(x)$, $0(x)=0_x$, $1(x)=1_x$ なる演算で環になり，（ただし，0_x は $\mathcal{R}_x$ の零元），$\Gamma(X,\mathcal{A})$ は $(z_1+z_2)(x)=z_1(x)+z_2(x)$, $\sigma z(x)=\sigma(x)z(x)$ なる演算で $\Gamma(X,\mathcal{R})$-加群になる。

(ロ) Y を X の部分集合とし，$\mathcal{R}_Y=\bigcup_{x\in Y}\mathcal{R}_x$，$\mathcal{A}_Y=\bigcup_{x\in Y}\mathcal{A}_x$ とおく。Y, $\mathcal{R}_Y$, $\mathcal{A}_Y$ をそれぞれ X, $\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$ の relative topology で部分空間とみると $(Y,\mathcal{R}_Y)$ は ringed space になり $\mathcal{A}_Y$ は sheaf of $\mathcal{R}_Y$-module over X になる。

(ハ) $\mathcal{R}_x$ の点 r ($\mathcal{A}_x$の点 a) が与えられると $\exists$ xの近傍N, $\exists\,\sigma\in\Gamma(N,\mathcal{R}_N)$ $(\exists\, z\in\Gamma(N,\mathcal{A}_N))$: $\sigma(x)=r$ $(z(x)=a)$.

(ニ) y は $Y\subseteq X$ の点とし，$\sigma_1,\sigma_2\in\Gamma(Y,\mathcal{R}_Y)$，$z_1,z_2\in\Gamma(Y,\mathcal{A}_Y)$ とする。$\sigma_1(x)=\sigma_2(x)$ $(z_1(x)=z_2(x))\Longrightarrow\exists$ xの近傍$N\subseteq X$: $\sigma_1(y)=\sigma_2(y)$ $(z_1(y)=z_2(y))$ for all $y\in N\cap Y$。

[b]. reduced ringed space.

compact な totally disconnected Hausdorff 空間は簡単に <u>Boolean space</u> とよばれる。この呼称の由来は多分かかる空間が Boolean ring の spectrum で尽されるからであろう。"totally disconnected" 空間とは<u>近傍系</u>として<u>開閉集合族</u>が選べる空間であるからそれは言葉から受ける印象よりも直感し易い。

容易にわかるように Boolean space X は <u>partition property</u> と呼ばれる次の性質をもつ：$X=\bigcup_{i\in I}N_i$，N_i は開集合 $\Longrightarrow\exists$ 開閉集合 $M_1,\dots,M_n$ such that

(i) 各 $j\leq n$ に対して $\exists\, i\in I$: $M_j\subseteq N_i$,

(ii) $M_j\cap M_k=\phi$ if $j\neq k$,

(iii) $X = \bigcup_{j=1}^{n} M_j$.

定義 1.5. ringed space $(X, \mathcal{R})$ は次の2つの条件が満たされる時 reduced と呼ばれる：

(1) X は Boolean space である.

(2) $\sigma\ (\in \Gamma(X, \mathcal{R}))$ が巾等元ならば X の任意の点 x に対して $\sigma(x) = 0_x$ or 1_x.

注意. (イ) 上の定義における条件(2)は次の条件で置きかえてもかまわない："X の各点 x に対して $\mathcal{R}_x$ は直既約環である".

(ロ) $(X, \mathcal{R})$ は ringed space, N は X の開閉集合とする.
$\sigma_N(x) = \begin{cases} 0_x & (x \in X - N) \\ 1_x & (x \in N) \end{cases}$ で定義される写像 σ_N は $\Gamma(X, \mathcal{R})$ の巾等元である. 特に, $(X, \mathcal{R})$ が reduced ならば $\Gamma(X, \mathcal{R})$ の巾等元はかかる σ_N で尽される.

[C]. Pierce の2つの定理.

R は環とする。R の巾等元の全体からなる Boolean ring を $B(R)$ で記し, $X(R) = \mathrm{Spec}(B(R))$ で略記する。$B(R)$ の元 e に対し, $U_e^{B(R)} = \{ x \in X(R) \mid e \in x \}$ とおくと $X = U_e^{B(R)} \cup U_{1-e}^{B(R)}$, $U_e^{B(R)} \cap U_{1-e}^{B(R)} = \phi$. 従って, $\{ U_e^{B(R)} \mid e \in B(R) \}$ を近傍系にもつ空間 $X(R)$ は Boolean space をなす.

さて, $X(R)$ の各点 x に対し $R_x = R/Rx$ と略記する。ただし, $Rx = \{ er \mid e \in x, r \in R \}$. ここで, $x_1 \neq x_2$ ならば $R_{x_1} \cap R_{x_2} = \phi$ とみて $\mathcal{R}(R) = \bigcup_{x \in X(R)} R_x$ とおく. R の元 r に対し

σ_r は $x \mapsto r + Rx$ なる $X(R)$ から $\mathcal{R}(R)$ への写像とする。もし $\sigma_r(x) = \sigma_{r'}(x)$ ならば $B(R)$ の元 e で $x \in U_e^{B(R)}$ & $\sigma_r(y) = \sigma_{r'}(y)$ for all $y \in U_e^{B(R)}$ をみたすものが存在する。これより, $B(R)$ は $\{ \sigma_r(U_e^{B(R)}) \mid r \in R, e \in B(R) \}$ を開基にもつ位相空間になることが容易に判るが, 更に次の定理が云える。

<u>定理 1.6</u> ([11, 4.4]). $(X(R), \mathcal{R}(R))$ は reduced ringed space で, 写像 $\xi_R : r \mapsto \sigma_r$ は R から $\Gamma(X(R), \mathcal{R}(R))$ への環同型を与える。

<u>注意</u>. $R \overset{\xi_R}{\simeq} \Gamma(X(R), \mathcal{R}(R))$ より $X(R) \simeq X(\Gamma(X(R), \mathcal{R}(R)))$. 正確には, $X(R)$ の点 x に対し, $\mathfrak{m}_x = \{ \sigma \in B(X(R), \mathcal{R}(R)) \mid \sigma(x) = 0 \}$ とおくと, $\mathfrak{m}_x = \{ \xi_R(e) \mid e \in x \}$ となるが, $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ なる対応で, $X(R)$ と $X(\Gamma(X(R), \mathcal{R}(R)))$ は位相同型になる ([11, 5.2]).

また, A は R-加群とする。$X(R)$ の点 x に対し $A_x = A/Ax$ と略記し, $x_1 \neq x_2$ ならば $A_x \cap A_y = \phi$ とみて $\mathcal{A}(A) = \bigcup_{x \in X(R)} A_x$ とおく。$a \in A$ に対し, z_a を $x \mapsto a + Ax$ なる $X(R)$ から $\mathcal{A}(A)$ への写像とすると $\mathcal{A}(A)$ は $\{ z_a(U_e^{B(R)}) \mid e \in B(R), a \in A \}$ を開基にもつ位相空間になって次が成り立つ。

<u>定理 1.7</u> ([11, 4.5]). $\mathcal{A}(A)$ は sheaf of $\mathcal{R}(R)$-modules over X をなし, 写像 $\xi_A : a \mapsto z_a$ で A と $\Gamma(X(R), \mathcal{A}(A))$ は群同型になる。この時, $\xi_R(r)\xi_A(a) = \xi_A(ra)$ for $r \in R$, $a \in A$.

[d]. simple sheaf.

定義 1.8. Xは位相空間，Rは任意の環とする。Rを離散位相で空間とみて，積空間 $X \times R$ を $\mathcal{R}$で記し，Xの点xに対し$\{x\} \times R$を$\mathcal{R}_x$で記す。このとき$\mathcal{R}$はxに対するstalkを$\mathcal{R}_x$にもつ sheaf of rings over Xになる（[11, 11.2]）．このように構成される sheaf $\mathcal{R} = R \times X$ は simple R-sheaf over Xと呼ばれる。

注意．(イ) $\mathcal{R}$が simple R-sheaf over Xとすると環$\Gamma(X, \mathcal{R})$はXからRへの連続関数の全体からなる環と同型になる．従って，$(X, \mathcal{R})$が reduced $\Longleftrightarrow$ Xは Boolean space でRは直既約．　(ロ) Xをある Boolean space, Rを$GF(2)$とするとき$\Gamma(X, X \times R)$は Boolean ring になる。しかも，Boolean ring の全体はかかる環で尽される．

[e]．（ノイマンの意味での）正則環．

命題 1.9. $(X, \mathcal{R})$は reduced ringed space とする。この時，$\Gamma(X, \mathcal{R})$が正則環である $\Longleftrightarrow$ 各 stalk $\mathcal{R}_x$は体である。これより，環Rが正則環である$\Longleftrightarrow$ $X(R)$の各点xに対しR_xは体．

[f]. regular ideal.

Rは環，IはRのイデアルとする．Iが regular イデアルであるとはIがそれ自身に含まれる巾等元から生成されているとき（i.e. $I = B(I)R$）を言う．例えば，正則環の任意のイデアルは regular である．

補題 1.10. Rは環とする。Rのregularイデアルの全体とX(R)の閉集合の全体との間には次のように1対1対応がある:

(1) X(R)の任意の閉集合Yに対し，自然な環準同型

$$\Gamma(X(R),\mathcal{R}(R)) \overset{\varphi}{\rightsquigarrow} \Gamma(Y,\mathcal{R}(R)_Y)$$

は上への準同型で，その核はregularイデアルになる。

(2) 逆に，$\Gamma(X(R),\mathcal{R}(R))$のregularイデアルIが与えられるとX(R)の閉集合Yがあって，Iは自然な環準同型

$$\Gamma(X(R),\mathcal{R}(R)) \rightsquigarrow \Gamma(Y,\mathcal{R}(R)_Y)$$

の核になる。

証明. (1) φがepimorphismになる理由はYが閉集合であるからcompactであることに注意し，X(R)のpartition propertyを使えばすぐわかる。φの核は$\bigcap_{y\in Y} R_y$に他ならないが，Yが閉集合であることより，それがregularイデアルであることも容易にわかる。(2) Iを$\Gamma(X(R),\mathcal{R}(R))$のregularイデアルとする。$U=\bigcup\{N \mid N$は$0_N\in I$なるX(R)の開閉集合$\}$とおくとき，$X(R)-U$が求める閉集合Yである。

§2. Baer hull.

環Rに対し，そのmaximal ring of quotientsをQ(R)で記す。Rがsemi-primeならRはBaer hullとよばれるunique minimal Baer ring of quotientsをもつが，それはQ(R)の中でRとQ(R)の

巾等元の全体 $B(Q(R))$ から生成される環と一致する（[4]）.

R が正則環であるとき，全ての有限生成 torsion free R-加群が巡回 R-加群の直和に書けるならば R の Baer hull は $Q(R)$ に一致する（[6], [8]）. 従って，この小論において Baer hull を調べることが大変重要な意味をもつ. 一見，Baer hull は $\sum_{e\in B(Q(R))} Re$ と既に形が明確のように思える. しかし，$Q(R)$ は存在はするが，具体的に何かとなると一般にはわからないのだから，$\sum_{e\in B(Q(R))} Re$ のままでは Baer hull の正体は不明である. そこで，我々としては R から出発して，より具体的に，$Q(R)$ よりもなるべく具現性のあるものを通して R の Baer hull を構築したい.

さて，R が正則環ならば，$B(Q(R))$ は $B(R)$ の maximal ring of quotients $Q(B(R))$ になっている. さらに，その Baer hull C は次の3つの条件を満たす環として特徴づけられることが容易にわかる：(a) C は共通単位元をもつ R の拡大環，(b) $B(C)=Q(B(R))$，(c) $C=\sum_{e\in B(C)} Re$. この条件(b)，(c)に注目して，一般の環 R に対しても，これらの各条件を満足するような環 C を前節の sheaf の理論を用いて構成しようというのがこの節のねらいである. $Q(R)$ は何物か不明でも $B(Q(R))$ は判然とする場合が多い.

R は環とする. $\mathrm{Spec}\,(B(R))$ を $X(R)$ で略記したが，$\mathrm{Spec}(Q(B(R))$

を$Y(R)$で記し，$Y(R)$から$X(R)$への自然な写像($y \mapsto B(R) \cap y$)をλで記す．λは閉連続写像である．

<u>補題 2.1</u>([7])．Mは$Y(R)$の閉集合とする．Mが空でなければ，$\phi \neq U_e^{Q(B(R))} \subseteq M$なる$B(R)$の元$e$がある．

<u>補題 2.2</u>([7])．yは$Y(R)$の非孤立点，eは$Q(B(R))$の元で$y \in U_e^{Q(B(R))}$とする．このとき，$B(R)$の元fで，$y \notin U_f^{Q(B(R))}$ & $\phi \neq U_f^{Q(B(R))} \subseteq U_e^{Q(B(R))}$を満足するものがある．

さて，$Y(R)$の点yに対し，$R_{\lambda(y)}$を$\mathcal{R}_y$で記し，$y_1 \neq y_2$ならば$\mathcal{R}_{y_1} \cap \mathcal{R}_{y_2} = \phi$とみて

$$\mathcal{R}^*(R) = \bigcup_{y \in Y(R)} \mathcal{R}_y$$

とおこう．rはRの元とするとき，$\Gamma(X(R), \mathcal{R}(R))$の元$\sigma_r$($x \mapsto r_x$)は周知だが，これに対し$y \mapsto r_{\lambda(y)}$なる$Y(R)$から$\mathcal{R}^*(R)$への写像を$\overline{\sigma_r}$で記す．このとき，$\mathcal{R}^*(R)$は集合族

$$\{\overline{\sigma_r}(U_e^{Q(B(R))}) \mid r \in R,\ e \in Q(B(R))\}$$

を開基にもつ位相空間になることが容易に確かめられ，さらに，$\mathcal{R}^*(R)$は reduced sheaf of rings over $Y(R)$ になることも検証できる．ここで，勿論，$y(\in Y(R))$に対応する stalk は$\mathcal{R}_y = R_{\lambda(y)}$である．

ringed space ($Y(R), \mathcal{R}^*(R)$)について次のことが云える．

<u>定理 2.3</u>．$\Gamma(Y(R), \mathcal{R}^*(R))$は共通単位元をもつ$\Gamma(X(R), \mathcal{R}(R))$の拡大環になり，次の2つの条件を満足する：

(a) $B(\Gamma(Y(R),\mathcal{R}^*(R))) = Q(B(\Gamma(X(R),\mathcal{R}(R))))$,

(b) $\Gamma(Y(R),\mathcal{R}^*(R)) = \sum_{\alpha\in B(\Gamma(Y(R),\mathcal{R}^*(R)))} \Gamma(X(R),\mathcal{R}(R))\alpha$.

証明の方針. σは$\Gamma(X(R),\mathcal{R}(R))$の元, yは$Y(R)$の点とする. その時, $\exists r^*\in R : \sigma(\lambda(y)) = r^*_{\lambda(y)}$. r^*はyに依存して決まるが, $\sigma\circ\lambda$が連続写像であることより, yのある近傍でr^*を同じにとれる. これより, $y \mapsto r^*_{\lambda(y)}$ なる$Y(R)$から$\mathcal{R}^*(R)$への写像をσ^*で表わすと, σ^*は section になる. σにσ^*を対応させる写像は$\Gamma(X(R),\mathcal{R}(R))$から$\Gamma(Y(R),\mathcal{R}^*(R)$の中への環同型を与える. 次に, σは$\Gamma(Y(R),\mathcal{R}^*(R))$の元とする. $Y(R)$の点yに対し, $\exists r\in R\in R : \sigma(y) = r_{\lambda(y)} = \overline{\sigma_r}(y) = \sigma^*_r(y)$. ここで, partition property を使えば, $Y(R)$の互いに交わらない開閉集合 $M_1,\dots,M_n$ とRの元 $r_1,\dots,r_n$ があってσは

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma^*_{r_i}\,\sigma_{M_i}$$

とかける。これより, (b)が言えた. $B(\Gamma(Y(R),\mathcal{R}^*(R)))$が $Q(B(\Gamma(X(R),\mathcal{R}(R))))$ になることは $X(\Gamma(Y(R),\mathcal{R}^*(R)))$ と $Y(R)$は位相同型であることと $B(\Gamma(Y(R),\mathcal{R}^*(R)))$が $B(\Gamma(X(R),\mathcal{R}(R)))$の essential 拡大になっていることを調べればよい。

系 2.4. Rが正則環ならば$\Gamma(Y(R),\mathcal{R}^*(R))$は$R$の Baer hull である.

Notation. 以下, Rと$\Gamma(X(R),\mathcal{R}(R))$は同一視する. 又, $\Gamma(Y(R),\mathcal{R}^*(R))$ を $C(R)$で記す. $C(R)$はRの拡大環とみる訳だが

この時，特に次のような点に注意すべきである： $Y(R)$ の開閉集合 M と R の元 r に対し $r\sigma_M$ と書けば，その正確な意味は $\sigma_r^*\sigma_M$ のことである． σ は $C(R)$ の元，x は $X(R)$ の点とする．$C(R)$ は R-加群だから σ_x の意味は承知だが，その正確な意味は $\sigma_{m(x)}$ のこと。ただし，$m(x)$ は $\{\alpha \in B(\Gamma(X(R), \mathcal{R}(R))) \mid \alpha(x)=0\}$ のことであった．

環 R について次の3つの補題が成立するが，いずれも次節より頻繁に使われる．

補題 2.5. M は $Y(R)$ の開閉集合，x は $X(R)$ の点とする。そのとき，$\sigma_{M_x} \neq 0_x \Longleftrightarrow \lambda^{-1}(x) \cap M \neq \phi$

証明. $\Rightarrow$: $0_x \neq \sigma_{M_x} = \sigma_{M_{m(x)}}$ とし，$\lambda^{-1}(x) \cap M = \phi$ としよう．λ は閉写像で $\lambda(M) \not\ni x$ であるから，$\exists$ 開閉集合 $U \subseteq X$ such that $x \in U$，$U \cap \lambda(M) = \phi$. 明らかに，$\sigma_M \sigma_U^* = 0$. $\sigma_{M_x} \neq 0_x$ より $\sigma^*_{U_x} = 0_x$． これより $x \notin U$，矛盾.

$\Leftarrow$: $\lambda^{-1}(x) \cap M \neq \phi$ とする。もし，$\sigma_{M_x} = 0_x$ ならば，$\exists$ $X(R)$ の開閉集合 U such that $\sigma_M(1-\sigma_U^*)=0$, $\sigma_U \in m(x)$. y を $\lambda(y)=x$ なる M の点とすると，$1_{\lambda(y)} = \sigma_M(y) = \sigma_U^*(y) = 0_{\lambda(y)}$ となって矛盾.

補題 2.6. r は R の元，M は $Y(R)$ の開閉集合，そして，x は $\lambda^{-1}(x) \cap M \neq \phi$ なる $X(R)$ の点とする。その時，$r_x\sigma_{M_x} = 0_x$ ならば $r_x = 0_x$ である。

証明. $O_x = r_x\sigma_{M_x} = \sigma_{r_x}^*\sigma_{M_x} \Longrightarrow \exists$ 開閉集合 $U \subseteq X(R)$ such that $(\sigma_r^*\sigma_M)(1-\sigma_U^*) = 0$, $\sigma_U \in \mathfrak{m}(x)$. y を $\lambda(y)=x$ なる M の点とすると $O_{\lambda(y)} = \sigma_r^*\sigma_M(1-\sigma_U^*)(y) = r_{\lambda(y)}$. よって, $O_x = r_x$.

補題 2.7. x は $X(R)$ の非孤立点, M は($\lambda^{-1}(x)\cap M\neq\phi$ なる)$Y(R)$ の開閉集合とする。ここで, $W = \bigcup\{X(R)$の開集合 U | ($x\notin U$) $\lambda^{-1}(U)\subseteq M\}$ とおくと $x \in W^- - W$.

証明. $y\in Y(R)$, $\lambda(y)=x$ とする時, もし, $x\in U_e^{B(R)}$ ($e\in B(R)$) ならば $y\in U_e^{Q(B(R))}$. この事実と補題 2.2 を使用すればよい。

§3. ξ-point と α-point.

X は位相空間, x は X の点, ξ は任意の ordinal number とする。すべての $\eta<\xi$ に対して $x\in U_\eta^- - U_\eta$ が成り立つような(互いに交わらない)X の~~ある~~開集合族 $\{U_\eta \mid \eta<\xi\}$ が存在するとき, x は ξ-point であると呼ばれる. これは Pierce ([1, 20.2]) による定義である. 一方, Hindman [2] では ordinal number ξ が cardinal number α に代って, closure が x を含むような α 個の互いに交わらない X の開集合が存在するとき, x は α-point であると呼ばれている.

注意. 自然数 n について n-point といえば, それが Pierce の意味によるものなのか, それとも Hindman のそれなのかが気にかかるが, $n\neq 1$ ならば両者は一致している。しかし

一応ここでは n-point の意味は Hindman に従うことにする.

命題 3.1 (cf. [7, 3.2]). R は環とし, x は $X(R)$ の点とする. n は自然数, $\aleph_0$ は first infinite cardinal number, α は任意の cardinal number とする. そのとき, 次の評価を得る.

(a) x は n-point である $\Longleftrightarrow$ $n \leq |\lambda^{-1}(x)|$, ただし, $|\lambda^{-1}(x)|$ は $\lambda^{-1}(x)$ の個数を表わす.

(b) x は $\aleph_0$-point である $\Longleftrightarrow$ $\aleph_0 \leq |\lambda^{-1}(x)|$.

(c) x が α-point である $\Longrightarrow$ $\alpha \leq |\lambda^{-1}(x)|$.

(c) の逆が言えるかどうかわからない。例えば, $\alpha = 2^{\aleph_0}$ の場合はどうか?

命題 3.2. R は $C(R) = Q(R)$ が成り立つ正則環とする. $X(R)$ の任意の点 x について, $n \leq |\lambda^{-1}(x)| \Longleftrightarrow n \leq [Q(R)_x : R_x]$ が言える. ただし, $[Q(R)_x : R_x]$ は $Q(R)_x$ の R_x 上 vector space としての rank を表わす.

命題 3.1, 3.2, [11, 13.8] より次の定理を得る.

定理 3.3. R は $C(R) = Q(R)$ が成立する正則環とするとき次の条件は同値である.

(1) $|\lambda^{-1}(x)| \leq n$ for all $x \in X(R)$.

(2) $X(R)$ は $(n+1)$-point をもたない.

(3) $[Q(R)_x : R_x] \leq n$ for all $x \in X(R)$.

(4) $Q(R)$ の有限生成 R-部分加群は n 個の元で生成される.

注意. 任意の自然数 n について, 次の性質をみたすような Boolean ring R の例がある([7]):

(a) $X(R)$ の非孤立点は n-point だが $(n+1)$-point でない.

(b) $\exists\, e_1, \cdots, e_n \in Q(R) : Q(R) = Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_n$.

かかる環 R では, 定理3.3より, $Q(R)$ の全ての有限生成 R-部分加群は n 個の元から生成されるが, $n-1$ 個の元からは生成されない訳である.

§4. 3-point をみたさない正則環.

この節では "すべての有限生成 torsion free R-加群が巡回 R-加群の直和である" ような正則環 R は何かを取り扱う.

R は正則環, A は R-加群とする. $X(R)$ の点 x と $X(R)$ の開集合 U に対し

$$E_A(x, U) = \{ a_x \mid a \in A,\ a_y = o_y \text{ for all } y \in U \}$$

とおくと, これは A_x の (R_x 上) subspace をなす([11]). ここで, A_x の全ての subspace からなる束の中で $\{ E_A(x, U) \mid U$ は $X(R)$ の開集合$\}$ から生成される部分束を $\mathcal{L}_A(x)$ で表わす.

補題 4.1 ([11, 17.5]). R は正則環で, A は有限生成 R-加群とする. もし, A が巡回 R-加群の直和にかけるなら

ば，$X(R)$の各点xについて$\mathcal{L}_A(x)$は分配束である．

<u>補題 4.2.</u>　Rは正則環とする．$X(R)$の各点xと$C(R)$の2元から生成される全てのR−部分加群Aについて，$\mathcal{L}_A(x)$が分配束ならば$X(R)$は3-pointをもたない．

<u>証明の方針.</u>　$X(R)$が3-pointをもつとし，その中の1つをxとする．命題3.1より，$|\lambda^{-1}(x)| \geqq 3$が言えるから，$\lambda^{-1}(x)$とは交わる互いに交わらない$Y(R)$の開閉集合$M_1, M_2, M_3$がとれる。ここで

$$W_i = \bigcup \{ U_e^{B(R)} \mid e \in B(R),\ U_e^{Q(B(R))} \subseteq M_i,\ x \notin U_e^{B(R)} \}$$

とおくと補題2.7より$x \in \overline{W_i} - W_i$．

$$A = R(\sigma_{M_1} + \sigma_{M_2}) + R(\sigma_{M_2} + \sigma_{M_3})$$

とおくと$E_A(x, W_1) = R_x(\sigma_{M_2} + \sigma_{M_3})_x$，$E_A(x, W_3) = R_x(\sigma_{M_1} + \sigma_{M_2})_x$，そして，$E_A(x, W_2) = R_x(\sigma_{M_1} - \sigma_{M_3})_x$が証明出来る．すると

$$E_A(x, W_2) \cap (E_A(x, W_1) + E_A(x, W_3)) = E_A(x, W_2),$$

$$(E_A(x, W_2) \cap E_A(x, W_1)) + (E_A(x, W_2) \cap E_A(x, W_3)) = \{0_x\}$$

となって$\mathcal{L}_A(x)$が分配束であることに矛盾する．

<u>補題 4.3.</u>　Rは$C(R) = Q(R)$が成立する正則環とする．もし，$X(R)$が3-pointをもたないならばすべての有限生成torsion free R−加群は巡回R−加群の直和にかける。

<u>証明の方針.</u>　Aは有限生成torsion free R−加群とする．

Aが巡回R—加群の直和にかけることを示すためには[11, 14.2, 15.1]および$X(R)$のpartition propertyから次のことを示せばよい：(*) $X(R)$の任意の点xに対し，xの近傍NとAの有限個の元$a_1, \cdots, a_n$があって，Nの各点zについて$\{ a_{i_z} \mid a_{i_z} \neq 0_z \}$は$A_z$の($R_z$上)基底になる。

xは$X(R)$の点としよう。Aの元$a_1, \cdots, a_n$は$\{ a_{1x}, \cdots, a_{nx} \}$が$A_x$の基底になるように選ぶ。$A_x = (Ra_1 + \cdots + Ra_n)_x$なので$\exists$ xの近傍N_1 : $A_z = (Ra_1 + \cdots + Ra_n)_z$ for all $z \in N_1$.

$Ra_1 + \cdots + Ra_n$はtorsion free R—加群であるから$Q(R)$のn個の直積の中に埋蔵される([14]).

$|\lambda^{-1}(x)| \leq 2$だから次が成りたつように$Y(R)$の開閉集合Mが選べる：

$$\lambda^{-1}(x) \cap M \neq \phi \ \& \ \lambda^{-1}(x) \cap M^c \neq \phi \quad \text{if } x : 2\text{-point},$$

$$\lambda^{-1}(x) \in M \quad \text{if } x : 1\text{-point}.$$

このとき，xが1-pointならば$Q(R)_x = R_x \sigma_{M_x}$になり，$x$が2-pointならば$Q(R)_x = (R\sigma_M + R\sigma_{M^c})_x$になることが確かめられる。これより次の2つの場合に分けて考える。

Case 1. xは1-point。このとき，

$$a_{1x} = r_{11x}\sigma_{M_x} \times \cdots \times r_{1nx}\sigma_{M_x},$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{nx} = r_{n1x}\sigma_{M_x} \times \cdots \times r_{nnx}\sigma_{M_x}$$

$(r_{ij} \in R)$ と表わそう.

$$b_1 = \sigma_M \times 0 \times \cdots \times 0,$$
$$b_2 = 0 \times \sigma_M \times 0 \times \cdots \times 0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$b_n = 0 \times \cdots \times 0 \times \sigma_M$$

とおくと $(Ra_1 + \cdots + Ra_n)_x = (Rb_1 + \cdots + Rb_n)_x$. 従って, $Ra_1 + \cdots + Ra_n$ の元 $c_1, \cdots, c_n$ と x の近傍 N_2 があって, N_2 の各点 z に対して $Rb_{i_z} = Rc_{i_z}$ $(i=1,\cdots,n)$ が成りたつ。このとき, N_2 の各点 z について $b_{1z}, \cdots, b_{nz}$ は一次独立である. よって, $N_1 \cap N_2$ と $c_1, \cdots, c_n$ が求める(*)での x の近傍と A の元である.

Case 2. x は 2-point.

$$a_{1x} = (r_{11}\sigma_M + s_{11}\sigma_{M^c})_x \times \cdots \times (r_{1n}\sigma_M + s_{1n}\sigma_{M^c})_x,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{nx} = (r_{n1}\sigma_M + s_{n1}\sigma_{M^c})_x \times \cdots \times (r_{nn}\sigma_M + s_{nn}\sigma_{M^c})_x$$

$(r_{ij}, s_{ij} \in R)$ と表わそう. このとき, 計算は大変厄介だけど, $a_{1x}, \cdots, a_{nx}$ に対して適当に change of basis を施して(*)が言えるような x の近傍と A の元を見つけるのである.

注意. Boolean space の上の有限体 F から出来る simple F-sheaf の全ての section からなる環について, 上の補題は Pierce [11, 20.4] で示されている。しかし, かかる正則環 R では $C(R) = Q(R)$ が成りたつから ([7]), 我々の補題は

Pierceの結果の拡張になっている.

次の定理がこの節の主定理である.

<u>定理 4.4.</u> Rは正則環とする. 次の各条件は同値である:

(a) すべての有限生成 torsion free R-加群は巡回R-加群の直和にかける.

(b) Q(R)のすべての有限生成 R-部分加群は巡回R-加群の直和にかける.

(c) Q(R)の(すべての)2元から生成される R-部分加群は巡回 R-加群の直和にかける.

(d) $C(R)=Q(R)$, $X(R)$の各点 x について $|\lambda^{-1}(x)|\leq 2$.

(e) $C(R)=Q(R)$, $X(R)$は 3-point をもたない.

(f) $C(R)=Q(R)$, $X(R)$の各点 x について $[Q(R)_x : R_x]\leq 2$.

(g) $C(R)=Q(R)$, すべての有限生成 torsion free R-加群Aについて, 各 $\mathcal{L}_A(x)$ は分配束である.

(h) $C(R)=Q(R)$, Q(R)の全ての有限生成 R-部分加群Aについて, 各 $\mathcal{L}_A(x)$ は分配束である.

(i) $C(R)=Q(R)$, Q(R)の全ての2元から生成される R-部分加群Aについて, 各 $\mathcal{L}_A(x)$ は分配束である.

証明は定理 3.3, 補題 4.1, 4.2, 4.3 および [6, 3.4] に従う.

<u>注意.</u> regular Baer ring Rで, $(R=)\ C(R)\neq Q(R)$ で

あって，$Q(R)$ は R−加群とみて2元から生成されるような例がある（[7, 例 C]）．よって上定理において条件 $C(R)=Q(R)$ は (d)，(e)，(f) の中から省けない。又，Baer ring の上では，任意の torsion free R−加群 A について各 $\mathcal{L}_x(A)$ は分配束であることが証明出来るので，(h)，(i)，(j) の中で又条件 $C(R)=Q(R)$ は省けない．

系 4.5．R は $C(R)=Q(R)$ が成り立つ正則環とする．もし，$Q(R)$ が R−加群とみて2元から生成されるならば，全ての有限生成 torsion free R−加群は巡回 R−加群の直和にかける。

（この系の逆が言えるかどうかは興味ある問題だと思う。）

§5. FGC−環.

次の性質(*)をみたす環 R は何か？：(*) 全ての有限生成 R−加群は巡回 R−加群の直和にかける。これは良く知られた古典的な問題である。幸い，Shores [12] にこの問題について の歴史が丁寧に述べられているので参照するとよい．

Shore [12] にならって，環 R が (*) をみたすとき，R を FGC−環と呼ぶ．

次の定理はよく知られている．

定理 A．単項イデアル整域は FGC−環である．

次の定理は Gill ([1]) と Lafon ([3]) によって独立に証明された。

<u>定理 B.</u> 局所環 R が FGC-環である必十条件は R が almost maximal valuation ring である。

次の Pierce の定理 ([11, 21.7]) に注目しよう。

<u>定理 C.</u> 正則環 R が FGC-環ならば R は有限個の体の直和である。

つまり，正則環 R について次が言える：(**) R が FGC-環であるならば $X(R)$ (従って, $B(R)$) は有限集合である。

この (**) は一般の環 R についても言えるか？ この節では，この興味深い問題 ([13] でも open problem になっている) に関係する 2, 3 の結果を示す。

Pierce は (**) を示す為に次の補題を連続体仮説 (cf. [1]) を使ったりして非常に巧みに証明している。

<u>補題 5.1</u> ([11, 21.5]). Boolean space X が無限集合ならば 3-point をもつ X の閉集合が存在する。

(**) はこの補題と正則環 R の上で全ての有限生成 (torsion free) R-加群が巡回 R-加群の直和にかけるならば $X(R)$ は 3-point をもたないという結果と命題 1.10 に従うのである。

さて，R は一般の環とする。$X(R)$ が 3-point をもつとし，その中の 1 つを x とする。この時，

$$Y(R) = M_1 \cup M_2 \cup M_3,$$
$$M_i \cap M_j = \phi \quad (i \neq j),$$
$$M_i \cap \lambda^{-1}(x) \neq \phi \quad (i = 1, 2, 3)$$

となるようにY(R)の開閉集合 M_1, M_2, M_3 を選ぶ。ここで、

$$A = R(\sigma_{M_1} + \sigma_{M_2}) + R(\sigma_{M_2} + \sigma_{M_3}) \quad \cdots\cdots (\#)$$

とおくとき，我々は次の問題を提起する："A が巡回R-加群の直和にかける場合があるか？"

注意．補題 2.6 を用いて A は巡回R-加群でないことが判る

定義 5.2．環Rは R-加群とみて exchange property をもつとき exchange ring であると呼ばれる（[5]）．

補題 5.3（[5]）．環Rは exchange ring である $\Longleftrightarrow$ X(R)の各点xについて R_x が局所環である。

補題 5.4．R が FGC-exchange ring であるならば X(R) は 3-point をもたない．

証明の方針．X(R)が 3-point x をもったとし，(#)のようにして A を作る。A を巡回R-加群の直和で表わして，補題 2.6 と 5.3 を用いた計算で矛盾を導く。

定理 5.5．exchange ring R が FGC-環であるならばRは almost maximal valuation ring の有限個の直和にかける。この逆も正しい。

証明．R が exchange ring ならば R の任意のイデアル I に対

して R/I も exchange ring である([5]). 従って, 補題1.10, 5.1, 5.3, 5.4 より必要条件は言える。逆は定理Bよりよい。

定義 5.6. Rは環とする。Rの任意の元 r の $\mathrm{supp}(r)$ $(=\{x \in X(R) \mid r_x \neq 0_x\})$ が開集合であるとき, Rは s-環であると呼ぶことにする.

s-環の例. (1) p.p.-環. (2) Boolean space Xと直既約環Sとで作られる環 $\Gamma(X, X \times S)$. (3) Rが s-環ならばRの任意の正則イデアルIに対して R/I も s-環である.

exchange ring の場合と同様にして次の補題及び定理が言える。

補題 5.7. s-環Rが FGC-環であるならば $X(R)$ は3-pointをもたない.

定理 5.8. s-環Rが FGC-環であるならばRは有限個の直既約な FGC-環の直和にかける。

系 5.9 ([13]). P.P.-環Rが FGC-環であるならばRは有限個の整域の直和にかける.

FGC-環は Bezout 環であるから, 上系と定理Aより

系 5.10. Hereditary 環Rが FGC-環であるならばRは有限個の主イデアル整域の直和にかける。

参考文献

[1] D.T.Gill, Almost maximal valuation ring, J.London Math. Soc. (2) 4(1971), 140-146.

[2] N.Hindman, On the existence of point in $\beta N\backslash N$, Proc. Amer. Math. Soc. 21(1969), 277-280.

[3] J.P.Lafon, Anneux Locaux commutativs sur lesquels tout module de type fini est some discrete de modules monogenes, J. Algebra 17(1971), 575-591.

[4] A.C.Mewborn, Regular rings and Baer rings, Math. Z. 121(1971), 211-219.

[5] G.S.Monk, A characterization of exchange rings, Proc. Amer. Math. Soc. 35(1972) 349-353.

[6] K.Oshiro, On torsion free modules over regular rings, Math. J. Okayama Univ. Vol. 16(1973), 107-114.

[7] ...., On torsion free modules over regular rings II, Math. J. Okayama Univ. Vol. 16,No2(1974), 199-205.

[8] ...., Note on direct sums of cyclic modules over regular rings, to apper.

[9] ...., On torsion free modules over regular rings III, to apper. (§2～§4の詳細)

[10] ...., Commutative FGC exchange rings and FGC hereditary rings, to apper. (§5の詳細)

[11] R.S.Pierce, Modules over commutative regular rings, Mem. Amer. Math. Soc. 128(1967).

[12] T.S.Shores, Bezout modules and their modules, Ring theory Proc. Oklahoma Conf.,1973.

[13] ..... and R.Wiegand, Rings whose finitely generated modules are direct sums of cyclics, J. Algebra 32(1974), 152-172.

[14] J. Zelmanowitz, Injective hulls of torsion free modules, Canad. J. Math. 23(1971), 1094-1101.