数理解析研究所講究録
第 235 巻 1975 年 66-74

高次微分とその応用

福岡教育大学　石橋康徳

R を algebraic variety V/k 上の点の local ring とし、$\Omega^1_k(R)$ を R の k-differentials のなす R-module とする。簡単のために k は perfect field とする。次のことはよく知られている。

(1) Y. Nakai [8], E. Kunz [5].

R は regular local ring である。$\Longleftrightarrow$ $\Omega^1_k(R)$ は free R-module である。

したがって、$\mathrm{Der}^1(R/k) \cong \mathrm{Hom}_R(\Omega^1_k(R), R)$ を考えると、R が regular ならば、$\mathrm{Der}^1(R/k)$ は free R-module である。この逆について、次のことが分っている。

(2) J. Lipman [6].

k の標数が 0 のときには、$\mathrm{Der}^1(R/k)$ が R-free ならば、R は normal である。特に、$\dim V = 1$ ならば、R は regular である。

$\dim V \geq 2$ のときにも、R は regular であるだろうと予想されているが、未だ解決していない。この予想に関して、最も良い結果は次のものであろう。

(3) G. Scheja – U. Storch [10].

kの標数が0で、Vがhypersurfaceのときには、$\mathrm{Der}^1(R/k)$がR-freeならば、Rはregularである。

ところで、kの標数が$p>0$のときには、$\dim V = 1$であっても、$\mathrm{Der}^1(R/k)$のR-freenessはRのregularityを意味しない。[6].

これらに対して、高次微分を使って、Rのregularityを特徴づけられないかと考える。現に、いくつかの結果が得られているが、それらについて述べる前に少し準備をしよう。

k, Rをcommutative ringsとし、Rをk-algebraとする。k-linear mapping $D: R \to R$が、n-th order derivationであるとは、$\forall x_0, x_1, \cdots, x_n \in R$に対して、

$$D(x_0 x_1 \cdots x_n) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_s} x_{i_1} \cdots x_{i_s} D(x_0 \cdots \hat{x}_{i_1} \cdots \hat{x}_{i_s} \cdots x_n)$$

となるときをいう。

$R/k \to R$なるn-th order derivations全体の集合を$\mathrm{Der}^n(R/k)$と表わすと、$\mathrm{Der}^n(R/k)$は、自然にleft R-moduleになる。

次のことが分っている。[9].

a) $m \geq n \Rightarrow \mathrm{Der}^n(R/k) \subset \mathrm{Der}^m(R/k)$.

$\mathrm{Der}^n(R/k) - \mathrm{Der}^{n-1}(R/k)$の元を、proper n-th order derivationという。

b) $D \in \mathrm{Der}^m(R/k)$, $E \in \mathrm{Der}^n(R/k) \Rightarrow DE \in \mathrm{Der}^{m+n}(R/k)$.

したがって.

$$\mathrm{Der}(R/k) = R \oplus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Der}^n(R/k)$$

とおくと．これは $\mathrm{Hom}_k(R, R)$ の subring になる．$\mathrm{Der}(R/k)$を R/k の derivation algebra という．一方．$\mathrm{Der}^1(R/k)$によって生成される $\mathrm{Der}(R/k)$ の subalgebra を $\mathrm{der}(R/k)$ と表わす．

Y. Nakai の予想.

Rを algebraic variety V/k 上の点の local ring とする．kの標数が0ならば．次のことは同値である．

1) Rは regular である．

2) $\mathrm{Der}(R/k) = \mathrm{der}(R/k)$.

これに関連して．次のような予想がある．

T. Bloom の予想.

Vを analytic space とし．$p \in V$ とする．$\mathrm{Diff}(V)$によって．V上の differential operators の sheaf を表わす．この sheaf の点 p における stalk $\mathrm{Diff}_p(V)$ が $\mathcal{O}_p(V)$-algebra として．$\mathrm{Der}_p^1(V)$によって生成されるならば．Vは p で non-singular である．

注意．$\mathrm{Diff}_p(V) = \mathrm{Der}(\mathcal{O}_p(V)/\mathbb{C})$，$\mathrm{Der}_p^1(V) = \mathrm{Der}^1(\mathcal{O}_p(V)/\mathbb{C})$ である．

Y. Nakai の予想について.

1)$\Rightarrow$2) は明らかに成立する．問題は 2) $\Rightarrow$ 1) である．今迄のところ．次の結果が得られている．

(4) K.R. Mount – O.E. Villamayor [7].

$\dim V = 1$ ならば、Y. Nakai の予想は正しい。

(5) W. Brown [3].

$\operatorname{depth} \mathfrak{p} = 1$ なる R の prime ideal については、$\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1$ と仮定する。このときには、Y. Nakai の予想は正しい。したがって、R が Macaulay ring ならば、Y. Nakai の予想は正しい。

ところで、最近 purdue の J. Becker は、T. Bloom の予想を肯定的に解決した。[1].

次に、ground field k の標数が $p > 0$ の場合を考えよう。この場合、Y. Nakai の予想の自然な一般化は次のようになるであろう。

R は regular である。$\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Der}(R/k)$ は、proper p^i-th order derivations $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ によって生成される。

これに関して、$\dim V = 1$ の場合に、いくらか弱い結果を得た。それを述べる前に、higher derivation について説明しよう。

R/k の higher derivation とは、$R \to R$ なる k-linear mappings の infinite sequence $\{\delta_0 = 1, \delta_1, \delta_2, \cdots\}$ で、$\forall x, y \in R$ に対して、

$$\delta_n(xy) = \sum_{i=0}^{n} \delta_i(x)\,\delta_{n-i}(y) \qquad (\forall n)$$

となるものをいう。$\delta_n \in \operatorname{Der}^n(R/k)$ である。[9]. さらに、$\delta_i \delta_j = \binom{i+j}{i} \delta_{i+j}$ がみたされるとき、この higher derivation は iterative であるという.

定理. V は, 代数閉体 k 上定義された algebraic curve とする. R によって, V 上の k-rational point の local ring を表わす. 次のことは同値である.

1) R は regular である.

2) R/k の iterative higher derivation で, その components が R-algebra $\mathrm{Der}(R/k)$ を生成するものが存在する.

注意. $\{\delta_0=1, \delta_1, \delta_2, \cdots\}$ を, R/k の iterative higher derivation とすると, $\delta_i \delta_j = \binom{i+j}{i}\delta_{i+j}$ だから, その components が R-algebra として $\mathrm{Der}(R/k)$ を生成する. $\Longleftrightarrow$ その components が R-module として $\mathrm{Der}(R/k)$ を生成する.

証明. 本質的な部分は, 2) $\Rightarrow$ 1) の証明で, しかも, k の標数が $p>0$ の場合である. 証明の概略を述べよう. 詳細は [4] を参照されたい. $\{\delta_0=1, \delta_1, \delta_2, \cdots\}$ を, 条件をみたす R/k の iterative higher derivation とする. $R \to R$ なる high order derivation は continuous だから, $\{\delta_0=1, \delta_1, \delta_2, \cdots\}$ は, 一意的に, $\hat{R}/k$ の higher derivation に延長される. 延長したものを同じ記号で表わす. ここに, $\hat{R}$ は R の completion を表わす. ところで,

$$\mathrm{Der}(\hat{R}/k) \cong \hat{R} \otimes_R \mathrm{Der}(R/k)$$

だから, 仮定によって, $\hat{R}/k$ の任意の high order derivation

は、$\delta_1, \delta_2, \cdots$ の $\hat{R}$-linear combination である。$\bar{R}$ (resp. $\bar{\hat{R}}$) によって、R の商体 (resp. $\hat{R}$ の全商環) における integral closure を表わすと、

$$\bar{\hat{R}} \cong \hat{\bar{R}} \cong k[[t_1]] \oplus \cdots \oplus k[[t_n]]$$

である。ここに、$\hat{\bar{R}}$ は semi-local ring $\bar{R}$ の Jacobson radical による completion である。

$$\partial_i^{(j)}(t_j^m) = \binom{m}{i} t_j^{m-i} \quad (1 \le j \le n,\ i \ge 1)$$

によって定義される $k[[t_j]]$ の i-th order derivation $\partial_i^{(j)}$ を考え、

$$D_i = \partial_i^{(1)} \oplus \cdots \oplus \partial_i^{(n)} \quad (i \ge 1)$$

とおく。$\{D_i\}_{i \ge 1}$ は、$\bar{R}$-module $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{Der}^m(\bar{\hat{R}}/k)$ の free basis で、しかも、$\{1, D_1, D_2, \cdots\}$ は、$\bar{\hat{R}}/k$ の iterative higher derivation である。$\mathfrak{C} = \hat{R} : \bar{\hat{R}}$ とおく。$k[[t_i]]$ の単位元を e_i と表わすと、

$$e_i \mathfrak{C} = (t_i^{a_i}) \quad (1 \le i \le n)$$

となる。R、したがって $\hat{R}$ が regular でないとすると、ある $a_i \ge 1$ となる。例えば、$a_1 \ge 1$ としよう。このときには、

$$\bigcap_{s=1}^{\infty} (e_1 \mathfrak{C})^s = (0)$$

である。これが、矛盾を与えることを示そう。整数 r を、$p^r \ge \max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ となるようにとる。$D \in \mathrm{Der}^{p^r}(\bar{\hat{R}}/k)$ は、

$$D = g_r D_{p^r} + (\text{lower order}),\ g_r \in \hat{\bar{R}}$$

と書ける．実は，このとき，

$$D(\hat{R}) \subset \hat{R} \implies g_r \in L$$

となることが示される．$f \in L$，$e_1 f \neq 0$とする．

$f D_{p^r + p^{r+1} + \cdots + p^{r+s}}$ は，$\hat{R} \to \hat{R}$ なる high order derivation を与える．したがって，仮定により，

$$f D_{p^r + p^{r+1} + \cdots + p^{r+s}} = b\,\delta_{p^r + p^{r+1} + \cdots + p^{r+s}} + (\text{lower order}),\ b \in \hat{R} \qquad (*)$$

と表わせる．ところが，

$$\delta_{p^r + p^{r+1} + \cdots + p^{r+s}} = \delta_{p^r}\delta_{p^{r+1}} \cdots \delta_{p^{r+s}} \text{ で，}$$

$$\delta_{p^i} = g_i D_{p^i} + (\text{lower order}),\ g_i \in \hat{\bar{R}} \quad (r \leq i \leq r+s)$$

だから，これらを $(*)$ の右辺に代入すると，

$$\begin{aligned} f D_{p^r + p^{r+1} + \cdots + p^{r+s}} &= b\,(g_r D_{p^r} + \cdots) \cdots (g_{r+s} D_{p^{r+s}} + \cdots) \\ &= b\, g_r \cdots g_{r+s} D_{p^r + p^{r+1} + \cdots + p^{r+s}} + \cdots \end{aligned}$$

となる．

$$\therefore f = b\, g_r \cdots g_{r+s}.$$

ところで $\delta_{p^i}(\hat{R}) \subset \hat{R}$ で $\delta_{p^i} \in \mathrm{Der}^{p^i}(\hat{R}/k)$ と考えられるから，$g_i \in L$ $(r \leq i \leq r+s)$ である．

$$\therefore e_1 f = e_1 b\, g_r \cdots g_{r+s} \in (e_1 L)^s.$$

sは任意だから，

$$e_1 f\,(\neq 0) \in \bigcap_s (e_1 L)^s = (0).\ \text{矛盾！}$$

q.e.d.

参考文献

[1] J. Becker, Differential operators on complex analytic sets and a condition for nonsingularity, to appear.

[2] T. Bloom, Operateurs differentials elliptiques sur un espace analytique, Seminaire Lelong, 158 – 166. Lecture Notes in Math. 275, Springer 1972.

[3] W. Brown, Higher derivations on finitely generated integral domains, proc. Amer. Math. Soc., 42 (1974), 23 – 27.

[4] Y. Ishibashi, A characterization of one dimensional regular local rings in terms of high order derivations, Bull. Fukuoka Univ. Education, 24 – III (1975), 11 – 18.

[5] E. Kunz, Die primidealteiler der Differenten in allgemeinen Ringen, J. r. u. a. Math., 204 (1960), 166 – 182.

[6] J. Lipman, Free derivation modules on algebraic varieties, Amer. J. Math., 87 (1965), 874 – 898.

[7] K. R. Mount – O. E. Villamayor, On a conjecture of Y. Nakai, Osaka J. Math., 10 (1973), 325 – 327.

[8] Y. Nakai, On the theory of differentials in commutative rings, J. Math. Soc. Japan, 13 (1961), 63 – 84.

[9] Y. Nakai, High order derivations I, Osaka J. Math., 7 (1970), 1 – 27.

[10] G. Scheja - U. Storch, Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischen Algebren, Math. Ann., 197 (1972), 137 - 170.