数理解析研究所講究録
第 237 巻 1975 年 68-77

Characteristic classes of conformal or projective foliations

東北大　理　佐藤　肇
西川青季

0. 有名な Hopf の定理は，"Compact 多様体上に，零点を持たない vector field が存在する為の必要十分条件はその多様体の Euler 標数が消えていること" というものである。実際，零点を持つ vector field が与えられた時，その多様体の Euler 標数は，零点のまわりの Index の和として表わされる。

多様体の Euler 標数は，多様体の Euler form の積分として表わされる。更に一般の Characteristic number (ある characteristic form の積分) を vector field の零点のまわりの "Index" の和で表わすことが出来るかという問題が考えられる。vector field は常に積分可能であるから，これは，多様体の Characteristic number を，与えられた 1 次元 foliation の特異点の近傍の状況で記述するという問題に等しい。

更に、これを一般化すれば，多様体の characteristic number を（次元が1とは限らない）foliation の特異点の近傍の状況で記述せよという問題となる。この問題が解かれる為には，次の2つが成立しなければならない。

a). foliation が特異点を持たない部分では，characteristic form の積分が消えていること．

b) 特異点の近傍での characteristic form の積分を特異点の状況から得られる見易い表現であらわすこと．

ところが，Hopf の定理によれば，1次元の foliation が non-singular である為には，Euler 数が消えていることが十分であるのだから，一般の characteristic number が消えているとは限らない。従って a) の成立の為には，その foliation に，幾何学的構造を仮定しなければならない。Bott, Baum-Bott, Baum-Cheeger は，正則，有理形，あるいは Killing vector field に対し，a) が成立することを示し，更に b) を vector field の "Residue" として表わして，この問題を解いた．これらは逆に，その様な幾何学的な構造を持った vector field を non-singular に変える為の障害を，多様体の characteristic number で表わしたとも解釈できて，興味深い。もしも，その vector field が生成する変換が，多様体の自己同型群のコンパクト

な部分群に含まれるならば，上の a), b) は，Atiyah-Singer の G-index 理論に含まれ，実際，Killing vector field の場合は，その方法で証明されるが，正則 vector field に対してすらも適用出来ない。*) 次元の高い foliation に対して，a) は Pasternack により Killing foliation＝Riemannian foliation に対し，証明され，又，正則な foliation に対しては，Baum-Bott により (b) の方は完全な形とは言えないが) 解かれている。

我々はここで，2階の G-構造を持つ foliation のうち共形葉層構造 (conformal foliation) について a) が成立することを述べよう。射影的葉層構造 (projective foliation) についても，全く同様な方法で同様な事実が証明できる。一般の2階の G-構造については落合さんの these に詳しく述べられており，その様な G-foliation についても，同様な方法が適用できよう。又，田中さんの Cartan connection の理論で Complex の中の real hypersurface の構造に対応する foliation に対しても同様の方法が可能であろう。

*) B. Cenkl は，Spencer の resolution と，Atiyah-Bott の定理を用いることにより，孤立零点を持つ一階の楕円型擬群の構造を持つ vector field に対して，Atiyah-Singer の理論が上の a), b) を含むことを示した。

1. まず，foliation の定義を与えよう．

定義　M：C^∞－多様体．

$\mathcal{F} = \{U_\lambda, f_\lambda, \gamma_{\mu\lambda}\}$ が riemannian (conformal, projective) foliation of codimension q.

$\iff$ (1) $\exists B$, riemannian q-mfd.

(2) $M = \bigcup_\lambda U_\lambda$ open covering

$f_\lambda : U_\lambda \longrightarrow B$ C^∞-submersion

(3) $\forall x \in U_\lambda \cap U_\mu$, $\exists \gamma_{\mu\lambda}^{x}$: $f_\lambda(x)$ のある近傍から $f_\mu(x)$ のある近傍への local isometry (conformal 変換, projective 変換) で $f_\mu = \gamma_{\mu\lambda} \circ f_\lambda$ を x の近傍で満す．

我々の定理は次の様にのべることが出来る．

定理　$\mathcal{F}$ を M 上の余次元が $q(\geq 3)$ 以上の conformal or projective foliation とする。$\nu = TM/E$ を $\mathcal{F}$ の商 bundle とする。その時

$$\mathrm{Pont}^k(\nu : \mathbb{R}) = 0 \qquad \text{if } k > q.$$

但し，$\mathrm{Pont}^k(\nu : \mathbb{R})$ で，$H^k(M : \mathbb{R})$ に含まれる ν の Pontrjagin class によって生成される環の元の集りを表す。

注意1. riemannian foliation に対しては，同じ予定が，Pasternack によって証明されているが，実際，conformal.

projective foliation は riemannian foliation より広く、興味ある例を含んでいる。即ち riemannian foliation に対しては、Godbillon-Vey の invariant を含む secondary characteristic はすべて消えているが、Thurston、大和氏によって構成されている、secondary characteristic の消えていない foliation は conformal foliation となっている。

注意2　一般の foliation（定義において B を C^∞-mfd とし、$\gamma_{\lambda\mu}$ を只の local diffeo としたもの）に対して、Bott が、

$$\mathrm{Pont}^k(\nu : \mathbb{R}) = 0 \qquad \text{for} \quad k > 2q$$

を証明している。実際、適当な connection の下で、Pontrjagin form 自体が消えている。

2. 証明の sketch　証明は Pasternack が riemannian connection に対して行ったことを、Cartan connection に対して同様なことを行い、それは normal bundle ν を1回 prolongation した bundle（＝jet bundle）に対しての結果を与えるから、その bundle の characteristic class とその jet bundle の characteristic class が等しいことを言えばよい。実際、証明は次の様な step をへる。

STEP 1　bundle of higher order contact の構成．

まず，B上の bundle を次の様に定義する．

$U.V \subset \mathbb{R}^q$　原点の近傍

$P^r(B) = \{ j^r_x(f) \mid f : U \to B$　local diffeo　$f(0)=x \}$

$G^r(q) = \{ j^r_0(g) \mid g : U \to V$　local diffeo　$g(0)=0 \}$

但し．$j^r_x(f)$ で f の x における r 回の jet をあらわす．その時 $P^r(B)$ は B上の $G^r(q)$ を構造群とする主 bundle となり，特に $P^1(B)$ は構造群 $G^1(B) = GL(n.R)$ を持つ B の linear frame bundle となる．

M上の ν からつくられる bundle を次の様に定義する．Uを $\mathbb{R}^q$ の原点の近傍とする。写像 $f : U \longrightarrow M$ が foliation に transversal とは，すべての $f_\lambda : U \longrightarrow B$ に対し，結合 $f_\lambda \circ f$ が submersion であることとする。f_λ に関するMの local coordinate を f_λ が

$$(y^1, \dots, y^{n-q}, y^{n-q+1}, \dots, y^n) \longrightarrow (y^{n-q+1}, \dots, y^n)$$

となる様に取る。V を $\mathbb{R}^q$ の原点の近傍とし，$g : V \longrightarrow M$ を foliation に transversal な写像とする。f, g を Taylor 展開し

$$y^A \circ f = u^A + \sum u^A_{j_1} x^{j_1} + \sum u^A_{j_1 j_2} x^{j_1} x^{j_2} + \cdots$$

$$y^A \circ g = v^A + \sum v^A_{j_1} x^{j_1} + \sum v^A_{j_1 j_2} x^{j_1} x^{j_2} + \cdots$$

と書く。但し，$1 \le A \le n$,　$1 \le j_1, j_2 \le q$.

f と g が同じ transversal r-frame $\underset{(r=1.2)}{}$ を定義する (at x) とは

$$u^A = v^A, \quad u^\alpha_{j_1} = v^\alpha_{j_1}, \quad u^\alpha_{j_1\cdots j_r} = v^\alpha_{j_1\cdots j_r}$$

であることと定義する。但し．$1 \leq A \leq n$, $n-q+1 \leq \alpha \leq n$, $1 \leq j_1, j_2 \leq q$. y 点での f の transversal r-frame を $\tilde{j}^r_y(f)$ とかく。これは f のとり方によらない。

$$P^r(\nu) = \{ \tilde{j}^r_y(f) \mid f : U \longrightarrow M \text{ transversal to the foliation } f(0) = y \}$$

と定義すると，$P^r(\nu)$ は M 上の $G^r(q)$ を構造群とする主 bundle となる。特に $P^1(\nu)$ は ν の linear frame bundle となる。

STEP 2　Cartan connection の構成

L/L_0 を次元 q の Möbius 空間とする．即ち

$$L = O(q+1,1) = \{ X \in GL(q+2, \mathbb{R}) \mid {}^tXSX = S \}$$

但し
$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & I_q & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ v & A & 0 \\ b & \xi & a \end{pmatrix} \in O(q+1,1) \;\middle|\; A \in O(n),\ a \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^q \right\}$$

とする。L_1 を L_0 の L/L_0 の接空間への linear isotropy 表現の核とし，$G = L_0/L_1 \subset GL(n, \mathbb{R})$ とおく．その時

$$G = CO(q) = \{ Aa ;\ A \in O(q),\ a \in \mathbb{R} - 0 \}$$

となる。P を M 上の L_0 を構造群とする主 bundle とする。

Cartan 接続 (conformal connection) とは, P上の L の Lie 環 $\mathcal{L}$ に値を持つ 1-form ω で

1) $\omega(A^*) = A \quad \forall A \in \mathcal{L}_0$

2) $(R_a)^* \omega = ad(a^{-1})\omega \quad \forall a \in L_0$

3) $\omega(X) \neq 0 \quad \forall X \neq 0$, X: vector of P

を満たすものである。

$\mathcal{F}$ を conformal foliation とする時, $P^1(\nu)$ は $CO(q)$-主-bundle となり, $P^2(\nu)$ は L_0-主-bundle と思える。$P^2(B)$ には, 只1つの normal conformal connection ω が入るが, ω は conformal transformation で invariant となる。従って, $P^2(\nu)$ には ω を induce することができて, (3)の条件は満たさないが), Cartan 接続となる。即ち上の 1), 2) を満たす $\mathcal{L}$-valued 1-form $\hat{\omega}$ が $P^2(\nu)$ に存在して, 任意の f_λ に対し, $\hat{\omega} = f_\lambda^* \omega$ となる。今, $P^2(\nu)$ の構造群を L に拡大した 主 bundle

$$P^L(\nu) = P^2(\nu) \times_{L_0} L$$

をつくると, $P^L(\nu)$ には 普通の意味の connection $\hat{\omega}$ が自然に $\hat{\omega}$ より定義され, それは, $P^L(B) = P^2(B) \times_{L_0} L$ の connection より, induce したものとなっている。Curvature も $P^2(B)$ より induce される。任意の次元が q より大きい

form は B 上消える。今群 L は単純, 従って又は reductive. Chern-Weil 理論が apply できて, $P^L(B)$ の, 従って $p^L(\nu)$ の characteristic form は次元が q より大きければ vanish することが結論される。

STEP3 bundle ν と $p^L(\nu)$ の特性数の比較.

自然な fibering

$$\begin{tikzcd}
O(q) \arrow[r] \arrow[d] & L_0 \arrow[r] \arrow[d] & L_0/O(q) \cong \mathbb{R}^{q+1} \arrow[d] \\
O(q+1) \arrow[r] & L \arrow[r] & L/O(q+1) \cong \mathbb{R}^{q+1}
\end{tikzcd}$$

より, 次の可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
 & B_{L_0} \arrow[r] & B_L \\
M \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & B_{O(q)} \arrow[u] \arrow[r, "\oplus 1"] \arrow[d, "\simeq"] & B_{O(q+1)} \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"] \\
 & B_{CO(q)} \arrow[r, "\oplus 1"] & B_{GL(q+1)}
\end{tikzcd}$$

従って

$$P_i(\nu) = P_i(\nu \oplus 1) = P_i(p^L(\nu)) \in H^i(M, \mathbb{R}).$$

定理の証明は, 終る。

BIBLIOGRAPHY

Baum – Bott ; On the zeroes of meromorphic vector fields.
Essays on Topology and related Topics, Springer, Berlin 1970, 29~47.

——— ; Singularities of holomorphic foliations,
J. Differential Geometry 7 ((1972) 279~342

Baum – Cheeger ; Infinitesimal isometries and Pontryagin numbers,
Topology 8 (1969) 173~193

Bott ; Vector fields and characteristic numbers. Mich. Math- J. 14
(1967) 231~244

—— ; A residue formula for holomorphic vector fields.
J. Differential Geometry 1 (1967) 311~330.

—— ; On a topological obstruction to integrability.
Proc. Sympos. Pure Math. 16. Amer. Math. Soc. 1970, 27~36.

Cenkl ; Zeros of vector fields and characteristic numbers.
J. Differential Geometry 8 (1973). 25~46

Kobayashi Transformation groups in differential geometry.
Springer ((1972).

Pasternack ; Foliations and compact Lie group actions
Comment. Math. Helv. 46 ((1971) 467~477.

Yamato. ; Examples of foliations with non trivial exotic
characteristic classes. Proc. Japan. Acad 50 (1974) 127~129.

Ochiai ; Geometry associated with semi-simple flat homogeneous
spaces. Trans. A.M.S. 152 (1970) 159~193.