数理解析研究所講究録
第237巻 1975年 78-82

平面代数曲線の補集合のホモトピー型

東大 理 坂本幸一

C $(\subset \mathbb{P}^2)$ を degree n の平面代数曲線とする。C の singular set ΣC は ordinary double points だけからなるとする。このときの $\mathbb{P}^2 - C$ の homotopy type を求めたい。

先ず, A. Hattori および T. Nakamura による次の結果がある。

<u>定理1</u> $L = \bigcup_{i=1}^{k} L_i \subset \mathbb{C}^N$ とする。但し, L_i は $\mathbb{C}^N$ の general position にある超平面とする。そのとき $\mathbb{P}^N - L$ の homotopy type は次のようになる。

$$\mathbb{P}^N - L \simeq [\underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{k}]^{(N)} .$$

但し, $[\underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{k}]^{(N)} = \bigcup_{1 \leq i_1 < \cdots < i_N \leq k} \{ (x_1, \cdots, x_k) \in S^1 \times \cdots \times S^1 \mid j \notin \{i_1, \cdots, i_N\} \Rightarrow x_j = 1 \}$

とくに $C = L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$ が $\mathbb{P}^2$ の general position にある n 本の lines の union なるとき $\mathbb{P}^2 - L \simeq [\underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n-1}]^{(2)}$ である。

<u>定義</u>　C_0, C_1 を ordinary double point のみを特異点としてもつ、n 次曲線とする。C_0 と C_1 とを結ぶ曲線の連続な族 $\{C_t\}_{0\leqq t\leqq 1}$ が次の条件をみたすとき，<u>$\{C_t\}$ は C_0 から C_1 への deformation である</u>，あるいは，<u>C_0 は C_1 に deform される</u> と言おう。

$$\begin{cases} (1)\ \text{各}\ \Sigma C_t\ \text{は ordinary double points のみからなる。} \\ (2)\ \#\Sigma C_t = \text{constant for } 0<t\leqq 1. \end{cases}$$

（注．明らかにこのとき，$\#\Sigma C_0 \geqq \#\Sigma C_1$。）

n 次曲線に対し，その定義多項式が定数倍を除いて一意的に対応する。3 変数 n 次の単項式は $\frac{n^2+3n+2}{2}$ 個あるから，n 次曲線は $\mathbb{P}^N$ $\left(N=\frac{n(n+3)}{2}\right)$ の一点に対応する。点 $a\in\mathbb{P}^N$ に対応する curve を $C(a)$ とすると，

$$\begin{aligned} H &= \bigcup_{a\in\mathbb{P}^N} a\times C(a) \\ &= \left\{ (a,p)\in\mathbb{P}^N\times\mathbb{P}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} a=(a_{ijk}),\ p=(x,y,z) \\ f(a,p)=\sum_{i+j+k=n} a_{ijk}x^iy^jz^k=0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

は $\mathbb{P}^N\times\mathbb{P}^2$ の smooth な algebraic subset である。$\pi: H\to\mathbb{P}^N$ を，自然な projection とする。上の定義は次の statement と同値である：

irreducible algebraic set $\Lambda\subset\mathbb{P}^N$ とその alg. subset Σ が存在して，$\pi: \pi^{-1}(\Lambda-\Sigma)\longrightarrow\Lambda-\Sigma$ は smooth な fiber bundle になり，C_1 には $\Lambda-\Sigma$ の点が対応し，C_0 には Λ の点

が対応する。とくに $\#\Sigma C_0 > \#\Sigma C_1$ ならば C_0 には Σ の点が対応する。つまり，C_0 は $\Lambda - \Sigma$ に属する curves の"極限"である。

<u>Prop. 1.</u> C_0 が C_1 に deform されるとき，

$$\mathbb{P}^2 - C_1 \simeq (\mathbb{P}^2 - C_0) \cup e_1 \cup e_2 \cup \cdots \cup e_s .$$

但し，$s = \#\Sigma C_0 - \#\Sigma C_1$， e_i は $\mathbb{P}^2 - C_0$ に attach される 2 cell である。

$C = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ とする。ここで C は n 次平面代数曲線，ΣC は r 個の ordinary double point よりなる。C_i は C の既約成分で $\deg C_i = n_i$ $(\Sigma n_i = n)$ とする。また $L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$ を general position にある $\mathbb{P}^2$ の lines の合併とする。

<u>定理 2</u> ${}^{\exists} n_i \geq 2$ とする。L が C に deform されるとき

$$\mathbb{P}^2 - C \simeq M(n_1, \cdots, n_k) \vee \underbrace{S^2 \vee S^2 \vee \cdots \vee S^2}_{\nu} .$$

但し，$M(n_1, \cdots, n_k) = [\underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{k}]^{(2)} \cup e$，$e$ は 2 cell で attaching map は

$$[\partial e] = (n_1, \cdots, n_k) \in \mathbb{Z} + \cdots + \mathbb{Z} = \pi_1([S^1 \times \cdots \times S^1]^{(2)})$$

で代表されるものとする。また

$$\nu = (n-1)(n-2) - r - \frac{(k-1)(k-2)}{2}$$

これは，定理1及びProp 1の e_i のattaching mapを詳しく調べることによって得られる。

<u>系</u> (Zariski) 同じ仮定の下で

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 - C) = (\underbrace{\mathbb{Z}+\cdots+\mathbb{Z}}_{k})/(n_1,\cdots,n_k)$$
$$= \underbrace{\mathbb{Z}+\cdots+\mathbb{Z}}_{k-1} + (\mathbb{Z}/g.c.m(n_1,\cdots,n_k)).$$

次に，どんなCに対しLからCへのdeformationが存在するか，ということが問題になる。

<u>定理3</u> 次の場合に，LからCへのdeformationが存在する。

$$\begin{cases} \text{(i)} & \# \Sigma C_i > \frac{(n_i-2)^2}{2} \quad (\text{Popp}) \\ \text{(ii)} & \# \Sigma C_i < \frac{3}{2} n_i \end{cases}$$

Severiによれば，algebraic set $\Lambda^n_r \subset \mathbb{P}^N$ とalg. subset $\Sigma \subset \Lambda^n_r$ が存在して，

$$\Lambda^n_r - \Sigma = \left\{ a \in \mathbb{P}^N \;\middle|\; \begin{array}{l} C(a)\text{は既約で，}\Sigma C(a)\text{は}r\text{個の ordinary} \\ \text{double points よりなる。} \end{array} \right\}.$$

定理3は次のProp.の系である。

<u>Prop. 2</u> $r > \frac{(n-2)^2}{2}$ あるいは $r < \frac{3}{2}n$ のとき，algebraic set Λ^n_r は既約である。

（$r > \frac{(n-2)^2}{2}$ の場合は Popp による。）

定理4　C を既約とし，ΣC は ordinary double points からなるとする。$\Pi = \pi_1(\mathbb{P}^2 - C)$ とし、$\Pi' = [\Pi, \Pi]$，$\Pi'' = [\Pi', \Pi']$ とすれば　$\Pi' = \Pi''$　である。

これは，Π' に対応する $\mathbb{P}^2 - C$ の covering space X が，$H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$ をみたすことと同値である。D を non-singular とすると，明らかに C は D に deform される。$\mathbb{P}^2 - D$ の homotopy type は定理2より，$\mathbb{P}^2 - D \simeq M(n) \vee S^2 \vee \cdots \vee S^2$，また Prop. 1 より，$\mathbb{P}^2 - D \simeq (\mathbb{P}^2 - C) \cup e_1 \cup \cdots \cup e_r$。これらの事実と，$e_i$ の attaching map を詳しく調べることにより，$H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$ が得られる。