数理解析研究所講究録
第 238 巻 1975 年 60-147

Microlocal calculus と概均質ベクトル空間の相対不変式の Fourier 変換

柏原 正樹 述
三輪 哲二 記

目次

序

Microlocal calculus とは函数をそれが満たす極大過剰決定系によって把え，その極大過剰決定系を microlocal に解析し，それを総合する事によって種々の具体的計算を行う方法である。ここでは概均質ベクトル空間の Fourier 変換の計算法を解説する。

このノートは1974年の夏から冬にかけて，柏原正樹氏が京都大学数理解析研究所及び東洋紡績堅田研究所求是荘で行った数回の講義をまとめたものである。なお同氏の b-函数の計算法の名古屋大学における講義が木村達雄氏によってまとめられているので参照してほしい。（[1]）また，実際のFourier変換の計算は，鈴木利明氏によって実行された。([9])
Imaginary Lagrangean が現われる場合の扱いは[10]を見てほしい。

§1 極大過剰決定系の principal symbol の理論

1) 極大過剰決定系と principal symbol (complex case)

この節では複素領域における極大過剰決定系の基本事項を証明なしで述べる。詳しくは〔2〕を見てほしい。

X : n 次元複素多様体

T^*X : X 上の cotangent bundle

$\mathcal{P}$: T^*X 上に定義された擬微分作用素の層（有限階）*

以下 擬微分作用素を 亞.D.O. と略記する。

$P(x,D) \in \mathcal{P}$ は

$$P(x,D) = \sum_{-\infty<j\leq m} P_j(x,D)$$

と展開される。ここで $P_j(x,\xi)$ は T^*X で定義された ξ について j 次 homogeneous な正則函数である。

$$\mathcal{P}_m = \{ P(x,D) \in \mathcal{P} \,/\, P(x,D) = P_m(x,D) + \text{低階} \}$$

は高々 m 階の亞.D.O. の層である。

$$\mathcal{P}_m / \mathcal{P}_{m-1} \cong \mathcal{O}_{T^*X}(m)$$

は，ξ について m 次 homogeneous な函数の層であり

* T^*X の zero section を含む領域では $\mathcal{P}$ の section は有限階の微分作用素になる。

$$\sigma_m : \mathcal{P}_m \longrightarrow \mathcal{P}_m / \mathcal{P}_{m-1} \cong \mathcal{O}_{T^*X}(m)$$

によって定義されるm次 homogeneous な正則函数 $\sigma_m(P)$ を $P \in \mathcal{P}_m$ の principal symbol と言う。

$$\sigma_m(P) = P_m(x, \xi)$$

である。これは座標不変である。

$f(x,\xi)$, $g(x,\xi)$ をそれぞれ m_1次, m_2次の homogeneous な函数とする時,

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \right)$$

で定義される $(m_1 + m_2 - 1)$ 次 homog. な函数を f と g の Poisson bracket と言う。

$$\sigma(P \cdot Q) = \sigma(P)\,\sigma(Q)$$

$$\sigma([P, Q]) = \{\sigma(P), \sigma(Q)\} \qquad (1)$$

が成り立つ。

$$\mathcal{M} = \mathcal{P}u = \mathcal{P}/\mathcal{J}$$

を擬微分方程式系とする。(以下単に system と書く。)
*ここで考える system は未知函数が一個のものである。

ここで $\mathcal{J}$ は $\mathcal{P}$ の coherent 左イデアルであり, $\mathcal{M}$ の generator をひとつ取って u と書いた。

$$\mathcal{J} = \mathcal{P}P_1 + \cdots + \mathcal{P}P_N \qquad P_j \in \mathcal{P}$$

の時, system $\mathcal{M}$ は 未知函数 u に関する擬微分方程式系

$$P_1 u = \cdots = P_N u = 0$$

に対応している。もちろん, $\mathcal{J}$ は, generator u の選び方に依存する。

$\bar{\mathcal{J}} = \{\sigma(P) \mid P \in \mathcal{J}\}$ で生成される $\mathcal{O}_{T^*X}$ のイデアル

とすると, これは homog. な函数で生成され, その零点は T^*X の conic な subvariety となる*。この subvariety は generator u の取り方に依らない。これを system の support と言い $SS\mathcal{M}$ と書く。

$$SS\mathcal{M} = \{(x,\xi) \in T^*X \mid \sigma(P)(x,\xi) = 0$$

$$\text{for } \forall P(x,D) \in \mathcal{J}\}$$

* $\bar{\mathcal{J}}$ を u の symbol ideal と言う。

$$SS\mathcal{M} = \{(x,\xi)\in T^*X \,/\, P_1(x,\xi)=\cdots=P_N(x,\xi)=0\} \qquad (2)$$

は一般には成立しない。

例 (1.1)

$$\mathcal{M} = \mathcal{P}/\mathcal{P}D_1 + \mathcal{P}(D_1^2 - D_2)$$

の時 $SS\mathcal{M}$ は $\{\xi_1=\xi_2=0\}$ であって $\{\xi_1=0\}$ ではない。D_1 と $D_1^2-D_2$ は $\mathcal{J}$ の base にはなっているが，その principal symbol ξ_1 は $\overline{\mathcal{J}}$ の base にはならない。

$\sigma(P_1),\cdots,\sigma(P_N)$ が $\overline{\mathcal{J}}$ の base になっている時 $P_1,\cdots,P_N\in\mathcal{J}$ を involutory base と言う。この時 (2) が成り立つ。

T^*X の勝手な subvariety が system の support になる事はない*。(1) から，symbol ideal $\overline{\mathcal{J}}$ は Poisson bracket について閉じている事がわかる。従ってもし，$\overline{\mathcal{J}}$ が reduced ideal (i.e. $f^k\in\overline{\mathcal{J}}$ なら $f\in\overline{\mathcal{J}}$) であれば $SS\mathcal{M}$ は involutory である。すなわち

$$f=g=0 \text{ on } SS\mathcal{M} \Longrightarrow \{f,g\}=0 \text{ on } SS\mathcal{M}$$

* conic であるだけでない。以下 conic である事はいちいち断わらない。

であるが，実は この事は reduced という仮定なしに成立する。（微分方程式論の基本定理！！）

involutory な subvariety は T^*X における余次元が n を越える事はない。特に余次元が n の involutory variety を Lagrangean variety と言う。

定義 (1.2)

support が Lagrangean であるような system を極大過剰決定系*と言う。

例 (1.3)

i) $\mathcal{O} = \mathcal{P}/\mathcal{P}D_1 + \cdots + \mathcal{P}D_n$

$\mathrm{supp}\,\mathcal{O} = X$

ii) $\mathcal{B}_{pt} = \mathcal{P}\delta(x) = \mathcal{P}/\mathcal{P}x_1 + \cdots + \mathcal{P}x_n$

$\mathrm{supp}\,\mathcal{B}_{pt} = T^*_{pt}X$

$\mathcal{M}$ が M.O.S. で，その support を Λ とする。

$$\Lambda = \bigcup_j \Lambda_j$$

を既約成分への分解とする。

*以下 M.O.S. (maximally overdetermined system) と略記する。

定義(1.4)
M.O.S. $\mathcal{M}$ が Λ_j で simple とは Λ_j の generic point で $\bar{\mathcal{J}}$ が reduced な事を言う。

simple な M.O.S は micro local には，すなわち Λ_j の各点の近傍では，適当な量子化された接触変換によって

$$\mathcal{N} = \mathcal{P} / \mathcal{P}x_1 + \cdots + \mathcal{P}x_n$$

に変換される。これから，microfunction solution は generic point では1次元という事がわかる。しかし解の global な振舞いを知るためには，解空間の base を global に指定する事が必要である。そのために，real Lagrangean の上に line bundle を定義し，その section として，principal symbol を定義する。その第1段として，complex Lagrangean で principal symbol を以下定義しよう。

これからは，M.O.S.* はその generator u をひとつ固定して考える。u の support の既約成分のひとつを Λ とする。

* simple と仮定する。

$$\mathcal{J}=\{P\in\mathcal{P}\,/\,Pu=0\}\qquad \mathcal{M}=\mathcal{P}u=\mathcal{P}/\mathcal{J}$$

としよう。

Λ 上に層 $\sqrt{\Omega_\Lambda^n}\otimes\sqrt{\Omega_X^n}^{-1}$ を考える。Ω_Λ^n, Ω_X^n はそれぞれ Λ, X 上の n form の層であり、$\sqrt{\Omega_\Lambda^n}\otimes\sqrt{\Omega_X^n}^{-1}$ は Λ 上の invertible sheaf で transition function が

$$\sqrt{\frac{\partial(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}{\partial(\tilde\lambda_1,\cdots,\tilde\lambda_n)}}\times\sqrt{\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(\tilde x_1,\cdots,\tilde x_n)}}^{-1}$$

$\lambda,\tilde\lambda$ は Λ, $x,\tilde x$ は X の局所座標

で与えられるものとする。(蛇足であるが、厳密に言うと $U\subset\Lambda$ に対し λ を U における、x を $\pi(U)$ ($\pi: T^*X\longrightarrow X$) の近傍における局所座標とし、$\mathcal{O}_\Lambda^{\lambda,x}$ を $\mathcal{O}_\Lambda$ の copy とする。

$$\Gamma(U,\sqrt{\Omega_\Lambda^n}\otimes\sqrt{\Omega_X^n}^{-1})=\sum_{\lambda,x}\mathcal{O}_\Lambda^{\lambda,x}(U)/\sim$$

ここで $\sim$ は

$$f(\lambda)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\tilde\lambda}\right)^{\frac12}\left(\frac{\partial x}{\partial\tilde x}\right)\Bigg|_\Lambda^{-\frac12}=f(\tilde\lambda)$$

なる同値関係である。但し complex で考える時は、定数倍は不定とする。real で考える時は $\left|\frac{\partial\lambda}{\partial\tilde\lambda}\right|^{\frac12}\left|\frac{\partial x}{\partial\tilde x}\right|^{-\frac12}$ を考える事により

$$L_1 = \sqrt{v_1} \otimes \sqrt{v_M}^{\,-1}$$

v_1, v_M は volume element

が，定数倍の不定さなしに定義できる。)

$$P(x, D) = P_m(x, D) + P_{m-1}(x, D) + \text{低階}$$

に対して，T^*X における1階の微分作用素

$$L_P = H_{P_m} + \left(P_{m-1} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 P_m}{\partial \xi_j \partial x_j}\right)$$

を考える。ここで，

$$H_{P_m}(f) = \{P_m, f\}$$

である。L_P は X の局所座標に依るが，$\sqrt{dx}^{\,-1} L_P \sqrt{dx}$ は依らない事がわかる。すなわち $P(x, \xi) = \tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{\xi})$ の時

$$L_P = \sqrt{\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}}^{\,-1} \cdot L_{\tilde{P}} \cdot \sqrt{\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}}$$

である。

定義 (1.5) Λ 上の1階連立微分方程式系

$$L_P S = 0 \qquad \text{for } {}^\forall P \in \mathcal{J} \qquad (3)$$

の解として決まる $\sqrt{\Omega_\Lambda^n}\otimes\sqrt{\Omega_X^n}^{-1}$ の section S を u の (algebraic) principal symbol と言う。

Λ は involutory であるから $f=0$ on Λ ならば $H_{p_m}(f)=0$ on Λ である。すなわち L_p は Λ の内部微分である。$S=f(\lambda)\sqrt{d\lambda}\sqrt{dx}^{-1}$ に対して $L_p(f(\lambda)\sqrt{d\lambda})\sqrt{dx}^{-1}$ を対応させると，これは，X の局所座標に依らない。ここで L_p は $\sqrt{\Omega_\Lambda^n}$ に Lie derivative として作用している。すなわち

Lie derivative

$$L_p(f(\lambda)\sqrt{d\lambda})=\left\{L_p(f)+\frac{f}{2}\cdot\frac{L_{H_{p_m}}(d\lambda)}{d\lambda}\right\}\sqrt{d\lambda}$$

である。(3)の解は存在して unique である事がわかる。また，ξ について homogeneous である。

例(1.6)

$$\Lambda=\{x_1=\cdots=x_r=\xi_{r+1}=\cdots=\xi_n=0\}$$

$$u=\delta(x_1,\dots,x_r)$$

すなわち

$$Pu=P/Px_1+\cdots+Px_r+PD_{r+1}+\cdots+PD_n$$

とすると

$$\sigma_\Lambda(u)=\frac{\sqrt{d\xi_1\cdots d\xi_r dx_{r+1}\cdots dx_n}}{\sqrt{dx_1\cdots dx_r dx_{r+1}\cdots dx_n}}$$

定義(1.7)

$\sigma_\Lambda(u)$のξに関する homogeneous degree を uのΛにおける orderと言う。

$\Lambda = X$ の時, orderはどんなuに対しても0,
例(1.6)では $\mathrm{ord}_\Lambda(u) = \frac{r}{2}$ である。

invertibleな $Q \in \mathcal{P}$ (i.e. $\sigma(Q) \neq 0$ on Λ)
に対して

$$\sigma_\Lambda(Qu) = \sigma(Q)\big|_\Lambda \sigma_\Lambda(u)$$

$$\mathrm{ord}_\Lambda(Qu) = \mathrm{ord}\, Q + \mathrm{ord}_\Lambda u$$

が成り立つ。

2) line bundle L_Λ と principal symbol

こんどは，real analytic manifold M とその上の pure imaginary cotangent bundle $\sqrt{-1}\,T^*M$ で考える。

$$\Lambda \subset \sqrt{-1}\,T^*M$$

を non singular Lagrangean とし，Λ に support を持つ simple な M.O.S. $\mathcal{M} = \mathcal{P}u$ を考える。Λ が連結ならば，Λ における microfunction solution は 1 次元であるが，その base を指定したい。それには Λ 上に line bundle L_Λ を作り，その real analytic section が解と 1 対 1 に対応するようにする。順々にやって行こう。

まず codim l の submanifold N があって

$$\Lambda = \sqrt{-1}\,T_N^*M$$

となっている時を考える。局所座標を取り換えて

$$N = \{x_1 = \cdots = x_l = 0\}$$

$$x = (x', x'') \quad x' = (x_1, \cdots, x_l)$$
$$D = (D', D'') \quad \xi = (\xi', \xi'')$$

とする。Λ における microfunction solution u は microlocal には，分数階の Φ.D.O. を使って

$$(\ \ )\qquad u = P(x, D)\,\delta(x')$$

と表わされる。ここに

$$P(x,D) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{\lambda-j}(x,D)$$

は，$\lambda-j$ 次 homog. な $P_{\lambda-j}(x, i\xi)^*$ によって定義される次のような microfunction を kernel とする $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ の積分作用素である。

$$P(x,D)\,\delta(x-y)\,dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int \sum_{j=0}^{\infty} P_{\lambda-j}(x, i\xi)\, \Phi_{\lambda-j+n}\bigl(i(\langle x-y, \xi\rangle + i0)\bigr)$$

$$\times\, \omega(\xi)\, dy$$

但し $\omega(\xi) = \sum(-1)^j \xi_j\, d\xi_1\wedge\cdots\widehat{d\xi_j}\cdots\wedge d\xi_n$

$$\Phi_\lambda(\tau) = \frac{\Gamma(\lambda)}{(-\tau)^\lambda}$$

であって，$(-\tau)^\lambda\big|_{\tau=-1} = 1$ なる分枝を取る。

* $\sqrt{-1}\,T^*M$ の点で考えるので $i = \sqrt{-1}$ がつく。

$\sum_{j=0}^{\infty} P_j(x, i\xi)$ が $(x_0, i\xi_0)$ の近くで収束していれば $v(x) \in C_{(x_0, i\xi_0)}$ に対して

$$\int P(x, D)\delta(x-y)\, v(y)\, dy$$

を対応させる事により，$P(x, D)$ が意味を持つ。特に

$$v(x) = \delta(x')$$

の時は $x' = 0$，$\xi'' = 0$ とおいたものを $P_{\lambda-j}(x'', i\xi')$ と書くと

$$u = \frac{1}{(2\pi)^l}\int \sum_{j=0}^{\infty} P_{\lambda-j}(x'', i\xi')\, \Phi_{\lambda-j+l}(i(\langle x', \xi'\rangle + i0)) \times \omega(\xi') \quad (4)$$

となる。この形なら P は unique に決まる。

例 (2, 1)

i) $$(-\Delta)^{\frac{\lambda}{2}}\delta(x) = \frac{2^{\lambda}\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)\pi^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} r^{-\lambda-n}$$

但し $-\Delta$ の symbol は $\left[-\{(i\xi_1)^2 + \cdots + (i\xi_n)^2\}\right]^{\frac{\lambda}{2}}$ *

$r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

ii) $$(x \pm i0)^{\lambda} = \frac{2\pi\, e^{\pm\frac{\pi i\lambda}{2}}}{\Gamma(-\lambda)}\left(\pm\frac{D}{i}\right)^{-\lambda-1}\delta(x)$$

(at $\pm i dx\infty$)

* [　] の中は positive なので意味を持つ

$(\pm \frac{D}{i})$ の symbol は $\pm\xi$ で $\pm i d x \infty$ でどちらも positive となってその λ 乗が意味を持つ。

iii) $$|x|^{\lambda} = \frac{\pi}{\Gamma(-\lambda)\cos\frac{\pi\lambda}{2}} |D|^{-\lambda-1} \delta(x)$$

$|D|^{-\lambda-1}$ の symbol $= (\pm\xi)^{-\lambda-1}$ at $\pm i d x \infty$

iv) $$x_+^{\lambda} = \Gamma(\lambda+1)(D+0)^{-\lambda-1}\delta(x)$$

$(D+0)^{-\lambda-1}$ の symbol は $(\pm i\xi)^{-\lambda-1}$ at $\pm i d x \infty$ で $+0$ の意味は $\zeta^{-\lambda-1}$ の分枝を $\zeta^{-\lambda-1}|_{\lambda=1} = 1$ と取る事である。

さて (4) の u に対して

$$P_\lambda(x,\tau\xi)\Big|_\Lambda$$

を対応させるのは，座標不変ではない。異なる座標 $\tilde{x}$ を取って

$$N=\{\tilde{x}'=0\}$$

となったとする。また P が $\tilde{P}$ になったとすると

$$\delta(x')=\left|\frac{\partial\tilde{x}'}{\partial x'}\right|\delta(\tilde{x}')$$

だから

$$u=P\delta(x')=\tilde{P}\left|\frac{\partial\tilde{x}'}{\partial x'}\right|\delta(\tilde{x}')$$

である。ここで

$$\sigma(P)\Big|_\Lambda=\sigma(\tilde{P})\Big|_\Lambda$$

ではあるが，

$$\sigma(P)\Big|_\Lambda\neq\sigma\left(\tilde{P}\left|\frac{\partial\tilde{x}'}{\partial x'}\right|\right)\neq\sigma(P)\left|\frac{\partial\tilde{x}'}{\partial x}\right|\Bigg|_\Lambda$$

となって $|\partial\tilde{x}'/\partial x'|$ だけずれる。

そこで $\quad \sigma(u) = \sigma(P)|_\Lambda / |dx'|$

と定義すれば,

$$\sigma\left(\tilde{P}\left|\frac{\partial \tilde{x}'}{\partial x'}\right|\right)\Big|_\Lambda \Big/ |d\tilde{x}'| = \sigma(P)/|dx'|$$

となって座標不変になる。*

次に, Λ が conormal bundle にならない時を考える。$\pi : \sqrt{-1}\,T^*M \longrightarrow M$ を Λ 上で考え, その rank の最大値を $n-l$ とする。

$$\Lambda' = \{\pi|_\Lambda \text{ の rank が } n-l \text{ の点}\}$$

は Λ で open であり $\Lambda' = \sqrt{-1}\,T^*_N M$ という形をしている。よって Λ' では principal symbol $\sigma(u)$ が定義されている。

一方 algebraic principal symbol は Λ 全体で定義されていた。それは定数倍を考えずに, 方程式

$$L_P\, s = 0 \qquad \text{for } P \in \mathcal{P} \quad Pu = 0$$

の解であった。

$*\ \dfrac{d\xi' \wedge dx''}{dx} = \dfrac{d\xi'}{dx'} = \dfrac{1}{(dx')^2}$ (変換性だけを考えた等式)

だから $\sigma(u) = \sigma(P)|_\Lambda \sqrt{\dfrac{|d\xi' \wedge dx''|}{|dx|}}$ を取ってもよい。

(P.27の*を見よ。)

そこでこのような $S \in \mathcal{V}_\Lambda^{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{V}_M^{-\frac{1}{2}}$ をひとつ固定して Λ' の相異なる連結成分で

$$\sigma(u) = cS$$

で決まる定数 c を比べて見よう。

その前にもう一度 *motivation* をはっきりさせよう。$\Lambda' = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ とする時，Λ_1 における解 u_1 と Λ_2 における解 u_2 があった時 $\sigma(u_1)$ と $\sigma(u_2)$ がどんな条件を満たしていれば，u_1 と u_2 は境い目を越えて，ひとつの解としてつながるか，という事が知りたい。逆にいうと，Λ 全体における解 u があれば，$\sigma(u)$ は conormal でなくなる所で，どのように変化するか*。これを調べるには，いろいろな方法があるが，例えば接触変換によって問題の境い目の点を，conormal の点に変換したとしよう。この時，$\sigma(u)$ は変化するのだが，その変化の仕方が，境い目のあっちとこっちでは違ってしまう。その違いがどうなるかを知ればよい。それがわかれば，その違いを修正するように $\sigma(u)$ の定義を変えてやれば，$\sigma(u)$ は接触変換に対して一斉に変化するだろう。

*付録(i)を見てほしい。

当然ながら，違いを修正するfactorは，どのような接触変換を選ぶかによって異なる。（もともとconormalな点で考えれば，ある接触変換はそれを再びconormalな点に移すから修正は不要だし，別の接触変換はその点をconormalでない点に移すため，修正のfactorが必要になるだろう。）
ところが，上の修正のfactorは，Maslov index と呼ばれる，計算可能な量で完全に記述されてしまう。以下接触変換を使わないやり方で，それを述べる。

$(x_0, i\xi_0) \in \Lambda$ とする。x_0 の近くで定義された real analytic function $\varphi(x)$ を適当に取ると

$$Y_\varphi = \{(x, i\xi) \in iT^*M \,/\, \xi = d\varphi(x)\}$$

が，Λとtransversalに交わる。Y_φ はconicではないがcanonical 2 form $\sum_j d\xi_j \wedge dx_j$ がその上で消えるという意味では，Lagrangean である。注意しなくてはならないのは，上の条件を満たすφの取り方は，deformationで移り合わないものがあるという事である。（[3]，[4]を見てほしい。）
さて，今ひとつ$\varphi(x)$を固定して

80

$$v(t) = \int u(x)\,\delta(t-\varphi(x))\,dx$$

を考える。これは1変数のmicrofunctionで, $Y.\varphi$がΛとtransversalだから定義できる。さらに, $v(t)$はmultiplicity 1のM.O.S.を満たす。そのsingularityは

$$t = \varphi(x_0), \quad i\,dt\,\infty$$

にある。特に

$$v(t) = G(D_t)\,\delta(t-\varphi(x_0))$$

と書ける。一般にM.O.S.のgeneratorのorderについて次の公式が成り立つ。

$$\mathrm{ord}\; u(x)\cdot v(x) = \mathrm{ord}\, u(x) + \mathrm{ord}\, v(x)$$

$$\mathrm{ord}\; u(f(x)) = \mathrm{ord}\; u$$

$$\mathrm{ord}\int u(x,y)\,dy = \mathrm{ord}\, u - \frac{\dim \text{ of } y}{2}$$

これらが成立するには, 実は条件がいるけれども, それは今考えている$v(t)$の場合は満たされている。

$$e = \mathrm{ord}\, u(x)$$

とおく。例(1.6)により

$$\mathrm{ord}\, v = \mathrm{ord}\, u + \frac{1}{2} - \frac{n}{2}$$

よって $\mathrm{ord}\, G = e - \frac{n}{2}$ である。これから

$$\sigma_{e-\frac{n}{2}}(G) = c\,\tau^{e-\frac{n}{2}} \quad at\ (t, i\tau dt\infty)$$

となる。では定数 c は何か。

まず, $\Lambda = \sqrt{-1}\, T_N^* M$ なる所で c を計算しよう。
局所座標を

$$N = \{ x = (x', x'') / x' = 0 \} \quad \begin{array}{l} x' = (x_1, \cdots, x_l) \\ x'' = (x_{l+1}, \cdots, x_n) \end{array}$$

$$x_0 = 0 \qquad \xi_0 = (\xi_0', 0)$$

となるように選ぶ。

$$\Lambda = \{ x' = 0, \xi'' = 0 \}$$

$$Y_\varphi = \{ \xi = d\varphi(x) \}$$

であった。Y_φ の接空間は, $\mathbb{R}^n + \sqrt{-1}\,\mathbb{R}^n$ の subspace

$$T_{(x_0, i\xi_0)} Y_\varphi = \left\{ (x, i\xi) / \xi_i = \sum \frac{\partial^2 \varphi(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} x_j \right\}$$

である,

Λ と Υ_φ が transversal という条件は

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \quad l+1 \leqq i, j \leqq n$$

が non-singular である事である。適当な座標により

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) + \{3次以上\} + \varphi(x_0)$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \langle \xi_0', x_0' \rangle + \frac{1}{2}\langle Ax'', x'' \rangle$$

となる。(Aは non-singular)

基本公式(2.2)

$q(x)$ を non-degenerate quadratic form として

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(t+q(x)+i0)^\lambda} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\lambda-\frac{n}{2})}{\Gamma(\lambda)}$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{|\det q|}\; e^{\frac{\pi i}{4}(n-\operatorname{sgn} q)}(t+i0)^{\lambda-\frac{n}{2}}}$$

但し $\operatorname{sgn} q = \#(\text{positive eigenvalues}) - \#(\text{negative eigenvalues})$

証明は省略する。

これを使って C を計算しよう。

$$v(t) = \int u(x)\,\delta(t-\tilde{\varphi}(x))\,dx$$
$$= \int P(x'', D')\,\delta(x')\,\delta(t-\tilde{\varphi}(x))\,dx$$
$$= \int \delta(x')\,P^*(x'', D')\,\delta(t-\tilde{\varphi}(x))\,dx$$

<u>Claim</u>

$$P^*(x'', D')\,\delta(t-\tilde{\varphi}(x)) = \quad Q(D_t, D''_x)\,\delta(t-\tilde{\varphi}(x))$$

と書き直せる。

(略証) まず x'' を D''_x に変える。

$$(\tilde{\varphi}_j(x)\,D_t + D_{x_j})\,\delta(t-\tilde{\varphi}(x)) = 0$$

$A = \begin{pmatrix} \alpha_{l+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$ の時には $j > l$ に対し

$$(\alpha_j x_j D_t + D_{x_j})\,\delta(t-\tilde{\varphi}(x)) = 0$$

D_t は invertible 故

$$(x_j + \alpha_j^{-1} D_t^{-1} D_{x_j})\,\delta(t-\tilde{\varphi}(x)) = 0$$

となって，Q は D_t と D_{x_j} $(1 \leqq j \leqq l)$ だけを含むとしてよい。

次に $\xi'_0 = (1, 0, \cdots, 0)$ とすれば

$$\tilde{\varphi}(x) = x_1 + \frac{1}{2}\langle Ax'', x''\rangle$$

$$D_{x_j}\,\delta(t-\tilde{\varphi}(x)) = 0 \qquad (2 \leqq j \leqq l)$$

$$D_{x_1}\,\delta(t-\tilde{\varphi}(x)) = -D_t\,\delta(t-\tilde{\varphi}(x))$$

となって D_{x_j} も消せる。

ここで

$$\sigma(Q)\Big|_{\substack{t-\tilde\varphi(x)=0\\ \text{の conormal}}} = \sigma(P^*)\Big|_{\substack{t-\tilde\varphi(x)=0\\ \text{の conormal}}} \tag{5}$$

となっている。

計算を続ける。

$$\begin{aligned} v(t) &= \int \delta(x')Q(D_t,0)\delta(t-\tilde\varphi(x))dx \\ &= Q(D_t,0)\int \delta(x')\delta(t-\tilde\varphi(x))dx \\ &= Q(D_t,0)\int \delta\left(t-\frac{1}{2}\langle Ax'',x''\rangle\right)dx'' \end{aligned}$$

基本公式(2.2)を例(2.1)の ii) を使って変形する。

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dx}{(t+q(x)+i0)^\lambda} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} q-\frac{\pi i\lambda}{2}}}{\Gamma(\lambda)\sqrt{\det q}}\left(\frac{D_t}{i}\right)^{\lambda-\frac{n}{2}-1}\delta(t)$$

特に全体を$(-2\pi i)$で割って $\lambda=1$ とおけば

$$\int \delta(t-q(x))dx = \pi^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} q}\frac{1}{\sqrt{|\det q|}}\left(\frac{D_t}{i}\right)^{-\frac{n}{2}}\delta(t)$$

これで

$$V(t) = (2\pi)^{\frac{n-l}{2}} e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} A} \frac{1}{\sqrt{|\det A|}} Q(0, D_t, 0)\left(\frac{D_t}{i}\right)^{-\frac{n-l}{2}} \times \delta(t)$$

となった。(5)から

$$\sigma(Q)(0, i\tau, 0) = \sigma(P^*)(0, -i\tau\xi_0) = \sigma(P)(0, i\tau\xi_0)$$

これで P.23 の $\sigma(G)$ が求められる。

$$\sigma(G)(i\tau) = (2\pi)^{\frac{n-l}{2}} e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} A} \frac{1}{\sqrt{|\det A|}} \times \sigma(P)(0, i\tau\xi_0)\,\tau^{-\frac{n-l}{2}}$$

$$\overset{*}{=} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma(u)(0, i\tau d\tilde{\varphi}(x_0))\,\tau^{-\frac{n-l}{2}} \times \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} A}}{\sqrt{|\det A|}} \sqrt{\frac{|dx|}{|d\xi' dx''|}}$$

今まで，3次以上の項は無視してきたが，実は一般の φ に対しても，今求めた式は正しい。もう少し書き換えよう。

$$Y_\varphi : \quad \xi'' = Ax'' \quad , \xi' = \xi_0'$$

であったから Y_φ 上では

$$\sqrt{|\det A|} = \sqrt{\frac{|d\xi''|}{|dx''|}}$$

* これ以後は $\sqrt{\Omega}\ T_N^* M$ では

$$\sigma(u) = (2\pi)^{-\frac{l}{2}} \sigma(P) \sqrt{\frac{|d\xi' dx''|}{|dx|}}$$ を採用する。

$d\omega = \sum_j d\xi_j \wedge dx_j$ とすると

$$\frac{|d\omega^n|}{|d\xi' \wedge dx''|} = |d\xi'' dx'| = |\det A||dx|$$

従って

$$\sigma(G)(i\tau) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi i}{4} \operatorname{sgn} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)}$$

$$\times \sigma(u)(x_0, i\tau d\varphi(x_0))\, \tau^{\frac{l-n}{2}} \frac{|dx|}{\sqrt{|d\omega^n|}}$$

となる。

Maslov index により，書き換えるのであるが，定義や性質の説明は次の節に改めて述べる事とし

$$-i \operatorname{sgn} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \tau(\lambda, \lambda_\Lambda, \mu_\varphi)$$

と書ける事のみ引用しておく。

3) Maslov index と L_Λ の定義の仕上げ

V を $2n$ 次元 real vector space

$E(v_1, v_2)$　$v_1, v_2 \in V$ を V 上の pure imaginary valued の non degenerate skew symmetric bilinear form とする。

例 (3.1)

$$V = T_{(x_0, i\xi_0)}(\sqrt{-1}\,T^*M) \quad \text{とし}$$

$$d\omega = \sqrt{-1}\sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge dx_j \quad \text{によって}$$

$$E(v_1, v_2) = \langle d\omega, v_1 \wedge v_2 \rangle \quad \text{と定義する。}$$

$d\xi_j, dx_j$ の双対基底によって $V \cong \mathbb{R}^{2n} \ni (x, \xi)$ と見なすと

$$E((x,\xi),(x',\xi')) = \frac{1}{\sqrt{-1}}(\langle x, \xi' \rangle - \langle x', \xi \rangle)$$

V の subspace W の E に関する直交補空間を $W^\perp$ と書く。$W = W^\perp$ となる時 W を Lagrangean と言う。

例 (3.1) では，$\sqrt{-1}\,T^*M$ の conic とは限らぬ Lagrangean Y に対して $T_{(x_0, i\xi_0)}Y \subset T_{(x_0, i\xi_0)}(\sqrt{-1}\,T^*M)$ が Lagrangean になる。

定義(3.2)

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \subset V$ を三つのLagrangeanとして

$$\tau(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \underset{(x_1,x_2,x_3)\in\lambda_1\oplus\lambda_2\oplus\lambda_3}{sgn}\left(E(x_1,x_2)+E(x_2,x_3)+E(x_3,x_1)\right)$$

で定義されるpure imaginary integerをMaslov indexと言う。sgnは(x_1,x_2,x_3)についての2次形式の$\{\#(Im>0の固有値)-\#(Im<0の固有値)\}\sqrt{-1}$の値とする。

Maslov indexの基本的な性質を述べよう。

i) $\tau(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = -\tau(\lambda_2,\lambda_1,\lambda_3) = -\tau(\lambda_1,\lambda_3,\lambda_2)$

ii) $\tau(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) - \tau(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_4) + \tau(\lambda_1,\lambda_3,\lambda_4) - \tau(\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) = 0$

iii) $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$を$\dim(\lambda_i\cap\lambda_j)=\text{const.}$で連続的に動かしても不変。

iv) $\tau(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \underset{\mathrm{mod}\ 2\sqrt{-1}\mathbb{Z}}{\equiv} \sqrt{-1}\left(n+\dim(\lambda_1\cap\lambda_2)+\dim(\lambda_2\cap\lambda_3)+\dim(\lambda_3\cap\lambda_1)\right)$

証明は付録iii)を見てほしい。

例(3.3)

例(3.1)で$\lambda_1=\{x=0\}$ $\lambda_2=\{Ax=B\xi\}$ $\lambda_3=\{\xi=0\}$とする。λ_2がLagrangeanであるた

めには $\mathrm{rank}\,(A,B)=n$ かつ $A^tB=B^tA$ が必要十分である。($\because$ $\dim W+\dim W^{\perp}=2n$ 故 $\dim\lambda=n$ よって $\mathrm{rank}(A,B)=n$, A: non singular なら条件は明らか。そうでないときは，適当な symplectic transformation で A: non-singular に帰着する。) この時

$$\tau(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\sqrt{-1}\ \mathrm{sgn}(A^tB)$$

V) $\rho\subset(\lambda_1\cap\lambda_2)+(\lambda_2\cap\lambda_3)+(\lambda_3\cap\lambda_1)$ かつ $\rho\subset\rho^{\perp}$ なる subspace があるとき

$\rho^{\perp}/\rho$ は $E(v_1,v_2)$ によって symplectic space となるが，$W\subset V$ に対して $W^{\rho}=[(W\cap\rho^{\perp})+\rho]/\rho$ とすると $(W^{\perp})^{\rho}=(W^{\rho})^{\perp}$ である。従って λ が Lagrangean なら λ^{ρ} も Lagrangean この時

$$\tau(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\tau(\lambda_1^{\rho},\lambda_2^{\rho},\lambda_3^{\rho})$$

Maslov index によって $-\sqrt{-1}\ \mathrm{sgn}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(x_0)$ を書こう。例(3.1)の記法で

$$\lambda=T_{(x_0,i\xi_0)}\pi^{-1}(x_0)=\{x=0\}$$

$$\lambda_1=T_{(x_0,i\xi_0)}\Lambda\qquad=\{x'=0,\ \xi''=0\}$$

$$\mu_\varphi = T_{(x_0, i\xi_0)} Y_\varphi = \{ \xi' = 2Bx', \ \xi'' = Ax'' \}$$

$\rho = \{ x = 0, \ \xi'' = 0 \}$ としてv)を適用すると

$$\tau(\lambda, \lambda_\Lambda, \mu_\varphi) = \tau(\{x''=0\}, \{\xi''=0\}, \{\xi''=Ax''\})$$

$$= -\sqrt{-1}\,\mathrm{sgn}\, A$$

となる。

L_Λ の定義の仕上げをしよう。

$$\sigma(u)(x_0, i\tau\xi_0)\, e^{\frac{\pi}{4}\tau(\lambda, \lambda_\Lambda, \mu_\varphi)}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{\sqrt{|d\omega^n|}}{|dx|}\, \sigma(G)(i\tau)\, \tau^{\frac{n-l}{2}} \qquad (6)$$

$\varphi_a(x)$ を，Λ と Y_{φ_a} が $(x_a, i\xi_a)$ で常に transversalに交わるように，aについて real analytic に動かしてみると

$$v_a(t) = \int \delta(t - \varphi_a(x))\, dx$$

はaについて real analytic。それで

$$v_a(t) = G_a(D_t)\, \delta(t - \varphi_a(x_a))$$

とした時 $\sigma(G_a)$もaについて real analyticとなる。

故に(6)の右辺はΛ上(Λ'だけでなく) real analytic である。

結論

$$\sigma(u)(x, i\xi)\, e^{\frac{\pi}{4}\tau(\lambda, \lambda_\Lambda, \mu)}$$

は$\mu \subset T_{(x,i\xi)}(\sqrt{-1}T^*M)$ を $\mu \cap \lambda = 0$ $\mu \cap \lambda_\Lambda = 0$ を保って連続的に動かす時, Λ上 real analytic である。これを$\sigma(u)(\mu)$と書くと, $\sigma(u)(\mu)$は次に定義するL_Λの section を与える。

定義(3.4)

Λ上に line bundle L_Λを次のように定義する。

$U \subset \Lambda$ を単連結な近傍として, Uの点をpで表わし

$$L_\Lambda(U) = \Big\{ f(\mu_p) \Big/ \mu_p \text{は} T_p(\sqrt{-1}T^*M) \text{の}$$

Lagrangeanで $\lambda_p = T_p\pi^{-1}\pi(p)$, $\lambda_{\Lambda p} = T_p\Lambda$ とtransversalなものとし,

$f(\mu_p) \in \left(\sqrt{v_\Lambda} \otimes \sqrt{v_M}^{-1}\right)_p$

但し a) μ_pがpについてcontinuousに動く時 $f(\mu_p)$ は real analytic な $\sqrt{v_\Lambda} \otimes \sqrt{v_M}^{-1}$ の section

b) $f(\mu_p) = f(\tilde{\mu}_p)\, e^{\frac{\pi}{4}(\tau(\lambda_p, \lambda_{\Lambda p}, \mu_p) - \tau(\lambda_p, \lambda_{\Lambda p}, \tilde{\mu}_p))} \Big\}$

$\tau(\lambda_p, \lambda_{\Lambda p}, \mu_p)$ は μ_p が p について conti. に動いても $\pi|_\Lambda$ の rank が変わる点で変化する。これに対して $\tau(\lambda_p, \lambda_{\Lambda p}, \mu_p) - \tau(\lambda_p, \lambda_{\Lambda p}, \tilde{\mu}_p)$ は p について Λ 上 locally constant である。しかし，一般に Λ は global には単連結ではないから（Λ は non-singular な部分だけ考えている。）$L_\Lambda \simeq \sqrt{v_\Lambda} \otimes \sqrt{v_M}^{-1}$ とはならない。$\Lambda = \sqrt{-1}\, T_N^* M$ の時は，global に上の同型が作れる。（この時は principal symbol と言う時にいちいち μ をつけて考えない。）

次の諸公式が適当な付帯条件（II, III は常に o.k.）で成立する。

I) $\sigma(u(f(x))) = f^* \sigma(u)$

II) $\sigma(Pu) = \sigma(P)\sigma(u)$　但し P : invertible

III) $\sigma(\delta(x)) = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \sqrt{\dfrac{|d\xi|}{|dx|}}$

IV) $\sigma\left(\int u(x,y)dy\right) = (2\pi)^{\frac{\dim y\text{-space}}{2}} \sigma(u(x,y)dy)$

V) $\sigma(uv) = \sigma(u)\sigma(v)$

このようにして定義した L_Λ の global section* と M.O.S. $\mathcal{M} = \mathcal{P}/\mathcal{J}$ の global solution とが1対1に対応する事は明らかであろう。次に，Λ の交わりにおいて解の接続を調べる。

* かつ，principal symbol に対応する方程式を満たすもの

4) regular intersection の接続行列

二つの non-singular Lagrangean の交わりにおいて, principal symbol $\sigma(u)$ がどのようにつながっているかを調べよう。principal symbol は量子化された接触変換に対して, 一斉に real analytic function multiple の変化をするだけ(証明はしなかったが P20〜P21 の説明を見てほしい。P34 の公式から証明するのも容易) なので, 方程式を標準形に変換して扱えばよい。

$\Lambda_0, \Lambda_1 \subset \sqrt{-1}\,T^*M$ を二つの Lagrangean とし交わり $S = \Lambda_0 \cap \Lambda_1$ は, $n-1$ 次元 non singular manifold として, $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ に support を持つ system $\mathcal{M} = \mathcal{P}u = \mathcal{P}/\mathcal{J}$ を考えよう。次の仮定をおく。

a) Λ_0 と Λ_1 は $S = \Lambda_0 \cap \Lambda_1$ で regular に交わる*。すなわち

$$T_p\Lambda_0 \cap T_p\Lambda_1 = T_pS$$

b) $\overline{\mathcal{J}}$ は reduced

また
$$\mathrm{ord}_{\Lambda_j} u = e_j \qquad (j = 0, 1)$$

としよう。

* P57 の注意(1)を見てほしい。

この時，接触変換によって $x_0^*=(0, i\,dx_1\infty)$ の近傍で

$$\Lambda_0=\{x_1=\xi_2=\cdots=\xi_n=0\}$$

$$\Lambda_1=\{x_1=x_2=\xi_3=\cdots=\xi_n=0\}$$

に変換され，対応する量子化された接触変換で，方程式は

$$(x_1D_1-\alpha)\,u=0$$

$$(x_2D_2-\beta)\,u=0$$

$$D_3u=\cdots=D_nu=0$$

となる。但し $\beta=e_0-e_1-\frac{1}{2}=\mathrm{ord}_{\Lambda_0}u-\mathrm{ord}_{\Lambda_1}u-\frac{1}{2}$ は不変である。

u の algebraic な principal symbol は

$$\sigma_{\Lambda_0}(u)=\xi_1^{-1-\alpha}x_2^{\beta}\sqrt{\frac{d\xi_1dx_2\cdots dx_n}{dx}}$$

$$\sigma_{\Lambda_1}(u)=\xi_1^{-1-\alpha}\xi_2^{-1-\beta}\sqrt{\frac{d\xi_1d\xi_2dx_3\cdots dx_n}{dx}}$$

であり，S で $\sigma_{\Lambda_0}(u)$ は $x_2^{\beta}\times$ 正則函数，$\sigma_{\Lambda_1}(u)$ は $\xi_2^{-1-\beta}\times$ 正則函数となっている。

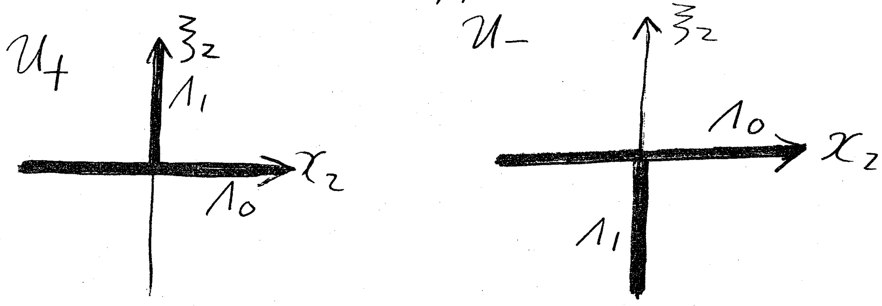
x_0^* における microfunction solution は 2 次元ある。Λ_0-S の連結成分のそれぞれでは，解は 1 次元だから，それらを指定してしまえば，交わりも込めて解であるために

は $\Lambda_1 - S$ でも決まってしまう。この決まり方を表現する接続行列を求めたい。

標準形において独立な二つの解は（generic な α, β に対して）

$$u_\pm = (x_1 + i0)^\alpha (x_2 \pm i0)^\beta$$

で与えられる。$u_\pm$ の support を図示すると



となる。接続行列を決定するためには，この二つの解について，$\sigma_{\Lambda_1}(u)$ と $\sigma_{\Lambda_0}(u)$ の比を計算すればよい。しかしそのままでは，どちらもSで特異性を持つので，その正則部分を比べないといけない。

$$\sigma_{\Lambda_0^\pm}(u_\varepsilon) = \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{\pi i \alpha}{2}}}{\Gamma(-\alpha)} (x_2 + \varepsilon i0)^\beta \xi_1^{-\alpha-1} \sqrt{\frac{|d\xi_1 dx_2 dx''|}{|dx|}}$$

$$\sigma_{\Lambda_1^+}(u_+) = \frac{2\pi\, e^{\frac{\pi i \alpha}{2}} e^{\frac{\pi i \beta}{2}}}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)} \xi_1^{-\alpha-1} \xi_2^{-\beta-1} \sqrt{\frac{|d\xi_1 d\xi_2 dx''|}{|dx|}}$$

$$\sigma_{\Lambda_1^-}(u_-) = \frac{2\pi\, e^{\frac{\pi i \alpha}{2}} e^{-\frac{\pi i \beta}{2}}}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)} \xi_1^{-\alpha-1} \xi_2^{-\beta-1} \sqrt{\frac{|d\xi_1 d\xi_2 dx''|}{|dx|}}$$

ここで $\Lambda_0^{\pm}$ は $x_2 \gtrless 0$ $\Lambda_1^{\pm}$ は $\xi_2 \gtrless 0$ の成分である。一般に，交わりの近傍で f_0 と f_1 を $\mathrm{Im}\{f_0, f_1\} > 0$* $f_0|_{\Lambda_1} = 0$ $f_1|_{\Lambda_0} = 0$ と取り $\Lambda_\nu^{\pm} = \{\pm f_\nu > 0\} \cap \Lambda_\nu$ とする。

$$|f_1|^{\beta+1} \sigma_{\Lambda_1^\varepsilon}(u_\varepsilon) = \frac{2\pi e^{\frac{\pi i \alpha}{2}} e^{\varepsilon\frac{\pi i \beta}{2}}}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)} \xi_1^{-\alpha-1} \sqrt{\frac{|d\xi_1 d\xi_2 dx''|}{|dx|}}$$

$$|f_0|^{-\beta} \sigma_{\Lambda_0^+}(u_\varepsilon) = \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{\pi i \alpha}{2}}}{\Gamma(-\alpha)} \xi_1^{-\alpha-1} \sqrt{\frac{|d\xi_1 dx_2 dx''|}{|dx|}}$$

$$|f_0|^{-\beta} \sigma_{\Lambda_0^-}(u_\varepsilon) = \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{\pi i \alpha}{2}}}{\Gamma(-\alpha)} \xi_1^{-\alpha-1} \sqrt{\frac{|d\xi_1 dx_2 dx''|}{|dx|}} \times e^{\varepsilon \pi i \beta}$$

$|f_1|^{\beta+1} \sigma_{\Lambda_1^\varepsilon}(u_\varepsilon)$ は $\sqrt{v_{\Lambda_1}} \otimes \sqrt{v_M}^{-1}$ の section であり

$|f_0|^{-\beta} \sigma_{\Lambda_0^\pm}(u_\varepsilon)$ は $\sqrt{v_{\Lambda_0}} \otimes \sqrt{v_M}^{-1}$ の setion である。

接触変換で不変にするためには L_Λ の section として比べなければならない。

$$S_1(\mu) = |f_1|^{\beta+1} \sigma_{\Lambda_1^\varepsilon}(u_\varepsilon)\, e^{\frac{\pi}{4}\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_1}, \mu)}$$

$$S_0(\mu) = |f_0|^{-\beta} \sigma_{\Lambda_0^\pm}(u_\varepsilon)\, e^{\frac{\pi}{4}\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_0}, \mu)}$$

* $\{f, g\} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial \xi_j} \right)$ である。

S上の正則函数を

$$\tilde{S}_1(\mu) = S_1(\mu)\sqrt{\frac{v}{|w \wedge df_1|}}\Bigg|_S$$

$$\tilde{S}_0(\mu) = S_0(\mu)\sqrt{\frac{v}{|w \wedge df_0|}}\Bigg|_S$$

で定義する。ここに w はS上の volume element v はMの volume element である。比

$$\tilde{S}_0(\mu) : \tilde{S}_1(\mu)$$

は v, w の取り方に依らない。しかし μ, f_0, f_1 に depend する。実は

$$\tilde{S}_0(\mu)\, e^{\frac{\pi}{4}\tau(\lambda_{10}, \lambda_{11}, \mu)} : \tilde{S}_1(\mu)$$

は μ に依らない。

$\because)$ $\tilde{S}_0(\mu)\, e^{-\frac{\pi}{4}\tau(\lambda, \lambda_{10}, \mu)} : \tilde{S}_1(\mu)\, e^{-\frac{\pi}{4}\tau(\lambda, \lambda_{11}, \mu)}$

は μ に依らないが右側だけに $e^{-\frac{\pi}{4}\tau(\lambda_{10}, \lambda_{11}, \lambda)}$ をかけたものも，もちろん μ に依らない。よって基本性質の ii) から従う。

更にこの比は，S上 real analytic に変化する。（基本性質 iii)） 実はSのどの点かに依らぬ定数となる。それは標準形で計算すればよい。

$f_1 = \xi_2$, $f_0 = x_2$, $v = |dx|$, $w = |d\xi_1 dx''|$ として計算すると

$$|f_1|^{\beta+1} \sigma_{\Lambda_1^\varepsilon}(u_\varepsilon)(\mu) \sqrt{\frac{|dx|}{|d\xi_1 d\xi_2 dx''|}}\Bigg|_S e^{\frac{\pi}{4}\tau(\lambda_{\Lambda_1}, \lambda_{\Lambda_0}, \mu)}$$

$$: \begin{pmatrix} |f_0|^{-\beta} \sigma_{\Lambda_0^+}(u_\varepsilon)(\mu) \sqrt{\frac{|dx|}{|dx_1 d\xi_2 dx''|}}\Big|_S \\ |f_0|^{-\beta} \sigma_{\Lambda_0^-}(u_\varepsilon)(\mu) \sqrt{\frac{|dx|}{|dx_1 d\xi_2 dx''|}}\Big|_S \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{\varepsilon \frac{\pi i \beta}{2}}}{\Gamma(-\beta)} e^{\frac{\pi}{4}\{\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_1}, \mu) + \tau(\lambda_{\Lambda_1}, \lambda_{\Lambda_0}, \mu)\}}$$

$$: \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\varepsilon \pi i \beta} \end{pmatrix} e^{\frac{\pi}{4}\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_0}, \mu)}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\beta)} : \begin{pmatrix} e^{-\varepsilon \frac{\pi i \beta}{2}} \\ e^{\varepsilon \frac{\pi i \beta}{2}} \end{pmatrix} e^{\frac{\pi}{4}\underbrace{\{\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_0}, \mu) - \tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_1}, \mu) - \tau(\lambda_{\Lambda_1}, \lambda_{\Lambda_0}, \mu)\}}_{\tau(\lambda_{\Lambda_0}, \lambda_{\Lambda_1}, \lambda)}}$$

今 $\lambda = \{x = 0\}$

$\lambda_{\Lambda_1} = \{x_1 = x_2 = \xi'' = 0\}$

$\lambda_{\Lambda_0} = \{x_1 = \xi_2 = \xi'' = 0\}$

であるから $\tau(\lambda_{\Lambda_0}, \lambda_{\Lambda_1}, \lambda) = 0$

よって上の比は

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\beta)} : \begin{pmatrix} e^{-\varepsilon \frac{\pi i \beta}{2}} \\ e^{\varepsilon \frac{\pi i \beta}{2}} \end{pmatrix}$$ となる。

最後に，f_1，f_0の選び方に依らないようにするには比の右側に$|\{f_0, f_1\}|^{\beta+\frac{1}{2}}$をかけるとよい。以上から

$$|f_1|^{\beta+1}\sigma_{\Lambda_1\varepsilon}(u_\varepsilon)(\mu)\sqrt{\frac{v}{|w\wedge df_1|}}\Bigg|_S e^{\frac{\pi}{4}\tau(\lambda_{\Lambda_1},\lambda_{\Lambda_0},\mu)}$$

$$:|f_0|^{-\beta}|\{f_0,f_1\}|^{\beta+\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{v}{|w\wedge df_0|}}\Bigg|_S\begin{pmatrix}\sigma_{\Lambda_0+}(u_\varepsilon)(\mu)\\ \sigma_{\Lambda_0-}(u_\varepsilon)(\mu)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\beta)}:\begin{pmatrix}e^{-\varepsilon\frac{\pi i\beta}{2}}\\ e^{\varepsilon\frac{\pi i\beta}{2}}\end{pmatrix}$$

がわかった。

§2 概均質ベクトル空間の相対不変式のFourier変換

1) 概均質ベクトル空間と相対不変式，a函数，b函数，c函数

§1で，我々はsimpleなM.O.S.について考察した。simpleなM.O.S.が現われる具体的な場合としては，概均質ベクトル空間の相対不変式の複素巾の満たすM.O.S.が代表的である。この節では相対不変式の複素巾のFourier変換の話にはいる前の準備をする。概均質ベクトル空間の基本事項については[5]を，local b函数については（相対不変式1個の場合）[1]を見て欲しい。（それらの知識のある人に取っては，相対不変式の数が2以上の場合のformulationだけが新しい。）

Vをn次元ベクトル空間*，$G \subset GL(V)$を連結線型代数群とする**。(G, V)が概均質ベクトル空間であるとはVの代数的真部分集合Sがあって$V-S$が単一のG orbitになっている時を言う。すなわち$x_0 \in V-S$として

$$V - S = G x_0 \quad \text{(この時 x_0 を generic point と言う)}$$

G_{x_0}をx_0のisotropy subgroupとすれば，この事は

$$\dim V = \dim G - \dim G_{x_0}$$

と同じである。実際計算などではGのLie環$\mathfrak{g}$が重要であ

*この節では係数体は$\mathbb{C}$で考える。
**一般にはGの$GL(V)$での表現を考える。

る。$\mathfrak{g}_{x_0}=\{A\in\mathfrak{g}\ /\ Ax_0=0\}$ を使えば上式は

$$\dim V = \dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{g}_{x_0}$$

となる。x_0を与えた時 $\mathfrak{g}_{x_0}$は一次方程式を解けば得られるから，これによって概均質空間になる事を確める事ができる。

(例 1.1)

$G=GL(n,\mathbb{C})$　$V=\mathbb{C}^n$　GはVに自然に作用する。$S=\{0\}$として概均質になる。

(例 1.2)

$G=GL(1,\mathbb{C})\times SO(n,\mathbb{C})$　$V=\mathbb{C}^n$　GはVに自然に作用する。$SO(n,\mathbb{C})$の元はVの多項式 $x_1^2+\cdots+x_n^2$ を不変にするものである。$S=\{x_1^2+\cdots+x_n^2=0\}$ として概均質になる。

(例 1.3)

$G=GL(n,\mathbb{C})\times SO(m,\mathbb{C})\ni(g,h)$

$V=\{n\times m\ 行列\}\ni x$　($n<m$とする)

作用は　$x\longmapsto gxh^{-1}$

$x_0=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}$として$\mathfrak{g}_{x_0}$を計算すると，概均質になる事は容易に確められる。実際は $S=\{\det x\,{}^t x=0\}$ である。

（例1.4）

$$V \ni x = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & x_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ u_n & & & x_n \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{g} \ni A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ & \beta_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_n \end{pmatrix}$$

作用　$x \longmapsto Ax + {}^t(Ax)$　ここではLie環の作用を与えたが，これから指数写像によってLie群の作用を構成する事もできる。その際上記のAに対して $\exp A$ を計算するのでなく，$\mathfrak{g}$ の base $A_1, \cdots, A_N$ を $\exp A_j$ が簡単な形になるように取って計算する（例えば $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \\ & \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} & \alpha_1 \\ & \end{pmatrix}$ etc）のがコツである。（木村の方法）

$S = \{x_1 \cdots x_n \det x = 0\}$ である。

（例1.5）

$$V \ni x = \begin{pmatrix} & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{g} \ni A = \begin{pmatrix} \alpha-\beta & & \\ \gamma & \alpha & \\ \delta & 2\gamma & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

作用　$x \longmapsto Ax + {}^t(Ax)$

$S = \{x_1 \det x = 0\}$

概均質ベクトル空間の系統的な分類については［6］を見てほしい。そこでは既約正則な場合の完全な分類が与えられ

ている。例1.4 例1.5は 既約でない場合で，佐藤先生がFourier変換の演習問題として提出され 数理研の短期共同研究で共同計算したものである。

例1.1は概均質ベクトル空間としては特殊な例に属する。その理由は，特異点集合が1点だけからなる事である。以下Sを超曲面であると仮定する。

$S = S_1 \cup \cdots \cup S_\ell$ と既約超曲面に分解し，
$S_i = \{ f_i(x) = 0 \}$　$(i = 1, \cdots, \ell)$ と既約多項式で表わされた時，$f_i(x)$ はGの作用に関して相対不変式になる。すなわちGの rational character χ_i があって

$$f_i(g \cdot x) = \chi_i(g) f_i(x)$$

あるいはLie環で表現すれば，χ_i の微分を $\delta\chi_i$ と書いて

$$\langle Ax, \mathrm{grad} \rangle f(x) = \delta\chi_i(A) f(x)$$

となる。$\mathfrak{g}_0$ を $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と generic point x_0 の isotropy $\mathfrak{g}_{x_0}$ から生成されたイデアルとする。$\mathfrak{g}$ の character $\delta\chi$ が相対不変式（V上多価なものも含める）に対応しているためには $\delta\chi|_{\mathfrak{g}_0}$ が必要十分であり 言い換えると

$$\mathfrak{g}_0 = \{ A \in \mathfrak{g} \,/\, \delta\chi_i(A) = 0 \quad i = 1, \cdots, \ell \}$$

となる。$\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0) = l$ であり，$\delta\chi_i$ $i=1,\cdots,l$ は $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ の dual space（それを $\mathfrak{X}$ と書く）の base になる。

記号を説明する。$s = (s_1, \cdots, s_l) \in \mathbb{C}^l$

$$s\delta\chi = \sum_{j=1}^{l} s_j \delta\chi_j \ , \quad f^s = f_1^{s_1} \cdots f_l^{s_l}$$

但し，$\delta\chi$ は気をつけてほしい。$\chi = (\nu_1, \cdots, \nu_l) \in \mathbb{Z}^l$

$\delta\chi = \sum_{j=1}^{l} \nu_j \delta\chi_j$ の意味につかうからである。

V^* を V の dual space とする。

$$\varphi_s(x) = \operatorname{grad} \log f(x)^s$$

によって $V - S \longrightarrow V^*$ の写像が定義される。これは

$$\langle Ax, \varphi_s(x) \rangle = s\delta\chi(A)^* \tag{7}$$

を満たす。ある s（従って generic な s）に対して

$$\text{Jacobian } \varphi_s(x) = \text{Hessian } \log f(x)^s \neq 0$$

となる時 V を regular という。この時 V^* もまた概均質ベクトル空間となる。ここで G，$\mathfrak{g}$ の V^* への作用は

$$\langle gx, {}^t g^{-1} y \rangle = \langle x, y \rangle$$

* $\langle \ , \ \rangle$ は V と V^* の内積

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, {}^tAy\rangle$$

で決まる。V^*の特異点集合S^*は同じ数l個の既約成分に分かれ Jacobian $\varphi_s \neq 0$なる時 φ_sは$V-S$からV^*-S^*への同型を与える。V^*の相対不変式については

$$f_i^*({}^tg^{-1}y) = \chi_i(g) f_i^*(y)$$

によってf_i^*を定義する。（〔5〕で用いられている記法とは違うから注意してほしい。）

以下 $V\times V^* \cong T^*V$ と同一視する。

$$W = \{(x, \operatorname{grad}\log f^s) \in V\times V^* / s\in\mathbb{C}^l, x\in V-S\} \text{ の closure}$$

とする。Wは$n+l$次元である。

$$W' = \{(x,y)\in V\times V^* / \langle Ax, y\rangle = 0 \text{ for } {}^\forall A\in\mathfrak{g}_0\}$$

を考えると(7)から明らかに

$$W \subset W'$$

であるが，一般にはこれは等しくない。

W'上の函数$s_1, \cdots, s_l$*を

$$\langle Ax, y\rangle = \sum_{i=1}^{l} s_i(x,y)\,\delta\chi_i(A) \qquad (8)$$

＊f^sのsと混同しないように気をつけてほしい。

で定義する。あるいは $\delta x_i \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0)^*$ に対する dual base $A_i \in \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ を取って

$$s_i(x, y) = \langle A_i x, y \rangle$$

と言ってもよい。

$$W_0 = W \cap \{s_1 = \cdots = s_\ell = 0\}$$

とおくとこれは Lagrangean になる。

$V \times V^*$ の Lagrangean variety Λ が good Lagrangean とは

1) $\Lambda \subset W_0$

2) Λ は G pre-homogeneous

の時を言う。

一般に Λ を $V \times V^*$ の既約な Lagrangean で $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ の action で不変，すなわち

$$(x, y) \in \Lambda \to (cx, c'y) \in \Lambda \quad \text{for } c, c' \in \mathbb{C}^*$$

なるものとすると

$\pi : V \times V^* \longrightarrow V \quad \pi^* : V \times V^* \longrightarrow V^*$

に対して

$\pi(\Lambda) \subset V$, $\pi^*(\Lambda) \subset V^*$ はそれぞれ既約かつ homogeneous な subvariety であり,

$$\Lambda = \overline{T^*_{\pi(\Lambda)_{reg}} V} = \overline{T^*_{\pi^*(\Lambda)_{reg}} V^*}$$

で逆に対応する。ここで式の意味は $\pi(\Lambda)$, $\pi^*(\Lambda)$ の non singular part の conormal bundle の $V \times V^*$ における closure である。

さて Λ が good Lagrangean の時は, G が Λ に pre homogeneous に作用するから, $\pi(\Lambda)$, $\pi^*(\Lambda)$ はともに, V, V^* における G orbit の closure になっている。しかし, 逆は必ずしも成立しない。詳しくは [7] を見てほしい。

定理 (1, 6)

Λ が good Lagrangean ならば, Λ の generic point の近傍で $W = W'$ でありさらに, W は non singular になる。さらに W の中で Λ は

$$\Lambda = \{ s_1 = \cdots = s_\ell = 0 \}$$

で定義されている。

証明にはいる前に，定理の意味を説明しておく。

我々は函数 $f(x)^s$ を，それが満たす微分方程式によって促えることを目標とした。その点を詳論しよう。

$\mathcal{D}$はV上の微分作用素の層，$\mathcal{D}[s]$ を $s=(s_1,\cdots,s_n)$ についての多項式で係数が微分作用素であるものとする。

$$\mathcal{J}[s]=\{P(s)\in\mathcal{D}[s]\,/\,P(s)f^s=0\}$$

とおき，$s\in\mathbb{C}^l$ を固定して $\mathcal{D}/\mathcal{J}[s]$ を考えたものが f^s の満たす微分方程式系である（と定義する）。しかしこの方程式についてはあまりよくわかっていない。generic な s については，M.O.S.になりその support（擬微分方程式と考えて）が W_0 に一致する事が予想される。

$f(x)^s$ が，今考えているような，概均質ベクトル空間の相対不変式の場合は $\mathcal{J}[s]$ は次の方程式を含む。

$$\mathcal{M}:\ \{\langle Ax, D_x\rangle - s\delta\chi(A)\}u=0 \quad \text{for } {}^\forall A\in\mathfrak{g}$$

これは一般には，$\mathcal{J}[s]$ から決まる方程式と一致しない。しかし，good Lagrangean Λ の近くでは，定理(1.6)の以下の証明からわかるように $\mathcal{M}$ は simple な M.O.S. となり，$\mathcal{D}/\mathcal{J}[s]$ の support に Λ がはいるとすれば $\mathcal{D}/\mathcal{J}[s]$ は $\mathcal{M}$ と一致する。結論として，good Lagrangean Λ の generic point の近傍では，

$f(x)^s$ の満たす方程式としては $\mathfrak{M}$ を考えてよい事になる。

(定理の証明)

$\Lambda^n \subset W^{n+l} \overset{n+l次元}{\subset} W'$ であるから W' が non singular である事を示せば $W = W'$ となる。そのためには、

$$d\langle Ax, y\rangle\Big|_{at(x_0,y_0)} \quad A \in \mathfrak{g}_0 \quad ((x_0,y_0)\in\Lambda)$$

のうちに $\overset{ちょうど}{n-l}$ 個の独立なものがある事を示せばよい。

すなわち $\dim\{({}^tAy_0, Ax_0) \in V^* \times V \,/\, A \in \mathfrak{g}_0\} = n-l$ (9)

を示す。

ところが Λ が G prehomog. だから

$$\dim\{(Ax_0, -{}^tAy_0) \in V \times V^* \,/\, A \in \mathfrak{g}\} = n$$

であるが $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0) = l$ であるから

$$\dim\{(Ax_0, -{}^tAy_0) \in V \times V^* \,/\, A \in \mathfrak{g}_0\} \geqq n-l$$

である。一方 $W \subset W'$ 故 $\dim W' \geqq n+l$

よって (9) が言えた。後半も S_i の定義から明らかであろう。

good Lagrangean Λ における a 函数 $a_\Lambda^\chi(s)$ を定義しよう。これは、Λ の generic point の近傍で、W 上の函数と見た時の $f^\chi = f_1^{\nu_1}\cdots f_l^{\nu_l}$ の零点を記述するものである。(取りあえず $\nu_j \in \mathbb{Z}_+$ としておく。)

命題(1.7)

Λのgeneric pointの近傍で，f^xをW上の函数と見た時の零点集合は，Sの同次多項式$a^x_\Lambda(S)$の零点として表わせる*。これをΛにおける局所a函数という。$f^x_\Lambda \underset{def}{=} f^x/a^x_\Lambda$は$\Lambda$上正則かつnonzeroな$\Lambda$上の$G$相対不変式。

$\because$) f^xの零点が，S_iだけで決まり，かつS_iについて homogeneousである事を示せばよい。まずS_iがG不変である事を言おう。$g \in G$として

$$\langle Ax, y\rangle = \langle Agx, {}^tg^{-1}y\rangle \quad \text{for } (x,y)\in W$$

を言えばよい。$A - g^{-1}Ag \in \mathfrak{g}_0$だから

$$\langle (A-g^{-1}Ag)x, y\rangle = 0 \qquad \text{for } (x,y)\in W$$

となるからそれは明らか。従ってWにおいて$S_i = \text{const.}$ $(i=1,\cdots,l)$なる集合はG不変でn次元である。ところがΛが good LagrangeanであるからΛ（すなわち$S_i=0$ $(i=1,\cdots,l)$）はG homogeneous。よって$S_i = \text{const}$ $(i=1,\cdots,l)$もG homogeneousである。f^xはG相対不変であるから$g\in G$で動かしてもf^xの値はnonzero倍されるだけである。よって$f^x=0$の零点はSだけで記述できる事がわかった。それがSについてhomogeneousになる事はf^x

* $a^x_\Lambda(S)$はf^x_Λが正則かつnonzeroとなるように取る。

が homogeneous な事から明らかである。f_Λ^χ の相対不変性は f^χ の相対不変性と S_i の絶対不変性から明らか。

local u 函数が定義できたから [1] と同じ手続きによって local b-函数の存在と一意性が言える。

定理 (1.8) s の多項式 $b_\Lambda^\chi(s)$ と

$\sigma(P_j)\big|_\Lambda = f_\Lambda^{\chi_j}$ なる正 D. Op. P_j が存在して

$$f^{s+\chi} = b_\Lambda^\chi(s) P_1 \cdots P_l f^s$$

証明は [1] を見て考えてもらう事にして，意味を説明する。

f^s は M.O.S. $\mathcal{M}$ の generator u のこととし，

$f^{s+\chi} = f^\chi u$ とする。従って上の等式を言い換えると

$$f^\chi - b_\Lambda^\chi(s) P_1 \cdots P_l \in \sum_{A \in \mathfrak{g}} \mathcal{P}(\langle Ax, D_x\rangle - s\delta\chi(A))$$

となる。$f^{s+\chi}$ を $\varphi(s) P f^s$ の形に表わす事は，もちろん unique ではない。$\varphi(s) = 1$ $P = f^\chi$ でもよい。定理で与えた表現は $\sigma(P)\big|_\Lambda \neq 0$ という特別な形をしている。すなわち P は invertible operator である。P を invertible に限れは，$\varphi(s)$ は定数倍を除き確定する。それが Λ における local b-函数である。

$a_\Lambda^x(s)$ は $b_\Lambda^x(s)$ の最高次部分であり, $b_\Lambda^x(s)$ は cocycle 条件 $b_\Lambda^{x+x'}(s) = b_\Lambda^x(s)\, b_\Lambda^{x'}(s+x)$ を満たす。従って $x \geqq 0$ の仮定を取りはらっても local b-函数を定義する事ができて定理(1.8)が成り立つ。[1] におけるのと全く同じようにして, 次の構造定理が成り立つ。

命題(1.9)

$\mathcal{X} = (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0)^*$ 上の linear form で δx_i において整数値を取るような e_j が存在して ($j=1,\cdots,N$)

$$a_\Lambda^x(s) = e_1(s)^{e_1(x)} \cdots e_N(s)^{e_N(x)}$$

$$b_\Lambda^x(s) = [e_1(s)+\alpha_1]^{e_1(x)} \cdots [e_N(s)+\alpha_N]^{e_N(x)}$$

(α_j は定数) の形に書ける。

実際に $b_\Lambda^x(s)$ を求めるのは次の定理に依る。詳しくは $l=1$ の場合の [1] を見てほしい。(記号, 証明, 意味などすべて)

定理(1.10)

Λ_1

→交わりは G prehomogeneous で generic point (x_0, y_0)

$\Lambda_0 = T^*_{Gx_0}V$

$$\mathrm{tr}_{V_{x_0}^*/g_{x_0 y_0}}(A) = \frac{m}{n+m} \qquad (m, n) = 1$$

または上式の左辺が不定の時は $m=1 \quad n=0$ とする。
この時 *

$$\frac{b^{x}_{\Lambda_0}(s)}{b^{x}_{\Lambda_1}(s)} = \left[e_1(s) + \frac{a_1}{m+n}\right]^{e_1(x)} \cdots \left[e_1(s) + \frac{a_1+n}{m+n}\right]^{e_1(x)}$$

但し $e_1(s) + \dfrac{a_1}{m+n} = \dfrac{1}{n+1}\left(\mathrm{ord}_{\Lambda_1} f^s - \mathrm{ord}_{\Lambda_0} f^s\right) + \dfrac{m}{2}$

Vの座標を固定してV上の n form $dx = dx_1 \cdots dx_n$ を考えよう。$W \xrightarrow{\pi} V$ を projection とし，W上の $n+l$ form $\pi^*(dx) \wedge ds \quad (ds = ds_1 \cdots ds_l)$ を考えると，命題(1.7)と同じ論法で次が言える。

命題(1.11)

sの同次多項式 $C_\Lambda(s)$があって

$$\frac{1}{C_\Lambda(s)} \pi^*(dx) \wedge ds$$

は正則かつ non zero である。また

$$\omega_\Lambda = \left\{\frac{1}{C_\Lambda(s)} \pi^*(dx) \wedge ds\right\} \Big/ ds \Bigg|_\Lambda$$

* 記号 $[t]^\nu$ については P58の注意(3).

はΛ上のn formで，定数倍を除いてuniqueに決まりcharacter $\chi_0(g)=\det_V g$に対応する相対不変n formになる。

[1]にあるのと同じく次の定理が成り立つ。

定理(1.12)

Λをgood Lagrangeanとすると

$$\sigma_\Lambda(f^s) = f_\Lambda^s\sqrt{\omega_\Lambda}/\sqrt{dx}$$

$$\mathrm{ord}_\Lambda f^s = s\delta\chi(A_0) - \mathrm{tr}_{V_{x_0}^*}A_0 + \frac{1}{2}\dim V_{x_0}^*$$

最も基本的な例(1.2)について，以上の理論を説明しよう。

$n\geqq 3$とする。この時$f(x)=x_1^2+\cdots+x_n^2$は既約で$l=1$となる。$u=f(x)^s$の満たす方程式は

$$\begin{cases}(x_1D_1+\cdots+x_nD_n-2s)u=0\\(x_iD_j-x_jD_i)u=0\end{cases}$$

である。

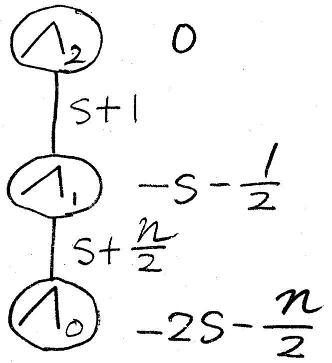
VのG orbitへの分解 $V-S \sqcup S-\{0\} \sqcup \{0\}$に対応して，Lagrangeanが三つある。

$$\Lambda_2 = \{(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0)\}$$

$$\Lambda_1 = \{(0, \cdots, 0, \xi_1, \cdots, \xi_n)\}$$

$$\Lambda_0 = \{(x, \xi) / f(x) = f(\xi) = 0 \quad x /\!/ \xi\}$$

これらは，good orbitである。我々に必要な情報は次のようなgraphに記入される。*



ここで ○ はLagrangeanを表わし，codim 1で交わっているLagrangeanを棒でつなぐ。0，$-s-\frac{1}{2}$，$-2s-\frac{n}{2}$はorderであり$s+1$，$s+\frac{n}{2}$はlocal b-函数の比である。

注意(1) ZをT^*Xの中の$\dim Z \leqq n-2$なる集合とするとLagrangean Λにsupportを持つ二つのM.O.S. $\mathcal{M}_1$と$\mathcal{M}_2$が

* graphの作り方については〔8〕を見てほしい。

$$\mathcal{M}_1\Big|_{\Lambda-Z} \simeq \mathcal{M}_2\Big|_{\Lambda-Z}$$

とすれば実は $\mathcal{M}_1 \simeq \mathcal{M}_2$ である。これから codim 1 の交わりのみが重要である。

注意(2) hypersurface の conormal の order は常に $-s-\frac{1}{2}$，また regular prehomogeneous の時，原点の conormal の order は $-\sum_{i=1}^{l} r_i s_i - \frac{n}{2}$ 但し $r_i = \deg f_i(x)$，$n = \dim V$ である。

注意(3)

$$[t]^{\nu} \underset{\text{def}}{=} \frac{\Gamma(t+\nu)}{\Gamma(t)}$$ と定義する。

$\nu > 0$，整数 なら $[t]^{\nu} = t(t+1)\cdots(t+\nu-1)$

$\nu = 0$ なら $[t]^{0} = 1$

$\nu < 0$，整数 なら $[t]^{\nu} = \dfrac{1}{(t+\nu)\cdots(t-1)}$

2)相対不変式のFourier変換

$(G^{\mathbb{C}}, V^{\mathbb{C}})$ をregularな概均質ベクトル空間とし、その real form (G, V) をひとつ決める。ここで G は実連結代数群である。V 上に、相対不変式 $f_1, \cdots, f_l$ が決まる。我々の目標は $f(x)^s = f_1(x)^{s_1} \cdots f_l(x)^{s_l}$ の Fourier変換を計算する事である。

例(2.1)

$$(G^{\mathbb{C}}, V^{\mathbb{C}}) = GL(1,\mathbb{C}) \times SO(n,\mathbb{C}) \quad (n \geq 3)$$
$$\square \otimes \square$$

の real form は $0 \leqq q \leqq p \leqq n$ $p+q=n$ として

$$(G, V) = GL(1,\mathbb{R})_+ \times SO(p,q,\mathbb{R})_0 。$$
$$\square \otimes \square$$

但し $GL(1,\mathbb{R})_+ = \mathbb{R}_+$, $SO(p,q,\mathbb{R})_0 = \{g \in SL(p+q,\mathbb{R}) / gJ\,{}^tg = J \quad J = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}\}$ の単位元の連結成分。

相対不変式は一個であり、具体的に

i) $f(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \qquad q=0$

ii) $f(x) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 \qquad q=1$

iii) $f(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2 \qquad q \geqq 2$

となる。iii)は $n \geqq 4$ の場合に現われる。

complexで考えている時と違って $V-\{x\in V/f(x)=0\}$ はG orbitにはならない。連結成分がG orbitになる。それらを $V^{(1)},\cdots,V^{(N)}$ としよう。例(2.1)では

i) $N=1$ $\quad V^{(1)}=V-\{0\}$

ii) $N=3$ $\quad V^{(1)}=\{x\in V\ ;\ x_n>0,\ f(x)<0\}$

$\qquad\qquad V^{(2)}=\{x\in V\ ;\ f(x)>0\}$

$\qquad\qquad V^{(3)}=\{x\in V\ ;\ x_n<0,\ f(x)<0\}$

iii) $N=2$ $\quad V^{(1)}=\{x\in V\ ;\ f(x)<0\}$

$\qquad\qquad V^{(2)}=\{x\in V\ ;\ f(x)>0\}$

となる。

$$u_\nu(s)=\begin{cases}|f(x)|^s=|f_1(x)|^{s_1}\cdots|f_\ell(x)|^{s_\ell} & x\in V^{(\nu)}\\ 0 & x\notin V^{(\nu)}\end{cases}$$

で定義される V 上の超函数 $u_\nu(s)$ $(\nu=1,\cdots,N)$ は M.O.S.

$$\mathfrak{M}:\{\langle Ax,D_x\rangle-s\delta\chi(A)\}u=0$$

の解である。一方 V^* の方も，N個のG orbit $V^{*(\nu)}$ に分かれる。

$$u_\nu^*(s)=\int_{V^{*(\nu)}}|f^*|^s(y)\,e^{i\langle y,x\rangle}dy$$

は，V上の超函数であり，$u_\nu^*(s+\chi_0)$ を考えると

これらもまた$\mathfrak{M}$の解である。但しχ_0は

$$\chi_0(g) = \det{}_V\, g$$

で決まるcharacterである。

$$\because)\quad \int_{V^*(\nu)} |f^*|^{s+\chi_0}(y)\, e^{i\langle y, gx\rangle} dy$$

$$= \int_{V^*(\nu)} |f^*|^{s+\chi_0}(y)\, e^{i\langle {}^t g y, x\rangle} dy$$

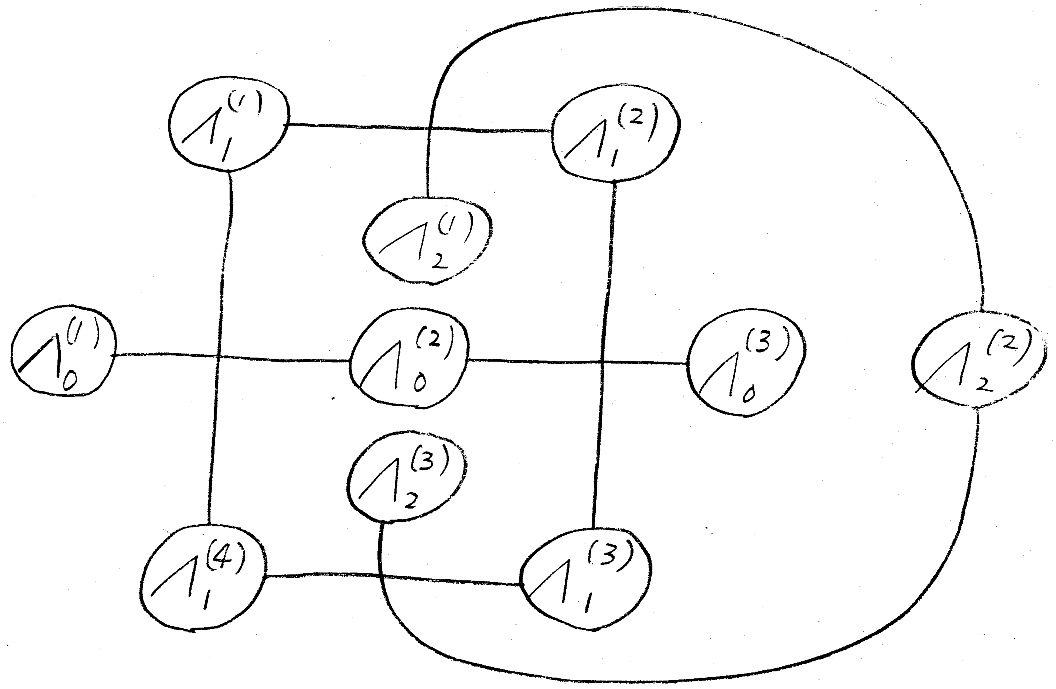
$$= \int_{V^*(\nu)} |f^*|^{s+\chi_0}({}^t g^{-1} y)\, e^{i\langle y, x\rangle} d({}^t g^{-1} y)$$

$$= \chi^s(g) \int_{V^*(\nu)} |f^*|^{s+\chi_0}(y)\, e^{i\langle y, x\rangle} dy$$

q.e.d.

genericなsに対しては，V上の$\mathfrak{M}$の超函数解は，N次元ある。（この事は，この節以下の議論で順次明らかになる。）二組の解空間のbase $u_\nu(s)$ $(\nu=1,\cdots,N)$と$u^*_\nu(s+\chi_0)$ $(\nu=1,\cdots,N)$の間の変換行列を求める事が，Fourier変換の計算である。

一般の場合を考える前に例(2.1)で説明しておこう。complexにおけるLagrangeanのつながり方を表わす図(p57)に対応してreal Lagrangeanのつながり方を表わす図は次のようになる。



complex で考えた時は，$T^*V^{\mathbb{C}} \cong V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}*}$ の中に，Λ_0，Λ_1，Λ_2 があったわけだが，real で考える時には $\sqrt{-1}\,T^*V \cong V \times V^*$ と同一視して考え，

$$\underset{(x,\sqrt{-1}\,y\,dx)}{\Psi} \qquad \underset{(x,y)}{\Psi}$$

$\Lambda_i \cap \sqrt{-1}\,T^*V$ の連結成分*を $\Lambda_i^{(\nu)}$ とおく。Λ_i が good Lagrangean なら $\Lambda_i^{(\nu)}$ は G orbit となっている。従って $\Lambda_i^{(\nu)}$ を指定するには，その代表点を示せばよい。

$$\Lambda_2^{(1)} \qquad \overset{\text{代表点}}{(x_2^{(1)}, y_2^{(2)})} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Lambda_2^{(2)} \qquad (x_2^{(2)}, y_2^{(2)}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

*正確には Λ_i でなく $(x_0, y_0) \in \Lambda_i$ を generic point として $G(x_0, y_0)$

$$\Lambda_2^{(3)}(x_2^{(3)}, y_2^{(3)}) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Lambda_1^{(1)}(x_1^{(1)}, y_1^{(1)}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Lambda_1^{(2)}(x_1^{(2)}, y_1^{(2)}) = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

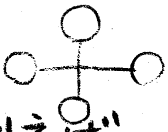
$$\Lambda_1^{(3)}(x_1^{(3)}, y_1^{(3)}) = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Lambda_1^{(4)}(x_1^{(4)}, y_1^{(4)}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Lambda_0^{(1)} \overset{\text{代表点}}{(x_0^{(1)}, y_0^{(1)})} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Lambda_0^{(2)}(x_0^{(2)}, y_0^{(2)}) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Lambda_0^{(3)}(x_0^{(3)}, y_0^{(3)}) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

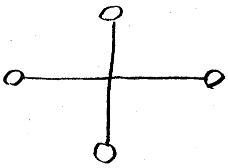
図で  となっているのは，codim 1 の交わりを示す。例えば $\Lambda_2 \cap \Lambda_1 \cap \sqrt{-1}\, T^*V$ は二つの成分からなり，それぞれは G orbit になっている。そのうちの一方の generic point は

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) = (x_1, y_2)$$

であり，$G(x_1, y_2)$ を中心として $\Lambda_2^{(1)}$，$\Lambda_2^{(2)}$ と $\Lambda_1^{(1)}$，$\Lambda_1^{(4)}$ とが交わっている。この点をはっきりさせるために，4つのLagrangeanのgeneric point を書いてやると

$$\Lambda_1^{(1)} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \right)$$

$$\Lambda_2^{(1)} \left(\begin{pmatrix} 1-\varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \right)$$



$$\Lambda_2^{(2)} \left(\begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Lambda_1^{(4)} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix} \right)$$

となる。ここで $\varepsilon > 0$ であり，$\varepsilon = 0$ の時，交わりのgeneric point になる。

さて，具体例として上記の例を思い浮かべてもらう事として一般論に戻ろう。

Λ をgood Lagrangean (real*) とし $\Lambda^{(\nu)}$ をその連結成分とする。M.O.S. $\mathfrak{M}$ は Λ でsimple だから，$\Lambda^{(\nu)}$ におけるmicrofunction solution は一次元である。そのbaseを指定しよう。そのためにはprincipal symbolを指定すればよい。

* pure imaginaryと言うべきかも知れないがrealと統一する。

$\Lambda^{(\nu)}$のgeneric pointを$(x^{(\nu)}, y^{(\nu)})$とすると
$\Lambda^{(\nu)} = \sqrt{-1}\, T^*_{Gx^{(\nu)}} V$である。すなわち$\Lambda^{(\nu)}$は
conormal bundleになっている。そこで$\Lambda^{(\nu)}$上で
principal symbolが

$$\sigma_{\Lambda^{(\nu)}}(u_{\Lambda^{(\nu)}}) = |f_\Lambda|^s \sqrt{|\omega_\Lambda|}/\sqrt{|dx|} \qquad (10)$$

となるようなmicrofunction solutionを$u_{\Lambda^{(\nu)}}$と
する。

補題(2.2)

ΓをV^*のconeとする。$\varphi(y)$をΓで定義された
k次homogeneousなreal analytic functionとす
る。

$$u = \int_\Gamma \varphi(y)\, e^{i\langle y, x\rangle}\, dy$$

は，$0 \times \Gamma \subset V \times V^*$の近傍で定義され，$0 \times \Gamma$に
supportを持つmicrofunctionであり，そのprincipal
symbolは

$$\sigma(u) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \varphi(y) \sqrt{|dy|}/\sqrt{|dx|}$$

で与えられる。

$$\because) \int \varphi(y)\, e^{i\langle y, x\rangle} dy$$

$$= \int_0^\infty \int_{|\xi|=1} \varphi(r\xi)\, e^{ir\langle \xi, x\rangle} r^{n-1} dr\, \omega(\xi)$$

$$= \int_0^\infty r^{-k+n-1} e^{ir\langle \xi, x\rangle} dr \int_{|\xi|=1} \varphi(\xi)\, \omega(\xi)$$

$$= \int_{|\xi|=1} \varphi(\xi)\, \Phi_{k+n}\big(i(\langle \xi, x\rangle + i0)\big)\, \omega(\xi)$$

今 $\sqrt{-1}\, T^*V \cong V \times V^*$ と同一視しているから

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{-1}\,T^*V & & V\times V^* \\ \Psi & & \Psi \\ (x, \sqrt{-1}\, y\, dx) & \leftrightarrow & (x, y) \end{array}$$

$\sigma(u) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \varphi(y) \sqrt{|dy|} / \sqrt{|dx|}$ となる。

q.e.d.

この補題によって $\mathcal{U}_\nu^*(S + x_0)$ の $0 \times V^{*(\nu)}$ における principal symbol が計算できる。例 (2.1) で言えば、$\Lambda_2^{(1)}, \Lambda_2^{(2)}, \Lambda_2^{(3)}$ でわかる事になる。§1の4) の結果を利用して、$\Lambda_2^{(1)}$ と $\Lambda_2^{(2)}$ から $\Lambda_1^{(1)}$ と $\Lambda_1^{(2)}$ がわかり、$\Lambda_2^{(2)}$ と $\Lambda_2^{(3)}$ から $\Lambda_1^{(3)}$ と $\Lambda_1^{(4)}$ がわかる。次いで、$\Lambda_1^{(1)}$ と $\Lambda_1^{(4)}$ から $\Lambda_0^{(1)}$ と $\Lambda_0^{(2)}$，$\Lambda_1^{(2)}$ と $\Lambda_1^{(3)}$ から $\Lambda_0^{(2)}$ と $\Lambda_0^{(3)}$ における principal symbol がわかる。この時、$\Lambda_0^{(2)}$ の値はどちらから求めても同じになる事は、$\mathcal{U}_\nu^*(S + x_0)$ が $V \times V^*$ 全体で定義されているから当然である。

このようにして $\mathcal{U}_\nu^*(s+\chi_0)$ の $\Lambda_0^{(\mu)}$ における principal symbol が求められる。一方 $\mathcal{U}_\nu(s)$ の $\Lambda_0^{(\mu)}$ における principal symbol は明らかに

$$\sigma_{\Lambda_0^{(\mu)}}(\mathcal{U}_\nu(s)) = \begin{cases} |f|^s(x) & (\nu=\mu) \\ 0 & (\nu\neq\mu) \end{cases}$$

であるから，これにより，変換行列は計算できる。以下それを実行しよう。

$\Lambda = 0\times V^*$とする。f_Λ^χ，$f^{*\chi}$ はどちらも，V^*の character χに対応する相対不変式だから 定数 $c_0=(c_0^1,\cdots,c_0^l)$があって

$$f_\Lambda^\chi = c_0^\chi f^{*\chi}$$

となるはずである。c_0は次のようにして求められる。P46で$\varphi_s(x)$を定義したが $(x,y)\in W'$とする時

$$y = \varphi_{s(x,y)}(x)$$

である。(これは(7) と(8)から明らか。) sを変数として

$f^\chi(x)/f^{*\chi}(\varphi_s(x))$ を考えると，sの同次多項式になる。([5] を見てほしい。) 実はこれは $a_\Lambda^\chi(s)$の定数倍になる。それは$a_\Lambda^\chi(s)$ の定義と

$$f^{\chi}(x) \Big/ \left(f^{\chi}(x) / f^{*\chi}(\varphi_{s(x,y)}(x)) \right) = f^{*\chi}(y)$$

なる事から明らか。よって C_0 は

$$a_1^{\chi}(s)^{-1} f^{\chi}(x) = c_0^{\chi} f^{*\chi}(\varphi_s(x))$$

から計算できる。

次に ω_1 を考えよう。ω_1 は character χ_0 に対応する V^* 上の n form であるから $f^{*2\chi_0} dy$ の定数倍に等しい。

$$\omega_1 = c_1 f^{*2\chi_0} dy$$

c_1 を求めよう。

1 の近傍で W の点は $(-\operatorname{grad} \log f^{*s}(y) ; y)$ と表わされる。

$$dx \wedge ds = (-)^n d \operatorname{grad} \log f^{*s}(y) \wedge ds$$

$$= (-)^n \operatorname{Hess} \log f^{*s}(y)\, dy \wedge ds$$

$$\therefore \ \omega_1 = (-)^n \frac{\operatorname{Hess} \log f^{*s}(y)}{C_1(s)} dy$$

$C_1(s)$ が n 次同次である事に注意して

$$c_1 = f^{*-2\chi_0}(y) \frac{\operatorname{Hess} \log f^{*(-s)}(y)}{C_1(s)}$$

で計算できる。（[10] の P31の注意を見て下さい。）
(10) で定義したように

$$
\begin{aligned}
\sigma_{0\times V^{*(\nu)}}(u_{0\times V^{*(\nu)}}) &= |f_\Lambda|^s \sqrt{\omega_\Lambda}/\sqrt{dx} \\
&= |c_0|^s |f^*(y)|^s \sqrt{|c_1|}\, |f^*(y)|^{\chi_0} \sqrt{|dy|}/\sqrt{|dx|} \\
&= |c_0|^s \sqrt{|c_1|}\, |f^*(y)|^{s+\chi_0} \sqrt{|dy|}/\sqrt{|dx|} \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |c_0|^s \sqrt{|c_1|}\, \sigma_{0\times V^{*(\nu)}}\left(\int_{V^{*(\nu)}} |f^*(y)|^{s+\chi_0} e^{i\langle y,x\rangle} dy\right)
\end{aligned}
$$

これから

$$
\sigma_{0\times V^{*(\mu)}}(u_\nu^*(s+\chi_0)) = \begin{cases} (2\pi)^{\frac{n}{2}} |c_0|^{-s} |c_1|^{-\frac{1}{2}} \sigma_{0\times V^{*(\nu)}}(u_{0\times V^{*(\nu)}}(s)) & \nu=\mu \\ 0 & \nu\neq\mu \end{cases}
$$

さて，Vにおける超函数 u が $\mathfrak{M}$ の解になっているとする。 $u|_{\Lambda^{(\nu)}} = c_{\Lambda^{(\nu)}} u_{\Lambda^{(\nu)}}$ とする。（(10)の $\Lambda^{(\nu)}$）
次節で，我々は次の行列 $A(s)$ の計算法を知るだろう。

$$
\begin{bmatrix} c_{0\times V^{*(1)}} \\ \vdots \\ c_{0\times V^{*(N)}} \end{bmatrix} = A(s) \begin{bmatrix} c_{V^{(1)}\times 0} \\ \vdots \\ c_{V^{(N)}\times 0} \end{bmatrix} \qquad (11)
$$

この時，Fourier変換は次のように与えられる。

$$\begin{pmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_N(s) \end{pmatrix} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |C_0|^s |C_1|^{\frac{1}{2}}\, {}^t A(s) \begin{pmatrix} u_1^*(s+x_0) \\ \vdots \\ u_N^*(s+x_0) \end{pmatrix}$$

∵)

$u = \sum C_{V^{(\nu)} \times 0}\, u_\nu(s)$ とする。(11)から $C_{0 \times V^{*(\nu)}}$ が決まって

$$\sigma_{0 \times V^{*(\nu)}}(u) = C_{0 \times V^{*(\nu)}}\, \sigma_{0 \times V^{*(\nu)}}(u_{0 \times V^{*(\nu)}})$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |C_0|^s |C_1|^{\frac{1}{2}} C_{0 \times V^{*(\nu)}}\, \sigma_{0 \times V^{*(\nu)}}(u_\nu^*(s+x_0))$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |C_0|^s |C_1|^{\frac{1}{2}}\, \sigma_{0 \times V^{*(\nu)}}\Big(\sum_\mu C_{0 \times V^{*(\mu)}}\, u_\mu^*(s+x_0)\Big)$$

よって $u = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |C_0|^s |C_1|^{\frac{1}{2}} \sum_\mu C_{0 \times V^{*(\mu)}}\, u_\mu^*(s+x_0)$

ここで $C_{V^{(\nu)} \times 0}$ は任意だから，求める結果を得る。

q.e.d.

3) 接続行列と Maslov index

Λ_0, Λ_1 を codim 1 で交わる good Lagrangean
その交わりを S とする。

定義 (3.1)

Λ_0 と Λ_1 very good intersection とは
i) S が G pre-homogeneous
ii) p を S の generic point として

$$\dim g_0 p = n - l$$

この時, 次の補題が成り立つ。証明は付録 iv) を見てほしい。

補題 (3.2)

Λ_0 と Λ_1 が good intersection ならば
i) p の近傍で $W = W'$ かつそれは non-singular
ii) Λ_0 と Λ_1 は regular intersection.

これにより, 量子化された接触変換によって, §1 4) の結果を利用できる.

以下 $p = (x_1, y_0) \in S$ $\Lambda_1 = \sqrt{-1}\, T^*_{Gx_1} V$ とする。まず P38 における $\Lambda_{\pm}$ を区別する方法を考えよう。

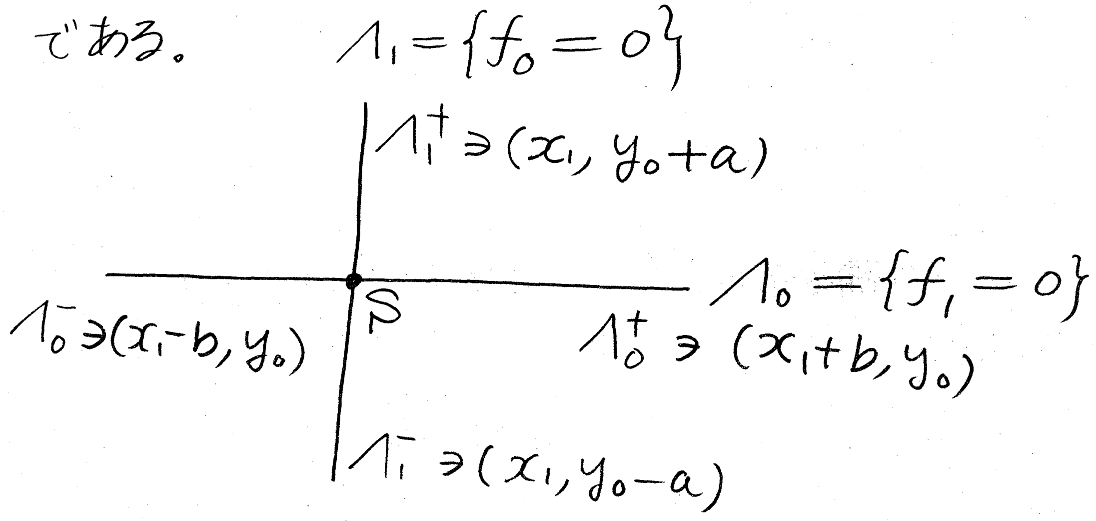
$$T_p\Lambda_1 = g(x_1, y_0) + 0 \times V^*_{x_1}$$

$$T_p\Lambda_0 = g(x_1, y_0) + V_{y_0} \times 0$$

である。但し

$$V^*_{x_1} = (g x_0)^{\perp} \subset V^*, \quad V_{y_0} = (g y_0)^{\perp} \subset V$$

である。



今 $a \in V^*_{x_1}$, $b \in V_{y_0}$ を適当に選んで上図のようになったとする。この時 $\langle a, b \rangle > 0$ である。即ち，$\langle a, b \rangle > 0$ の時 Λ_0 の a 方向の成分における f_0 の符号と，Λ_1 の b 方向の成分における f_1 の符号とは等しい。ここで f_0, f_1 は P38で与えたものである。(ここで，＋とか－とかに意味があるのではなく，$\mathrm{Im}\{f_0, f_1\} > 0$ のもとで，Λ_0 の連結成分のどれと Λ_1 の連結成分のどれとが同符号になるかが意味を持つ。そ

れによって接触変換して標準形に持っていった時，どの成分がどの成分に対応するかがわかる。）

例(2.1) P64で言えば $a = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ \vdots \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

であり，$\Lambda_1^{(1)}$と$\Lambda_2^{(2)}$ $\Lambda_1^{(4)}$と$\Lambda_2^{(1)}$が同符号である。

∵) 点 P で考えると

$$H_{f_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial y} \\ -\frac{\partial f_0}{\partial x} \end{pmatrix} \in T_p\Lambda_1$$

$$H_{f_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ -\frac{\partial f_0}{\partial x} \end{pmatrix} \in T_p\Lambda_0$$

であり，$Im\{f_0, f_1\} > 0$ は 言い換えると

$$Im E(H_{f_0}, H_{f_1}) < 0$$

である。$f_0(x_1+b, y_0) > 0$ は

$$I_m E\left(\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, H_{f_0}\right) > 0$$

$f_1(x_1, y_0+a) > 0$は

$$I_m E\left(H_{f_1}, \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix}\right) > 0$$

となる。これから $\begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix}$ と H_{f_1}，$\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ と H_{f_0} は

同じ向きであるから

$$\mathrm{Im}\, E\left(\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-b\\0\end{pmatrix}\right) = -\langle a, b\rangle < 0$$

q. e. d.

$$\Lambda_0 = \Lambda_0^+ \cup \Lambda_0^- \cup S$$
$$\Lambda_1 = \Lambda_1^+ \cup \Lambda_1^- \cup S$$

であり，Λ_0をP37の$\{x_2=0\}$に，Λ_1を$\{\xi_2>0\}$に接触変換で移した時，Λ_0^+が$\{\xi_2>0\}$にΛ_1^+が$\{x_2>0\}$に対応する。

$$e(S) + a - \frac{1}{2} = \mathrm{ord}_{\Lambda_1} f^S - \mathrm{ord}_{\Lambda_0} f^S$$

とおく。

補題 (3.3)

$f_{\Lambda_0}^{\chi}$ はSで$e(\chi)$位のpole

$f_{\Lambda_1}^{\chi}$ はSで$e(\chi)$位のzero

ω_{Λ_0}はSで$2a$位のpole

ω_{Λ_1}はSで$2(a-1)$位のzero

∵) 接触変換してP36をにらんでやると，$\lambda \in \mathbb{C}$として

$$\sigma_{\Lambda_0}(f^{s+\lambda x}) = f_{\Lambda_0}^{s+\lambda x}\sqrt{\omega_{\Lambda_0}}/\sqrt{dx}$$

は$\{-e(s+\lambda x)-a\}$位のzeroを持つから，λ と $\lambda+1$ を比べれば，$f^{x}_{\Lambda_0}$ は $e(x)$ 位のpoleである事がわかり，$s+\lambda x=0$ として ω_{Λ_0} は $2a$ 位のpoleである事がわかる。Λ_1 についても同様である。 q.e.d.

我々は，f_0，f_1 を作り P41 の公式に持ち込みたい。

（疲れたらコーヒーを飲みましょう。電動式コーヒーミルは便利です。）

$e(x)>0$ なる x を取って

$$f_1\big|_{\Lambda_1}=\left(f^{x}_{\Lambda_1}\right)^{\frac{1}{e_1(x)}},\quad f_0\big|_{\Lambda_0}=\left(f^{x}_{\Lambda_0}\right)^{-\frac{1}{e_1(x)}}$$

とする。これらの右辺は，補題(3.3)により，適当な分枝を取れば定義できる。さらに，

$$f_0\big|_{\Lambda_1}=0,\quad f_1\big|_{\Lambda_0}=0$$

となるように，f_0，f_1 を延長する時，

$$\{f_0, f_1\}\big|_S$$

は延長の仕方に依らない事はやさしい。実は分枝をうまく取

って

$$\mathrm{Im}\{f_0, f_1\}\Big|_S = 1$$

とできる事を示そう。

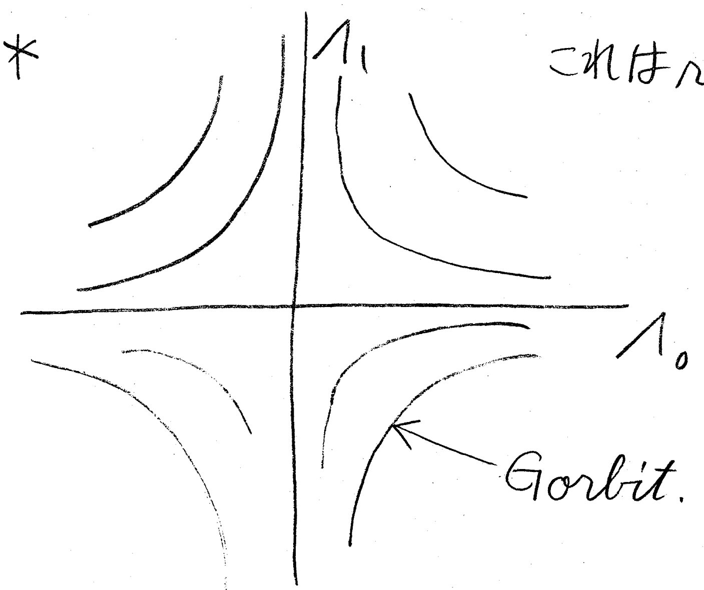
実は $f_0 = \left(\dfrac{f^x}{a^x_{\Lambda_0}(s)}\right)^{-\frac{1}{e(x)}}$ $f_1 = \left(\dfrac{f^x}{a^x_{\Lambda_1}(s)}\right)^{\frac{1}{e(x)}}$

がW上 well definedである。例えばf_0について言えば，右辺は，$\Lambda_0 - S$ の近傍で定義されたから，G orbit に沿って解析接続すると*，$W - \Lambda_1$ で一価正則となる。ところが $a^x_{\Lambda_0}(s)/a^x_{\Lambda_1}(s) = e(s)^{e(x)}$ であるから

$$f_0^{\,e(x)} = e(s)^{e(x)} \frac{a^x_{\Lambda_1}(s)}{f^x} = 0 \text{ on } \Lambda_1$$

となって，$\Lambda_1 - S$ の近傍でも正則となる。SはWで codim $\geqq 2$ 故，除ける特異点である。

* これはrealの図。



$$\sqrt{-1}\{f_0, f_1\} = \sqrt{-1}\left\{\left(\frac{f^x}{a^x_{1_0}(s)}\right)^{-\frac{1}{e(x)}}, \left(\frac{f^x}{a^x_{1_1}(s)}\right)^{\frac{1}{e(x)}}\right\}$$

$$= \sqrt{-1}\left\{e(s)\left(\frac{f^x}{a^x_{1_1}(s)}\right)^{-\frac{1}{e(x)}}, \left(\frac{f^x}{a^x_{1_1}(s)}\right)^{\frac{1}{e(x)}}\right\}$$

$$= \sqrt{-1}\left(\frac{f^x}{a^x_{1_1}(s)}\right)^{-\frac{1}{e(x)}}\left\{e(s), \left(\frac{f^x}{a^x_{1_1}(s)}\right)^{\frac{1}{e(x)}}\right\}$$

$$= \sqrt{-1}\left(\frac{f^x}{a^x_{1_1}(s)}\right)^{-1}\frac{1}{e(x)}\left\{e(s), \frac{f^x}{a^x_{1_1}(s)}\right\}$$

$$= \sqrt{-1}\,\frac{1}{f^x e(x)}\{e(s), f^x\}^{*}$$

$e(s) = \sum_{i=1}^{l} a_i s_i$ とすると

$$\{e(s), f^x\} = \sum_{i=1}^{l} a_i\{s_i, f^x\}$$

$$= \sum_{i=1}^{l} a_i\{\langle A_i x, y\rangle, f^x\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\sum_{i=1}^{l} a_i \nu_i f^x = \frac{1}{\sqrt{-1}}e(x) f^x$$

$$\therefore\ \sqrt{-1}\{f_0, f_1\} = 1$$

q.e.d.

＊これらの等式は，f_0, f_1 を全体に延長したものについて S上の値だけを考えた時に成り立つ。

$\mathcal{U}_{\Lambda_0^{\varepsilon_0}}(s)$, $\mathcal{U}_{\Lambda_1^{\varepsilon_1}}(s)$ $(\varepsilon_0, \varepsilon_1 = \pm)$ をprincipal symbolが

$$\sigma_{\Lambda_\nu^{\varepsilon_\nu}}(\mathcal{U}_{\Lambda_\nu^{\varepsilon_\nu}}(s)) = |f_{\Lambda_\nu}|^s \sqrt{|\omega_{\Lambda_\nu}|/|dx|}$$

で与えられる $\mathcal{M}$ の microfunction solutionとする。一方 $\mathcal{U}_{\varepsilon_1}$ を

$$\mathcal{U}_{\varepsilon_1}\Big|_{\Lambda_1^{\varepsilon_1}} = \mathcal{U}_{\Lambda_1^{\varepsilon_1}}(s)$$

$$\mathcal{U}_{\varepsilon_1}\Big|_{\Lambda_1^{-\varepsilon_1}} = 0$$

で決まる，$\mathcal{M}$ の $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ における解とする。

$$\mathcal{U}_{\varepsilon_1}\Big|_{\Lambda_0^{\varepsilon_0}} = c_{\varepsilon_0\varepsilon_1}\mathcal{U}_{\Lambda_0^{\varepsilon_0}}(s)$$

とした時の $c_{\varepsilon_0\varepsilon_1}$ を求めよう。

P41 の公式の左辺は次のようになる。

$$|f_1|^{-e(s)-a+1}|f_{\Lambda_1}|^s\sqrt{|\omega_{\Lambda_1}|}\sqrt{v/|w\wedge df_1|}\, e^{\frac{\pi}{4}\{\tau(\lambda,\lambda_{\Lambda_1^{\varepsilon_1}},\mu) + \tau(\lambda_{\Lambda_1},\lambda_{\Lambda_0},\mu)\}}$$

$$: c_{\varepsilon_0\varepsilon_1}|f_0|^{e(s)+a}|f_{\Lambda_0}|^s\sqrt{|\omega_{\Lambda_0}|}\sqrt{v/|w\wedge df_0|}\, e^{\frac{\pi}{4}\tau(\lambda,\lambda_{\Lambda_0^{\varepsilon_0}},\mu)}$$

ここで $\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_1^{\varepsilon_1}}, \mu)$ は S に近い $\Lambda_1^{\varepsilon_1}$ の点で計算

する。$\tau(\lambda, \lambda_{1_0}{}^{\varepsilon_0}, \mu)$ も同じ。$\tau(\lambda_{1_1}, \lambda_{1_0}, \mu)$ はSで計算する。

まず

$$|f_{,1}|^{1-a}\sqrt{|\omega_{1_1}|}\sqrt{v/|w\wedge df_{,1}|} : |f_{,0}|^{a}\sqrt{|\omega_{1_0}|}\sqrt{v/|w\wedge df_{,0}|}$$

を求めよう*。次の予想を仮定する。

予想(3.4)

ω_{1_0}, ω_{1_1} の homog. degree を $-\mu_0$, $-\mu_1$ とすると

$$C_{1_0}(s) = \mathrm{const.}\ e(s)^{\mu_0-\mu_1}\, C_{1_1}(s)$$

ここで const.を 1 となるように $C_{1_1}(s)$ を決める。(こうする事により p68 の C_1 が決まる。)

また $\mu_0 - \mu_1 = 2a-1$ である。

$$|f_{,1}|^{2-2a}|\omega_{1_1}|\cdot v/|w\wedge df_{,1}| : |f_{,0}|^{2a}|\omega_{1_0}|\cdot v/|w\wedge df_{,0}|$$

$$= \left|\frac{f^x}{a^x_{1_1}(s)}\right|^{\frac{2-2a}{e(x)}}\left\{\frac{\pi^*(dx)\wedge ds}{C_{1_1}(s)}\Big/ ds\right\}\cdot\left\{v\Big/\left|w\wedge d\left(\frac{f^x}{a^x_{1_1}(s)}\right)^{\frac{1}{e(x)}}\right|\right\}$$

$$: \left|\frac{f^x}{a^x_{1_0}(s)}\right|^{-\frac{2a}{e(x)}}\left\{\frac{\pi^*(dx)\wedge ds}{C_{1_0}(s)}\Big/ ds\right\}\cdot\left\{v\Big/\left|w\wedge d\left(\frac{f^x}{a^x_{1_0}(s)}\right)^{-\frac{1}{e(x)}}\right|\right\}$$

*補題(3.3)からこれらはS上正則で比が意味を持つ。

$$\left|\frac{f^x}{a^x_{\lambda_1}(s)}\right|^{\frac{2-2a}{e(x)}}\left\{\frac{\pi^*(dx)\wedge ds}{c_{\lambda_1}(s)}\right\}$$ や

$$\left|\frac{f^x}{a^x_{\lambda_0}(s)}\right|^{-\frac{2a}{e(x)}}\left\{\frac{\pi^*(dx)\wedge ds}{c_{\lambda_0}(s)}\right\}$$ は W 上 well-defined な $(n+l)$ form である。これを比べるには、generic な（$a^x_{\lambda_1}(s)$, $a^x_{\lambda_0}(s)$, $c_{\lambda_1}(s)$, $c_{\lambda_0}(s)$ などが non zero）G orbit（p76 の図）の上で比べればよく、従って p79 の比の計算において、形式的に、
$$a^x_{\lambda_0}(s) = e(s)^{e(x)} a^x_{\lambda_1}(s)$$
$$c^x_{\lambda_0}(s) = e(s)^{2a-1} c^x_{\lambda_1}(s)$$
を代入しても構わない。よってこの比は 1 となる。

p78 から続いて、
$$|f_1|^{-e(s)}|f_{\lambda_1}|^s e^{\frac{\pi}{4}\{\tau(\lambda,\lambda_{\lambda_1}\varepsilon_1,\mu)+\tau(\lambda_{\lambda_1},\lambda_{\lambda_0},\mu)\}}$$
$$:c_{\varepsilon_0\varepsilon_1}|f_0|^{e(s)}|f_{\lambda_0}|^s e^{\frac{\pi}{4}\tau(\lambda,\lambda_{\lambda_0}\varepsilon_0,\mu)}$$
$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(e(s)+a)} : e^{\varepsilon_0\varepsilon_1\frac{\pi i}{2}(e(s)+a)}$$

となる。同じような論法で
$$|f_1|^{-e(s)}|f_{\lambda_1}|^s : |f_0|^{e(s)}|f_{\lambda_0}|^s = 1$$

となるから

$$C_{\varepsilon_0\varepsilon_1} = \frac{\Gamma(e(s)+a)}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\pi i}{2}(e(s)+a)\varepsilon_0\varepsilon_1} \times$$

$$\times e^{\frac{\pi}{4}\{\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_1^{\varepsilon_1}}, \mu) + \tau(\lambda_{\Lambda_1}, \lambda_{\Lambda_0}, \mu) + \tau(\lambda_{\Lambda_0^{\varepsilon_0}}, \lambda, \mu)\}}$$

以上で次の公式が得られた。

公式(3.5)*

uが，$\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ における $\mathcal{M}$ の microfunction solution ならば

$$u = C_{\Lambda_\nu^{\varepsilon_\nu}} u_{\Lambda_\nu^{\varepsilon_\nu}} \quad \text{on } \Lambda_\nu^{\varepsilon_\nu}$$

とすると

$$\begin{pmatrix} C_{\Lambda_0^+} \\ C_{\Lambda_0^-} \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(e(s)+a)}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi i}{2}(e(s)+a) + \frac{\pi}{4}\tau_{++}} & e^{-\frac{\pi i}{2}(e(s)+a) + \frac{\pi}{4}\tau_{+-}} \\ e^{-\frac{\pi i}{2}(e(s)+a) + \frac{\pi}{4}\tau_{-+}} & e^{\frac{\pi i}{2}(e(s)+a) + \frac{\pi}{4}\tau_{--}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{\Lambda_1^+} \\ C_{\Lambda_1^-} \end{pmatrix}$$

但し $\tau_{\varepsilon_0\varepsilon_1} = \tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_1^{\varepsilon_1}}, \mu) + \tau(\lambda_{\Lambda_1}, \lambda_{\Lambda_0}, \mu) + \tau(\lambda_{\Lambda_0^{\varepsilon_0}}, \lambda, \mu)$

＊実際計算には公式(3.6)を使う。

最後に$\tau_{\varepsilon_0\varepsilon_1}$の計算法を与えよう。
V_1, V_2をベクトル空間とし$f: V_1 \longrightarrow V_2$をsurjectiveなlinear mapとする。V_2の2次形式をQとすると$\mathrm{sgn}\, Q = \mathrm{sgn}\, f^*Q$である。
これから直ちに、

補題(3,6) (x_0, y_0)をΛのgeneric pointとすると

$$\tau(\lambda, \lambda_\Lambda, \mu_0) = \sqrt{-1}\ \underset{A\in\mathfrak{g}}{\mathrm{sgn}} \langle Ax_0, -{}^tAy_0\rangle$$

$$= \sqrt{-1}\ \underset{(x,y)\in T_{(x_0,y_0)}\Lambda}{\mathrm{sgn}} \langle x, y\rangle$$

(但し$\mu_0 = V\times 0$)

$\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_1\varepsilon_1}, \mu)$について考えよう。$\Lambda_1 = T^*_{Gx_1}V$であるから$\lambda\cap\lambda_{\Lambda_1}$の次元はconstantとなり$\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_1\varepsilon_1}, \mu)$は$S$で計算した$\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_1}, \mu)$に等しい。

P30の性質ii)から

$\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \tau(\lambda_1, \lambda_2, \mu) + \tau(\lambda_2, \lambda_3, \mu) + \tau(\lambda_3, \lambda_1, \mu)$
また$\tau(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = \tau(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1) - \tau(\lambda_1, \lambda_2, \mu_2)$
とおくと$\tau(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = \tau(\lambda_1, \lambda_3, \mu_1, \mu_2)$
$+ \tau(\lambda_3, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$が成り立つ。

従って

$$\tau_{\varepsilon_0\varepsilon_1} = \tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_1}, \lambda_{\Lambda_0}) + \tau(\lambda_{\Lambda_1}, \mu, \lambda_{\Lambda_0})$$

$$+ \tau(\mu, \lambda, \lambda_{\Lambda_0}) + \tau(\lambda_{\Lambda_1}, \lambda_{\Lambda_0}, \mu)$$

$$+ \tau(\lambda_{\Lambda_0}{}^{\varepsilon_0}, \lambda, \mu)$$

$$= \tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_1}, \lambda_{\Lambda_0}) + \tau(\mu, \lambda, \lambda_{\Lambda_0}) + \tau(\lambda_{\Lambda_0}{}^{\varepsilon_0}, \lambda, \mu)$$

$\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_1}, \lambda_{\Lambda_0}) = 0$ を言おう。

$\rho = g(x_1, y_0) = \lambda_{\Lambda_1} \cap \lambda_{\Lambda_0}$ として P31 の v) を適用する。

$$\lambda_{\Lambda_1}^{\rho} = (g(x_1, y_0) + V_{x_1}^{*})^{\rho} = (\rho + V_{x_1}^{*}) / \rho$$

$$\lambda^{\rho} = (0 \times V^{*} \cap \rho^{\perp}) + \rho / \rho$$

$$= (0 \times V^{*} + \rho) \cap \rho^{\perp} / \rho$$

$\rho + V_{x_1}^{*} \subset (0 \times V^{*} + \rho) \cap \rho^{\perp}$ 故 $\lambda_{\Lambda_1}^{\rho} = \lambda^{\rho}$

q.e.d.

よって $\tau_{\varepsilon_0\varepsilon_1} = \tau(\lambda, \mu, \lambda_{\Lambda_0}{}^{\varepsilon_0}, \lambda_{\Lambda_0})$

$$= \tau(\lambda, \mu_0, \lambda_{\Lambda_0}{}^{\varepsilon_0}, \lambda_{\Lambda_0}) + \tau(\mu_0, \mu, \lambda_{\Lambda_0}{}^{\varepsilon_0}, \lambda_{\Lambda_0})$$

$\Lambda_0 = T_{Gy_0}^{*} V^{*}$ だから

$\tau(\mu_0, \mu, \lambda_{\Lambda_0^{\varepsilon_0}}, \lambda_{\Lambda_0}) = \tau(\mu_0, \mu, \lambda_{\Lambda_0^{\varepsilon_0}}) - \tau(\mu_0, \mu, \lambda_{\Lambda_0})$
$=0$ となる。従って

$$\tau_{\varepsilon_0 \varepsilon_1} = \tau(\lambda, \mu_0, \lambda_{\Lambda_0^{\varepsilon_0}}) - \tau(\lambda, \mu_0, \lambda_{\Lambda_0})$$

$\tau(\lambda, \mu_0, \lambda_{\Lambda_0^{\varepsilon_0}})$ は補題(3.6)に与えた。同じように

$$-\tau(\lambda, \mu_0, \lambda_{\Lambda_0}) = \sqrt{-1}\, \underset{(x,y)\in T_{(x_1,y_0)}\Lambda_0}{\mathrm{sgn}} \langle x, y\rangle$$

$$= \sqrt{-1}\, \underset{A \in \mathfrak{g}}{\mathrm{sgn}} \langle Ax_1, -{}^tAy_0\rangle$$

が成り立つ。

最後に P69 の $A(S)$ が求めやすい形で公式を書き直しておく。

公式(3.6) $\Lambda_1 = T^*_{Gx_1}V$, $\Lambda_0 = T^*_{Gy_0}V^*$ とする。

$\beta = \mathrm{ord}_{\Lambda_0} f^s - \mathrm{ord}_{\Lambda_1} f^s + \frac{1}{2}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} c_{\Lambda_1^+} \\ c_{\Lambda_1^-} \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{\pi i}{2}\beta} & e^{\frac{\pi i}{2}\beta} \\ e^{\frac{\pi i}{2}\beta} & e^{-\frac{\pi i}{2}\beta} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{4}\{\tau(\Lambda_0^+) - \tau(\Lambda_0 \cap \Lambda_1)\}} & \\ & e^{\frac{\pi}{4}\{\tau(\Lambda_0^-) - \tau(\Lambda_0 \cap \Lambda_1)\}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\Lambda_0^+} \\ c_{\Lambda_0^-} \end{pmatrix}$$

但し $\tau(\Lambda_0^{\pm}) = \sqrt{-1} \operatorname*{sgn}_{A\in\mathfrak{g}} \langle Ax_0^{\pm}, -{}^tAy_0^{\pm} \rangle$

for $(x_0^{\pm}, y_0^{\pm}) \in \Lambda_0^{\pm}$

$$\tau(\Lambda_0 \cap \Lambda_1) = \sqrt{-1} \operatorname*{sgn}_{A\in\mathfrak{g}} \langle Ax_1, -{}^tAy_0 \rangle$$

付録　Maslov index の性質

λ, μ を二つの Lagrangean で $\lambda \cap \mu = 0$ なるものとする。この時 $\lambda + \mu = 0$ となるから，V は λ と μ の直和である。射影 $\lambda \oplus \mu \longrightarrow \lambda$ を $P_{\lambda\mu}$ と書く。

補題1.　$E(P_{\lambda\mu}x, y) = E(x, P_{\mu\lambda}y)$

$\because)$　$P_{\lambda\mu} + P_{\mu\lambda} = 1$ だから $E(P_{\lambda\mu}x, y) = E(P_{\lambda\mu}x, P_{\lambda\mu}y + P_{\mu\lambda}y)$

λ が Lagrangean 故　$= E(P_{\lambda\mu}x, P_{\mu\lambda}y)$

同じく $E(x, P_{\mu\lambda}y) = E(P_{\lambda\mu}x, P_{\mu\lambda}y)$　q.e.d.

$\lambda_\nu \cap \mu = 0$　$(\nu = 1, 2)$ とし $\sigma(\lambda_1, \lambda_2, \mu) = \operatorname{sgn}_{\lambda_2} E(P_{\lambda_1\mu}x, x)$ を補助的に定義する。

補題2.　$\sigma(\lambda_1, \lambda_2, \mu) = -\sigma(\lambda_2, \lambda_1, \mu)$

$\because)$　$\lambda_1 \underset{P_{\lambda_1\mu}}{\overset{P_{\lambda_2\mu}}{\rightleftarrows}} \lambda_2$ が互いに逆写像になる事を言おう。

$x \in \lambda_1$ の時

$$P_{\lambda_1\mu}P_{\lambda_2\mu}x = P_{\lambda_1\mu}(x - P_{\mu\lambda_2}x) = P_{\lambda_1\mu}x - P_{\lambda_1\mu}P_{\mu\lambda_2}x$$
$$= P_{\lambda_1\mu}x = x$$

そこで $\operatorname{sgn}_{\lambda_2} E(P_{\lambda_1\mu}x, x) = \operatorname{sgn}_{\lambda_1} E(P_{\lambda_1\mu}P_{\lambda_2\mu}y, P_{\lambda_2\mu}y)$

$$= \operatorname{sgn}_{\lambda_1} E(y, P_{\lambda_2\mu}y) = -\operatorname{sgn}_{\lambda_1} E(P_{\lambda_2\mu}y, y)$$

q.e.d.

補題3.　$\dim(\lambda_1 \cap \lambda_2)$ が constant となるようにかつ連続的に λ_1, λ_2 を動かした時 $\sigma(\lambda_1, \lambda_2, \mu)$ は不変

∵) λ_2 上の2次形式 $E(p_{\lambda_1\mu}x, x)$ の rank が不変な事を示せばよい。それは実は $n - \dim(\lambda_1 \cap \lambda_2)$ となる。

$x, y \in \lambda_2$ の時 $E(p_{\lambda_1\mu}y, x) = E(y, p_{\mu\lambda_1}x)$

$= -E(p_{\mu\lambda_1}x, y) = E(p_{\mu\lambda_1}x - x, y) = E(p_{\mu\lambda_1}x, y)$

であるから $n - \underset{x\in\lambda_2}{\mathrm{rank}}\, E(p_{\lambda_1\mu}x, x)$

$= \dim\{x \in \lambda_2 / E(p_{\lambda_1\mu}y, x) = 0 \text{ for } {}^{\forall} y \in \lambda_2\}$

$= \dim\{p_{\lambda_1\mu}(\lambda_2)^{\perp} \cap \lambda_2\} = \dim\{\lambda_1^{\perp} \cap \lambda_2\} = \dim\{\lambda_1 \cap \lambda_2\}$

q.e.d.

系3、$\sigma(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \underset{\mathrm{mod}\, 2\sqrt{-1}\mathbb{Z}}{\equiv} \sqrt{-1}\{n - \dim(\lambda_1 \cap \lambda_2)\}$

$\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ は σ を使うと次のように表わせる。

補題4、$\lambda_\nu \cap \mu = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3)$ として

$\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sigma(\lambda_1, \lambda_2, \mu) + \sigma(\lambda_2, \lambda_3, \mu) + \sigma(\lambda_3, \lambda_1, \mu)$

∵) 左辺は $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3 \ni (x_1, x_2, x_3)$ に対する2次形式 $E(x_1, x_2) + E(x_2, x_3) + E(x_3, x_1)$ の sgn. であり右辺は同じく $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3 \ni (y_1, y_2, y_3)$ に対する2次形式 $E(p_{\lambda_1\mu}y_2, y_2) + E(p_{\lambda_2\mu}y_3, y_3) + E(p_{\lambda_3\mu}y_1, y_1)$ の2次形式の sgn. である。変換 $x_1 = y_1 + p_{\lambda_1\mu}y_2$

$x_2 = y_2 + p_{\lambda_3\mu}y_3 \quad x_3 = y_3 + p_{\lambda_3\mu}y_1$ とその逆変換

$y_1 = \frac{1}{2}(x_1 - p_{\lambda_1\mu}x_2 + p_{\lambda_1\mu}x_3)$

$y_2 = \frac{1}{2}(x_2 - p_{\lambda_2\mu}x_3 + p_{\lambda_2\mu}x_1)$

$y_3 = \frac{1}{2}(x_3 - P_{\lambda_3\mu}x_1 + P_{\lambda_3\mu}x_2)$ によって，上記の2次形式は移り合う。　　　q.e.d.

補題2と補題4からp.30のMaslov indexの性質が従う。

注意　λ_1, λ_2に対し$\Lambda(V, \lambda_1, \lambda_2) = \{\lambda \subset V / \lambda \cap \lambda_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2)\}$とおくと，これは$n - \dim(\lambda_1 \cap \lambda_2) + 1$個のconnected componentに分かれ，各々のcomponentには，λ_1, λ_2を固定するVのsymplectic transformationが~~推移的に~~作用する。$\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda)$は各componentで定数であり，異なったcomponentで異なった値を取る。

[1] 柏原−木村 極大過剰決定系と概均質ベクトル空間の
b函数 数研講究録 226 代数解析学とその応用
[2] Sato−Kawai−Kashiwara Microfunctions
and pseudo-differential equations, Lecture notes
in Math. No. 287, Springer, 1973.
[3] Hörmander Fourier Integral Operators I
Acta Math. vol127, 1971.
[4] Arnol'd Characteristic class entering
in quantization conditions Func. anal. and
its appl. vol 1. 1967.
[5] 佐藤−新谷 概均質ベクトル空間の理論 数学の歩み
15−1
[6] 木村 修士論文 (東大)
[7] 木村 概均質ベクトル空間の特異軌道とb函数 数研講
究録 225
[8] 佐藤−神保 Micro-local Calculus I 数研講究
録 226
[9] 鈴木 修士論文 (名大)
[10] 佐藤−柏原−三輪 Imaginary Lagrangeanの
現われる場合のFourier変換