数理解析研究所講究録
第239巻 1975年 50-67



# On Local Solvability of Partial Differential Equations with Multiple Characteristics

京大 理学部　松本和一郎

## 1. Introduction.

偏微分作用素 $L(x;\partial_x)$ に対して、任意の $f(x)\in C^\infty$ を与えたとき、$Lu=f$ を満たす解 $u(x)$ が必ず存在するか？という問題を考える。$L(x,\partial_x)$ が principal type の時は必要十分条件が Nirenberg-Treves [7], Beals-Fefferman [1] によって与えられた。Double characteristics を持つ場合については必要条件が Cardoso-Treves [3] によって与えられた。その中で彼等は、証明の経過から、subprincipal part が重要な役割をはたしていることを指摘している。

ここでは、characteristics の multiplicities は単に、locally constant として高い重複度も許す。そのかわり、$L(x,\partial_x)$ の主要部は実係数であると仮定して、sub-principal part にも仮定をおいて、一つの十分条件を与える。（[5] 参照，証明の基本評価は [4] を利用する。）

$$L(x,\partial_x) = P(x,\partial_x) + Q(x,\partial_x) + R(x,\partial_x) \quad x\in\mathbb{R}^n$$

とかく。ここに、1) $P(x,\partial_x)$ は $s$ 次で $L(x,\partial_x)$ の主要部。実係数をもつものとする。2) $Q(x,\partial_x)$ は $s-1$ 次斉次部分。3) $R(x,\partial_x)$ は高々 $s-2$ 次である。なお $L(x,\partial_x)$ の係数はすべて $C^\infty$-class としておく。主要部 $P(x,\partial_x)$ に対する仮定をのべる。

<u>仮定 I</u>　$P$ の characteristics は locally constant multiplicities を持つ。

すなわち、$J = \{(x,\xi)\in V_x\times S_\xi^{n-1} \mid P(x,\xi)=0\}$

($V_x$ は $\mathbb{R}_x^n$ の原点の近傍, $S_\xi^{n-1}$ は dual space $\mathbb{R}_\xi^n$ の単位球。) とおくと、任意の $(x_0,\xi_0)\in J$ に対してある $(x_0,\xi_0)$ の $V_x\times S_\xi^{n-1}$ での近傍 $W$ とある自然数 $m$ (depending on $(x_0,\xi_0)$) があって、次を満たす。

$J$ は $W$ において、$x$ を fix すると $\xi$ について一定の重複度 $m$ をもつ。

上の仮定 I は、実は $J$ を connected components $J_k$ の union にかくと、$J_k$ が $x$ に無関係に $\xi$ について一定の重複度 $m_k$ を持つことを意味している。更に $J_k$ の各点の近傍において、適当に座標を回転することにより、$\xi'=(\xi_2,\cdots,\xi_n)$ とかくと、

$$P(x,\xi) = P_0(x,\xi)\{\xi_1-\psi(x,\xi')\}^{m_k}$$

と，$x$ について $C^\infty$，$\xi'$ について holomorphic の枠内で分解できる。ここに $P_0(x,\xi)=a_0(x)\{\xi_1^{s-m}-\sum_{j=0}^{s-m-1}a_j(x,\xi')\xi_1^j\}$ かつ，$P_0(x,\xi)$ は考えている点の近傍でゼロにならない。又，$P(x,\xi)$ が real-valued であることから，$\psi(x,\xi')$ も real-valued となる。

2．命題及び定理． 次に，subprincipal symbol $\Pi(x,\xi)=Q(x,\xi)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial\xi_j}P(x,\xi)$ に対しての仮定を述べる。 $J^{(2)}=\{(x,\xi)\in J\mid \mathrm{grad}_\xi P(x,\xi)=0\}$ とおき，$J^{(2)}=\bigcup_k J_k^{(2)}$ と，connected components に分ける。

仮定 II． $\Pi(x,\xi)$ は各 $J_k^{(2)}$ 上で次の (A) 又は (B) のどちらかを満たす。

(A) $\mathrm{Re}\,\Pi(x,\xi)\neq 0$ on $J_k^{(2)}$.

(B) $\Pi(x,\xi)\equiv 0$ on $J_k^{(2)}$． 更に $m_k\geqq 3$ の時は

$$\mathrm{grad}_\xi\,\mathrm{Re}\,\Pi(x,\xi)\neq 0 \quad \text{on } J_k^{(2)}.$$

命題． 上の仮定の下に，任意の実数 $l$ に対してある原点の近傍 $\Omega$ とある正定数 $C$ があって，

$$\|L^*u\|_{-l-s+2,\mathbb{R}^n}\geqq C\|u\|_{-l,\mathbb{R}^n}\quad \text{for } \forall u\in\mathcal{D}(\Omega)$$

となる。特に $J^{(2)}$ 上で常に (A) が満たされている時は，

$$\|L^*u\|_{-l-s+1,\mathbb{R}^n}\geqq C\|u\|_{-l,\mathbb{R}^n}\quad \text{for } \forall u\in\mathcal{D}(\Omega).$$

上の命題は．Calderónが Cauchy問題の解の一意性の証明に用いた評価を修正して得られる。（［2］,［4］参照）

命題を認めると、$(u,v)_{\mathcal{H}}=(L^*u,\ L^*v)_{-\ell-s+2,\mathbb{R}^n}$ の内積で $\mathcal{D}(\Omega)$ を完備化すると．Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が得られる。このとき．$\mathcal{H}$ は $H_{\Omega}^{-\ell}(\mathbb{R}^n)$ の稠密な部分空間となっている。

$(H_{\Omega}^{-\ell}(\mathbb{R}^n))'=H^{\ell}(\Omega)$ かつ $(H_{\Omega}^{-\ell}(\mathbb{R}^n))'\subset\mathcal{H}'$ だから．任意の $f(x)\in H^{\ell}(\Omega)$ に対して．Riesz の定理により唯一の $\mathcal{H}$ の元 $u(x)$ が対応して

$$<f,\varphi>=(u,\varphi)_{\mathcal{H}} \quad \text{for } \forall\varphi(x)\in\mathcal{H}$$

を満たす。特に $\varphi(x)\in\mathcal{D}(\Omega)$ に制限すると．$\sqrt{|\xi|^2+1}$ を symbol にもつ pseudo-differential operator を $\Lambda$ とかけば．

$$(u,\varphi)_{\mathcal{H}}=(\Lambda^{-\ell-s+2}L^*u,\ \Lambda^{-\ell-s+2}L^*\varphi)_{L^2}\ 。$$

$\Lambda^{-\ell-s+2}L^*u\in L^2$ だから．$\Lambda^{2(-\ell-s+2)}L^*u=v$ とおくと $v\in H^{\ell+s-2}(\mathbb{R}^n)$ でかつ．$(Lv,\varphi)_{L^2}=<f,\varphi>$ ，すなわち．distribution の意味で $Lv=f$ in $\Omega$ 。 なお．$J^{(2)}$ 上で常に (A) が満たされているときは、内積として．$(L^*u,L^*v)_{-\ell-s+1,\mathbb{R}^n}$ を採用して．全く同様の推論を行えば．次の定理を得る。

定理． 仮定I, II の下に．任意の実数 $\ell$ に対してある原点の近傍 $\Omega$ があって．任意の $f(x)\in H^{\ell}(\Omega)$ に対して $Lv=f$ in $\Omega$

の解 $v(x) \in H^{l+s-2}$ が存在する。特に $J^{(2)}$ 上で常に (A) が満たされている時は $v(x) \in H^{l+s-1}$ にとれる。

**3. 命題の証明.** $-l-s+2$ のかわりにあらためて $-l$ とかき，又，$L$ が $L^*$ と同じ条件を満たすことから，$L$ を用いて，

$$\|Lu\|_{-l} \geqq C\|u\|_{-l+s-2} \quad \text{for } \forall u(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$$

を証明する。証明に $\mathbb{R}^n_\xi - \{0\}$ の単位の分割を用いるが，そのとり方は，以下のようである。すなわち，まず $S^{n-1}_\xi$ の単位の分割 $\{\alpha_j(\xi)\}$ をとり，$\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ に対しては，$\alpha_j(\xi) = \alpha_j(\xi/|\xi|)$ で定義する。$S^{n-1}_\xi$ 上での $\{\alpha_j(\xi)\}$ のとり方は，$S^{n-1}_\xi$ 上の各点 $\xi_0$ について，その近傍に support を持つ $\{\alpha_j\}$ $(\alpha_j(\xi) \geqq 0)$ をとる。そのうちから，$\{supp[\alpha_j]\}$ が $S^{n-1}_\xi$ の covering になるように，Heine-Borel の定理により有限個をとり出し，$\tilde{\alpha}_j(\xi) = \alpha_j(\xi)\big/\sum_j \alpha_j(\xi)$ とおけばよい。各点 $\xi_0$ の近傍のとり方と，そこでの $\|\alpha\Lambda^{-l}Lu\|$ の下からの評価は，次の五つの場合に分けて，検討する。$J \cap \{x=0\} \times S^{n-1}_\xi$ を $\mathring{J}$ とかき，他もこれにならう。

Case 1. $\xi_0 \notin \mathring{J}$

Case 2. $\xi_0 \in \mathring{J} \setminus \mathring{J}^{(2)}$

Case 3. $\xi_0 \in \mathring{J}^{(2)}_k$ でかつ，そこで (A) が満たされている。

Case 4.　$\xi_0 \in \mathring{J}_k^{(2)}$ で $m_k = 2$, (B) が満たされている。

Case 5.　$\xi_0 \in \mathring{J}_k^{(2)}$ で $m_k \geqq 3$, (B) が満たされている。

ここでは．Case 4 の場合は Case 2 の評価を 2 度用いることにより．又．Case 5 の場合は．Case 3 の評価と Case 2 の評価をくり返して適用することにより．容易に得られるから省略する。さしあたり．$\Omega = B_h$ ととる。$B_h$ は原点を中心とする半径 $h$ の球である。一般に．

$$
\begin{aligned}
(1)\quad \alpha(D)\Lambda^{-l}L(x,D)u = {} & P(x,D)(\alpha\Lambda^{-l}u) - iQ(x,D)(\alpha\Lambda^{-l}u) \\
& - i\,\mathrm{grad}_\xi\Lambda^{-l}\cdot\mathrm{grad}_x P(x,D)(\alpha u) \\
& - i\,\mathrm{grad}_\xi\alpha(D)\cdot\mathrm{grad}_x P(x,D)(\Lambda^{-l}u) + \tilde{R}(x,D)u,
\end{aligned}
$$

（$\tilde{R}(x,D)$ は高々 $s-2$ 次）。

## 4. Case 1. (elliptic estimate).

$\xi_0 \notin \mathring{J}$ ゆえ．$\xi_0$ の近傍 $U_{\xi_0}$ と $V_x$ を十分小さくとれば．$\overline{V_x} \times \overline{U_{\xi_0}} \cap J = \phi$ にとれる。(1) の右辺において．symbol $P(x,\xi)$ は $supp[\alpha]$ の外では $\xi$ について自由に修正してよいから、適当に修正すると．global に $|P(x,\xi)| \geqq \delta |\xi|^s$ $(\delta > 0)$ とできる。したがって．

$$(4.1)\qquad \|P(x,D)(\alpha\Lambda^{-l}u)\| \geqq \delta\|\alpha\Lambda^{-l}u\|_s - C(k,h)\|u\|_{-k}.$$

ゆえに．(1) の estimate は

$$(4.2)\qquad \|\alpha\Lambda^{-l}Lu\| \geqq \frac{\delta}{2}\|\alpha u\|_{s-l} - \sum_{j=1}^{n}\|\alpha_{\xi_j}u\|_{s-l}$$
$$-C\|u\|_{s-l-2} - C(k,h)\|u\|_{-k}.$$

更に $\|\alpha_{\xi_j}u\|_{s-l}$ の処理のために．$\|\alpha_{\xi_j}\Lambda^{-l}Lu\|$ の評価

$$(4.3)\qquad \|\alpha_{\xi_j}\Lambda^{-l}Lu\| \geqq \frac{\delta}{2}\|\alpha_{\xi_j}u\|_{s-l} - C\|u\|_{s-l-2} - C(k,h)\|u\|_{-k}$$

を用いると、適当な正定数 $C_j$ $(1\leqq j\leqq n)$ により．

$$(4.4)\qquad C\|Lu\|_{-l} \geqq \|\alpha\Lambda^{-l}Lu\| + \sum_{j=1}^{n}C_j\|\alpha_{\xi_j}\Lambda^{-l}Lu\|$$
$$\geqq \frac{\delta}{2}\|\alpha u\|_{s-l} - C'\|u\|_{s-l-2} - C(k,h)\|u\|_{-k}.$$

5．Case 2．(*hyperbolic estimate*)． まず $J\setminus J^{(2)}$ 上の各点の近傍に support をもつ $\{\alpha_j^{(1)}\}$ をとり．$\{supp[\alpha_j^{(1)}]\}$ が $J\setminus J^{(2)}$ の covering になるように Heine-Borel の定理で有限個をとり出す。更に $\{supp[\alpha_j^{(2)}]\}$ が $\partial(\bigcup_j supp[\alpha_j^{(1)}])$ の covering になるように．有限個の $\alpha_j^{(2)}$ を追加する。このとき．$supp[\alpha_j^{(2)}]\cap J=\phi$ となるようにとれる。このようにとると．$\sum_j\alpha_j^{(1)}+\sum_j\alpha_j^{(2)}\geqq C_0>0$ on $supp(\sum_j\alpha_j^{(1)})$ となる。適当な座標の回転により．

$$P(x,\xi) = (\xi_1-\psi(x,\xi'))P_0(x,\xi) \quad \text{on } supp[\alpha_j^{(1)}]$$

かつ $P_0(x,\xi)\neq 0$ on $supp[\alpha_j^{(1)}]$ とできる。

簡単のために．$\alpha_j^{(1)}$ を $\alpha$ とかくと、(1) より

$$(5.1)\qquad \|\alpha\Lambda^{-l}Lu\| \geqq \|(D_1-\psi(x,D'))P_0(x,D)\alpha\Lambda^{-l}u\|$$
$$-\|\alpha u\|_{s-l-1}-\sum_{j=1}^{n}\|\alpha_{\xi_j}u\|_{s-l}-C\|u\|_{s-l-2}.$$

**§5.1. $\|(D_1-\psi(x,D'))P_0(x,D)\alpha\Lambda^{-l}u\|$ について.** $\beta(x)\in\mathcal{D}(B_{2h})$ を、$\beta(x)=1$ on $B_h$ となるようにとる。擬微分作用素の quasi-local property を考慮すると、$v=P_0(x,D)\alpha\Lambda^{-l}u$ とおいて

$$\|(D_1-\psi(x,D'))v\| \geqq \|(D_1-\psi(x,D')\beta v\| - C(k,h)\|u\|_{-k}$$

を得る。右辺第一項に weight function $\varphi(x_1)=(x_1+3h)^{-1}$ を用いて Calderón 式評価を行うと、（[2] 参照）

$$\|(D_1-\psi(x,D'))\beta v\| \geqq h\|\varphi(x_1)(D_1-\psi(x,D'))\beta v\|$$
$$\geqq h\|\varphi'(x_1)\beta v\|$$
$$\geqq 5^{-2}h^{-1}\|v\| - C(k,h)\|v\|_{-k}.$$

更に $P_0(x,D)$ が supp$[\alpha]$ 上で elliptic ゆえ、Case 1 と同様にして、

$$(5.2)\qquad \|(D_1-\psi(x,D'))P_0\alpha_j^{(1)}\Lambda^{-l}u\| \geqq c\,h^{-1}\|\alpha_j^{(1)}u\|_{s-l-1}$$
$$-C(k,h)\|u\|_{-k}.$$

**§5.2 $\|\alpha_{j\xi_k}^{(1)}u\|_{s-l}$ について.** 一方、$\|\alpha_{j\xi_k}^{(1)}u\|_{s-l}$ については

$$(5.3)\qquad \|\alpha_{j\xi_k}^{(1)}u\|_{s-l} \leqq C_0^{-1}\|\alpha_{j\xi_k}^{(1)}(\textstyle\sum_i\alpha_i^{(1)}+\sum_i\alpha_i^{(2)})u\|_{s-l}$$
$$\leqq C\left(\sum_i\|\alpha_i^{(1)}u\|_{s-l-1}+\sum_i\|\alpha_i^{(2)}u\|_{s-l-1}\right).$$

**§5.3 $\|\alpha_i^{(2)}\Lambda^{-l}Lu\|$ について及び総和.** $\|\alpha_i^{(2)}\Lambda^{-l}Lu\|$

については．Case 1．(4.4) の elliptic estimate が成り立つから．quasi-local property を考慮して．

$$(5.4)\qquad \|\alpha_i^{(2)}\Lambda^{-l}Lu\| \geqq \frac{\delta}{2}\|\alpha_i^{(2)}u\|_{s-l} - C\|u\|_{s-l-2} - C(k,h)\|u\|_{-k}$$
$$\geqq \frac{\delta}{2h}\|\alpha_i^{(2)}u\|_{s-l-1} - C\|u\|_{s-l-2} - C(k,h)\|u\|_{-k}.$$

したがって (5.2)〜(5.4) により．

$$\sum_j\|\alpha_j^{(1)}\Lambda^{-l}Lu\| + \sum_j\|\alpha_j^{(2)}\Lambda^{-l}Lu\|$$
$$\geqq C_1h^{-1}\Big(\sum_j\|\alpha_j^{(1)}u\|_{s-l-1} + \sum_j\|\alpha_j^{(2)}u\|_{s-l-1}\Big)$$
$$- C_2\Big(\sum_j\|\alpha_j^{(1)}u\|_{s-l-1} + \sum_j\|\alpha_j^{(2)}u\|_{s-l-1}\Big)$$
$$- C'\|u\|_{s-l-2} - C(k,h)\|u\|_{-k}.$$

すなわち．

$$(5.5)\qquad \|Lu\|_{-l} \geqq C_1'h^{-1}\Big(\sum\|\alpha_j^{(1)}u\|_{s-l-1} + \sum_j\|\alpha_j^{(2)}u\|_{s-l-1}\Big)$$
$$- C'\|u\|_{s-l-2} - C(k,h)\|u\|_{-k},$$
$$(\text{for sufficiently small } h).$$

## 6. Case 3. (subelliptic estimate).

### §6.1. System 化.

$\{\mathrm{supp}[\alpha_j]\}$ が $\mathring{J}_k^{(2)}$ の covering になるように有限個の $\{\alpha_j\}$ をとる。適当な座標の回転により

$$P(x,\xi) = P_0(x,\xi)(\xi_1 - \psi(x,\xi'))^m \quad \text{on supp}[\alpha_j].$$

ここに $P_0(x,\xi) = a_0(x)\{\xi_1 - \sum_{j=0}^{s-m-1} a_j(x,\xi')\xi_1^j\}$。$\mathrm{proj}_{\xi\to\xi'}(\mathrm{supp}[\alpha_j])$ の外で $P(x,\xi)$ を，$\xi'$ に関して適当に修正しておけば，$C^\infty$ の滑らかさの枠内で $\psi(x,\xi')$, $a_j(x,\xi')$ は global に定義される。

$$\Pi_0(x,D) = P_0(x,D)\,(D_1 - \psi(x,D'))^m$$

$$i\Pi_1(x,D) = \Pi_0(x,D) - P(x,D) + iQ(x,D)$$
$$+ i\,\mathrm{grad}_\xi \Lambda^{-l}\cdot \mathrm{grad}_x P(x,D)\,\Lambda^{l}$$

とおくと、(1) は、

(6.1) $$\alpha\Lambda^{-l}Lu = \Pi_0(x,D)(\alpha\Lambda^{-l}u) - i\Pi_1(x,D)(\alpha\Lambda^{-l}u)$$
$$- i\,\mathrm{grad}_\xi\alpha(D)\cdot\mathrm{grad}_x P(x,D)(\Lambda^{-l}u) + \tilde{R}(x,D)u.$$

ここに、$\Pi_1$ の主要部を $\pi_1^0$ とすると、$\pi_1^0(x,\xi) \equiv \pi(x,\xi)$ mod. $(\xi_1 - \psi(x,\xi'))^m$。 さらに

$$\pi_1^0(x,\xi) = \sum_{k=1}^{m+1} b_k(x,\xi')\,|\xi'|^{s-k}(\xi_1 - \psi(x,\xi'))^{k-1}$$
$$+ \sum_{k=m+2}^{s} b_k(x,\xi')\,|\xi'|^{s-k}\,\xi_1^{k-m-1}(\xi_1 - \psi(x,\xi'))^m$$

( $b_k(x,\xi')$ は $\xi'$ に関して斉次で order ゼロ)

とおく。 (6.1) を system 化する。 $|\xi'|$ を symbol とする擬微分作用素を $\Lambda_0$ とかく。 $\hat{u} = \alpha\Lambda^{-l}u$ とおく。

$$u_j = \begin{cases} (\Lambda_0+1)^{s-j}(D_1 - \psi(x,D'))^{j-1}\,\hat{u} & 1 \le j \le m+1 \\ (\Lambda_0+1)^{s-j}\,D_1^{j-m-1}(D_1 - \psi(x,D'))^m\,\hat{u} & m+2 \le j \le s \end{cases}$$

とおき、 $U = (u_j)$ とかくと、

(6.2) $$\tilde{L}(x,D)U = D_1U - HU - BU - G_1U - G_2U - \sum_{j=0}^{n} U_j .$$

ここに、

$$H(x,D') = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \psi(x,D') & \Lambda_0 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & \Lambda_0 & & & & \\ & & & \psi(x,D') & \Lambda_0 & & & \\ \hline & & & & 0 & \Lambda_0 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & 0 & \Lambda_0 \\ ib_1 & \cdots & \cdots & ib_m & a_0+ib_{m+1} & \cdots & \cdots & a_{s-m-1}+ib_s \end{array}\right),$$

$a_j(x,D')$ は斉次で order 1, $b_j(x,D')$ は斉次で order 0.

$$B(x,D') = \left(\begin{array}{cccc|cccc} c_1 & 1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & \\ & & & c_m & 1 & & & \\ \hline & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{array}\right), \quad c_j = [(\Lambda_0+1)^{s-j}, \psi](\Lambda_0+1)^{-(s-j)}.$$

$$G_1(x,D') = \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ 0, \cdots, 0, & g_{m+1}^{(1)}, & \cdots\cdots, & g_s^{(1)} \end{pmatrix}, \quad g_j^{(1)} = a_{j-m-1}\{\Lambda_0^{s-j} - (\Lambda_0+1)^{s-j}\} \times \times (\Lambda_0+1)^{-s+j}.$$

$$G_2(x,D') = \begin{pmatrix} & 0 & \\ g_1^{(2)}, & \cdots\cdots\cdots, & g_s^{(2)} \end{pmatrix}, \quad g_j^{(2)} = i\, b_j\{\Lambda_0^{s-j} - (\Lambda_0+1)^{s-j}\}(\Lambda_0+1)^{-s+j}.$$

$$U_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u^{(j)} \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = i\, P'_{x_j}(x,D)\,\alpha_{\xi_j}\Lambda^{-l} u = P_j(D_1-\psi)^{m-1}\alpha_{\xi_j}\Lambda^{-l} u$$

($P_j(x,D)$ は order $s-m+1$, $1 \le j \le n$),

$$\|u^{(0)}\| \le \|u\|_{s-l-2}.$$

なお、明かに $\|\alpha\Lambda^{-l} L u\| = \|\tilde{L} U\|$.

<u>§6.2. H の ψ に対応する固有値と固有 vector.</u> ψ に対応する m 個の固有値は次の様に Puiseux 展開される。

<u>Lemma 1.</u> $\mu_j(x,\xi') = \psi(x,\xi') + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_{j,k}(x,\xi')|\xi'|^{1-\frac{k}{m}}$

特に $\nu_{j,1} = w^{(j-1)}\left\{ i\, b_1 / P_0 \big|_{\xi_1=\psi} \right\}^{\frac{1}{m}}$ は non-real ($1 \le j \le m$).

ここに $w$ は 1 の原始 m 乗根である。

(証明は [6], [4] 参照)

$\mu_j$ に属する $H/|\xi'|$ の固有 vector $V_j=(v_{jk})$ の主要部は.

Lemma 2. $v_{jk} \sim (\mu_j-\psi)^{m-k}\, P_0(x,\xi)\big|_{\xi_1=\psi}$ $\quad (1\le k\le m)$

$v_{js}=1$

又、$v_{jk}$ $(m+1\le k\le s-1)$ の主要部の order は高々ゼロ。

## §6.3. $H_1$ の $\psi$ 以外の固有値と root vectors.

$$H_1(x,\xi')=\left(\begin{array}{cccc|cccc} \psi(x,\xi') & |\xi'| & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & |\xi'| & & & & \\ & & & \psi(x,\xi') & |\xi'| & & & \\ \hline & & & & 0 & |\xi'| & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & 0 & |\xi'| \\ & & & & a_0(0,\xi_0')\frac{|\xi'|}{|\xi_0'|}, & \cdots & , & a_{s-m-1}(0,\xi_0')\frac{|\xi'|}{|\xi_0'|} \end{array}\right)$$

とおくと. $\det(\lambda I-H_1)=(\lambda-\psi)^m P_0(0;\lambda,\xi_0'\cdot|\xi'|/|\xi_0'|)$ となるから. $\det(\lambda I-H_1)=0$ の $\psi$ 以外の根を $\lambda_k(|\xi'|)$ とすると. $\lambda_k(|\xi'|)=\lambda_k|\xi'|$ ( $\lambda_k$ は定数) となる。 $\lambda_k$ の重複度を $r_k$ $(1\le k\le q)$ とする。

以下. $H_0=H_1/|\xi'|$ , $\lambda_k=\lambda$, $r_k=r$ とかくと、 $\lambda I-H_0$ の rank が $s-1$ ゆえ、root space の構造は自然に決まる。root vector $v$ は $v(\lambda I-H_0)^r=0$ の non-trivial solution である。 $(\lambda I-H_0)^r$ の $m+1$ 列から $m+r$ 列までを除いた行列 $H_4$ の上から $s-r$ 行までをとった行列 $H_5$ が maximal rank $s-r$ を与えることに注目する。$V_1=(w_1,\cdots,w_{s-r},1,0,\cdots,0)$, $w_k=-\Delta^{-1}\cdot\Delta_{s-r+1,k}$ （$\Delta=\det H_5$, $\Delta_{s-r+1,k}$ は $H_5$ の $k$ 行を $H_4$ の $s-r+1$ 行でおきかえた行列の行列式）とおくと．

<u>Lemma 3.</u> $V_j^{(k)}=V_1^{(k)}(H_0-\lambda_k I)^{j-1}$ $(1\leq j\leq r_k)$ が $H_0$ の $\lambda_k$ に属する root vectors のすべてを与える。なお．$V_j^{(k)}$ において．はじめの $m$ 個の成分はゼロであり、第 $S$ 成分は定数である。

## <u>§ 6.4 matrix $N(x,\xi')$ と $H(x,\xi')$ の Jordan 標準形.</u>

$N_1={}^t(V_1,\cdots,V_m,\vec{0},\cdots,\vec{0})$, $N_2={}^t(\vec{0},\cdots,\vec{0},V_1^{(1)},\cdots,V_{r_1}^{(1)},V_1^{(2)},\cdots,V_{r_g}^{(g)})$ そして $N=N_1+N_2$ ; 又

$$\Phi=\left(\begin{array}{ccc|cccc}
\mu_1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & \mu_m & & & & \\
\hline
 & & & \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & \Lambda_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \Lambda_0 \\ & & & \lambda_1\end{matrix}} & & & \\
 & & & & \boxed{\phantom{x}} & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & \boxed{\begin{matrix}\lambda_g & \Lambda_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \Lambda_0 \\ & & & \lambda_g\end{matrix}}
\end{array}\right),$$

$$H_2=\begin{pmatrix} & & & 0 & & \\ 0,\cdots,0, & a_0(x,\xi')-a_0\left(0,\frac{\xi_0'}{|\xi_0'|}|\xi'|\right), & \cdots\cdots, & a_{s-m-1}(x,\xi')-a_{s-m-1}\left(0,\frac{\xi_0'}{|\xi_0'|}|\xi'|\right)\end{pmatrix},$$

$$H_3=\begin{pmatrix} & 0 & \\ ib_1(x,\xi'), & \cdots\cdots, & ib_s(x,\xi')\end{pmatrix},$$

とおく。明かに $H=H_1+H_2+H_3$ である。$N_1, N_2$ のとり

方から $NH = N_1H + N_2(H_1 + H_2 + H_3) = \theta N_1 + \theta N_2 + N_2H_2 + N_2H_3$
となる。

## §6.5. $M = N^{-1}$ について.

Lemma 4. $\det N$ は true order $-\frac{m-1}{2}$ である。

Lemma 4 より. $M = N^{-1}$ は第 $i$ 行が $\max\{1-\frac{i}{m}, 0\}$ の order を持ち. $N = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$ の形より $M$ も $M = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$ の形である。従って. $M \circ N - MN$ は order が高々 $-\frac{1}{m}$ で. 特に $m$ 行から $s$ 行までは高々 $-1$ の order である。さらに $M \circ N - MN$ は $\left(\begin{array}{c|c} * & *\,\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix} \\ \hline 0 & *\,\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix} \end{array}\right)$ の形である。以上のことから. $NU = V$ とおき. quasi-local property を考慮すると. 次の lemma を得る。
一般に $W = (w_k)$ としたとき. $W^{(1)} = {}^t(w_1, \cdots, w_m, 0, \cdots, 0)$, $W^{(2)} = {}^t(0, \cdots, 0, w_{m+1}, \cdots, w_s)$, $W^{(3)} = {}^t(0, \cdots, 0, w_m, w_{m+1}, \cdots, w_s)$ とかく。

Lemma 5. 任意の実数 $k$ に対して.

$$\|(\Lambda_0+1)^{1-\frac{1}{m}} V\|_k \geqq C\|U\|_k - C'\|\alpha u\|_{s-l-2+k}$$

$$\|V^{(2)}\|_k \geqq C\|U^{(2)}\|_k - C'\|\alpha u\|_{s-l-2+k}$$

$$\|V\|_k \geqq C\|U^{(3)}\|_k - C'\|\alpha u\|_{s-l-2+k}$$

以下. $N\check{L}U$ の評価を行うのであるが. $k_j$ $(1 \leq j \leq s)$ を正定数として. $K = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_s \end{pmatrix}$ とおき. $KN\check{L}U$ の評価をする。
$(\|KW\| = \sum_{j=1}^{s} k_j \|w_j\|)$。

$$(6.3)\qquad KN\tilde{L}U = K(D_1-\mathcal{D})V + iKN'_{x_1}U - K(NH-N\circ H)U$$
$$- K(\mathcal{D}\circ N - \mathcal{D}N)U - KN_2H_2U - KN_2H_3U - KNBU$$
$$- KNG_1U - KNG_2U - \sum_{j=0}^{n} KNU_j \ .$$

§.6.6. type $N$ と $KN_2H_2$ 及び $KN_2H_3$ について. $A=(a_{ij}(D'))$ が type $N$ であるとは $A$ が次の 1)~3) を満たすことである。 1) $a_{ij}\in S^0_{1,0}$ , 2) $ord.(a_{ij})\le \min\{-1+\frac{j}{m}, 0\}$ , 3) $1\le i\le m$, $m+1\le j\le s$ のとき $a_{ij}\equiv 0$ 。

Lemma 6. $A$ が type $N$ のとき $V=NU$ とすると.

$$\|AU\|_k \le C\|V\|_k + C(i)\,\|(\Lambda_0+1)^{-i}U\|_k \ .$$

Lemma 7. $KN'_{x_1}$ , $K(NH-N\circ H)$, $K(\mathcal{D}\circ N-\mathcal{D}N)$, $KNB$, $KNG_1$, $KNG_2$ はすべて type $N$ である。

一方 $N_2$ の形と $H_2$ の $\mathcal{D}^1_{L^2}$ から $L^2$ への operator norm が supp[$\alpha$] を十分小さくしぼっておけば十分小さい $\varepsilon$ でおさえられることから, $k'=\max_{m+1\le j\le s}\{k_j\}$ とおくと.

Lemma 8. $\|KN_2H_2U\| \le \varepsilon\,\|(\Lambda_0+1)U^{(2)}\|$ ,

$$\|KN_2H_3U\| \le k'\cdot C\|U\| \ .$$

§6.7. $K(D_1-\mathcal{D})V$ の評価. $1\le j\le m$ のとき $K(D_1-\mathcal{D})V$ の第 $j$ 行は. $k_j\|(D_1-\mu_j)v_j\|$ である。$\|\mathrm{Im}\,\mu_j(x,D')v_j\| \sim \|(\Lambda_0+1)^{1-\frac{1}{m}}v_j\|$ であるから、$\|(D_1-\mu_j)v_j\| \ge \|v\|_{1-\frac{1}{m}} - C(i)\,\|u\|_{-i}$ を得る。一方 $m+1$ 行から $s-1$ 行までは. $k_j\|(D_1-\lambda_{j'})v_j - \Lambda_0 v_{j+1}\| \ge$

$k_j \| (D_1 - \lambda_{j'}) v_j \| - k_j \| \Lambda_0 v_{j+1} \|$, $s$ 行は $k_s \| (D_1 - \lambda_g) v_s \|$ である. $\mathrm{supp}[\alpha]$ の上で $\xi_1 - \lambda_{j'}(\beta')$ はゼロにならないから dual space の quasi-local property を考慮して. $\mathrm{supp}[\alpha]$ の外で $\xi_1$ を変更すると. $\| (D_1 - \lambda_{j'}) v_j \| \geqq C \| v_j \|_1 - C(i) \| u \|_{-i}$ を得る。したがって適当に $k_j$ $(m+1 \leq j \leq s)$ を fix し. $k_1 = \cdots = k_m = k_0$ ととると.

(6.4) $\| K(D_1 - \theta) V \| \geqq C_0 k_0 \| V^{(1)} \|_{1-\frac{1}{m}} + C_1 \| V^{(2)} \|_1 - C(i, h) \| u \|_{-i}$.

(6.4) 及び Lemma 5, 6, 7, 8 により. $k_0$ を十分大きく. $h$ を十分小さくとれば次の評価を得る。

(6.5) $$\| K \mathcal{N} \tilde{L} \mathcal{U} \| \geqq C_0' (\| \mathcal{U} \| + \| \mathcal{U}^{(3)} \|_{1-\frac{1}{m}}) - \sum_{j=1}^{n} \| \mathcal{U}_j \| - C \| u \|_{s-\ell-2} - C(k_j, h, i) \| u \|_{-i}.$$

一方. $\alpha$ のかわりに $\alpha_{\xi_j} \Lambda^{\frac{1}{m}}$, $\alpha_{\xi_j \xi_k} \Lambda^{\frac{2}{m}}$ を用いてつくられる $\mathcal{U}$ にあたるものを $\mathcal{U}_{(j)}$, $\mathcal{U}_{(jk)}$ とかくと. $\| \mathcal{U}_j \| \leq C \| \mathcal{U}_{(j)}^{(3)} \|_1$, $\| \mathcal{U}_{jk} \| \leq C \| \mathcal{U}_{(jk)}^{(3)} \|_1$ だから. 適当に $C_j$, $C_{jk}$ $(1 \leq j, k \leq n)$ をとれば.

(6.6) $$\| \alpha \Lambda^{-\ell} L u \| + \sum_{j=1}^{n} C_j \| \alpha_{\xi_j} \Lambda^{\frac{1}{m}-\ell} L u \| + \sum_{j,k=1}^{n} C_{jk} \| \alpha_{\xi_j \xi_k} \Lambda^{\frac{2}{m}-\ell} L u \| \geqq C \| \alpha u \|_{s-\ell-1} - C(k_j, h, i) \| u \|_{-i} - C' \| u \|_{s-\ell-2}.$$

(4.4), (5.5), (6.6) を寄せ集めると.

(6.7) $$\| L u \|_{-\ell} \geqq C \sum_j \| \alpha_j u \|_{s-\ell-1} - C \| u \|_{s-\ell-2} - C(h, i) \| u \|_{-i} \geqq C \| u \|_{s-\ell-1} - C(h, i) \| u \|_{-i}.$$

ここで $i = s - \ell - 3$ にとり. $u(x)$ を $\mathcal{D}(B_d)$ $(d < h)$ の元に制限

すると、十分小さいdについては(6.7)は下の不等式を含んでいる。(L. Nirenberg - F. Treves [7], Part II 参照)

(6.8) $$\|Lu\|_{-\ell} \geq C_0 \|u\|_{s-\ell-1} .$$

Q. E. D.

References

[1] R. Beals and C. Fefferman : On local solvability of l. p. d. e. Ann. Math. 97, 482-498 ('73)

[2] A. P. Calderón : Uniqueness in the Cauchy problem for p.d.e. Amer. J. 80, 16-36 ('58)

[3] F. Cardoso and F. Treves : A necessary condition of local solvability for pseudo-d. e. with double characteristics. Ann. Inst. Fourier, 24 (no. 1), 225-292 ('74)

[4] W. Matsumoto : Uniqueness in the Cauchy problem for p. d. e. with multiple characteristic roots. J. Math. Kyoto Univ. (to appear).

[5] ———— : Local solvability of a class of p. d. e. with multiple characteristics. Proc. Japan. Acad. (to appear)

[6] S. Mizohata and Y. Ohya : Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques

multiples II. Japan J. Math. 40, 63-104 ('71)

[7] L. Nirenberg and F. Treves : On local solvability of l. p. d. e. Part I Necessary condition, Part II Sufficient condition. Comm. Pure Appl. Math., 23, 1-38, 459-509 ('70).