数理解析研究所講究録
第239巻 1975年 95-107



# 二独立変数包合的偏微分方程式系の$C^\infty$解の存在

立数大 理　　垣江邦夫

§0．序．　$\Phi$を包合的偏微分方程式系とする．Cartan-Kählerの定理は、$\Phi$の実解析的(局所)解の存在を保証する．しかしながら、$C^\infty$解の存在定理は、一般的には得られていない．ここでは、$\Phi$が2変数函数$z(x,y)$に関する包合系の時のみ考える．単独双曲型方程式の場合の$C^\infty$解の存在は、まず2階の場合、H. Lewy [5] によって証明され、ついで彼自身と、K.O. Friedrichs [6] により高階の場合も証明された。もっとも、高階の場合の彼等の証明は不完全であったが、M. Cinquini-Cibrario [1]によって完成された(cf. Friedrichs [2], 序文)．講演者は、彼により得られた結果[4]と、Lewy, Friedrichs, M. Cinquini-Cibrario の方法及び結果を合せれば、単独の場合の双曲型に対応する条件をみたす包合系$\Phi$に対し$C^\infty$解の存在を証明した。この事実はCauchy問題を考えて示されるのであるが、解の依存領域に関する古典的結果と類

似のそれも同時に示される．問題は局所的であり、すべての概念は $C^\infty$ 範疇で考える。尚以下では、regularityに関する条件は、煩雑を避ける為いちいち記さない。

§1. Cauchy問題． $z(x,y)$ を2独立変数 $x,y$ の函数とし $p_{i,k}=\partial^{i+k}z/\partial x^i\partial y^k$ と記す．$z$ を未知函数とする $m$ 階の偏微分方程式系 $\Phi$ を考える：

$(\Phi)$ $F_\alpha=0$ $(\alpha=1,2,\dots,r)$，$f_\alpha=0$ $(\alpha=1,2,\dots,t)$，

ここに $F_\alpha, f_\alpha$ は、$m$-jet $(x,y,z,p_{i,k};\ 1\leqq i+k\leqq m)$ の函数であるが、$f_\alpha$ は $p_{m-\beta,\beta}$ $(0\leqq\beta\leqq m)$ を含まず．rank $\partial(F_1,\dots,F_r)/\partial(p_{m,0},\dots,p_{0,m})=r$ と仮定する。$\Phi$ の延長 $p\Phi$ は、$\partial_x, \partial_y$ をそれぞれ $x,y$ に関する全微分とする時．次で定義される：

$(p\Phi)$ $F_\alpha=\partial_xF_\alpha=\partial_yF_\alpha=0$ $(\alpha=1,\dots,r)$，$f_\alpha=\partial_xf_\alpha=\partial_yf_\alpha=0$ $(\alpha=1,\dots,t)$．

$p\Phi$ の独立な（丁度）$(m+1)$ 階の方程式の個数を $r_{m+1}$ と記す．$p\Phi$ の方程式達から代数的結果として得られる高々 $m$ 階の任意の方程式が、系 $\Phi$ から代数的に導かれる時、$\Phi$ は $p$-closed であると言われる。（以上及び以下の定義及び定理の厳密な叙述は文献[4]を参照。）包合系である為の一つの条件は．次で与えられる（[4]，定理 I）．

I．$\Phi$ が包合系である為には．次の2条件が必要十分である：
(i) $r_{m+1}=r+1$，　(ii) $\Phi$ は $p$-closed である．

$\Phi$の特性多項式を次の$r$個の$m$次同次多項式の最大共通因子として定義する([4], §3):

(1) $F_\alpha^{(0)} dy^m - F_\alpha^{(1)} dy^{m-1} dx + \cdots + (-1)^m F_\alpha^{(m)} dx^m \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, r)$,

ここに $F_\alpha^{(\beta)} = \partial F_\alpha / \partial p_{m-\beta, \beta}$. $\mu_0 dy - \mu_1 dx$ が$\Phi$の特性多項式の実1次因子の時、$(x,y)$-空間の接空間の $\mu_0 \partial/\partial x + \mu_1 \partial/\partial y$ で張られる直線の方向は特性方向と言われる。ここで論じているような包合系に関する基本的結果の一つは次である。

II. $\Phi$は包合系と仮定する。この時$\Phi$の特性多項式の次数は $m+1-r$ に等しい。([4], 定理II)

$\Phi$は次の$m$-jetsの空間$J^m$上の微分形式系へ移せる:

$$(\Sigma)\begin{cases} f_\alpha = 0 \ (\alpha=1,\cdots,t),\ F_\alpha = 0 \ (\alpha=1,\cdots,r),\ df_\alpha = 0 \ (\alpha=1,\cdots,t),\ dF_\alpha = 0 \ (\alpha=1,\cdots,r), \\ \varpi_{i,k} = dp_{i,k} - p_{i+1,k}\,dx - p_{i,k+1}\,dy = 0 \ (0 \leq i+k < m). \end{cases}$$

以下空間$J^m$内の多様体(曲線, 曲面)という時、それが$(x,y)$-空間へ自然に射影される時通常の意味で退化しないものとする。$\Phi$の解には$\Sigma$の2次元積分多様体(曲面)が対応し、その逆も成立つ。$\Sigma$の積分曲線$\mathcal{C}$が<u>非特性</u>であるとは、$\mathcal{C}$の各点での接線の$(x,y)$空間の接空間への自然な射影が特性方向の直線でない時をいう。$\Phi$に対するCauchy問題は$\Sigma$のそれに移されるが、我々の基本的結果は次である。

<u>存在定理</u>. $\Phi$は包合系とし、$\Phi$の特性多項式の根は実で相異なると仮定する。この時、非特性な$\Sigma$の積分曲線$\mathcal{C}$に

対し、$\mathcal{C}$を通る$\Sigma$の積分曲面$\mathcal{M}$が一つそして唯一つ存在する。この時、$\mathcal{M}$上の1点は、それを通る$\mathcal{M}$上の一番外側の二つの特性曲線によって切られる$\mathcal{C}$の有限線分によってのみ決定される(依存領域)。

注意. $\nu = m+1-r = 0$の時、$\Phi$は完全積分可能であり、この定理は最後の主張を除き明らかに成立つ。$\nu = 1$の時、$\Sigma$は1次元Cauchy's characteristicを持つ([4], §7参照)。従って定理は常微分方程式系の存在定理から容易に得られる。従って、証明すべきは$\nu \geqq 2$の時のみである。以下$\nu \geqq 2$と仮定.

## §2. Monge特性系.

以下常に$\Phi$は存在定理の仮定を満たす包含系とする。一般性を失うことなく、$\nu$個の相異なる特性方向は次で与えられるとしてよい; $\partial/\partial x + \lambda_1 \partial/\partial y, \cdots, \partial/\partial x + \lambda_\nu \partial/\partial y$。これらの特性方向に対応して、$\Phi$の($m$次)Monge特性系が定義される。それらは$\Sigma$の特異要素を定義するPfaff系として特徴付けられる。$\partial/\partial x + \lambda_l \partial/\partial y$に対応するMonge特性系は次で与えられる:

$$\Sigma, \quad dy - \lambda_l dx = 0, \quad \omega_l = \sum_{\beta=0}^{m} e_l^\beta dp_{m-\beta,\beta} + a_l dx + b_l dy = 0,$$

ここに、$\omega_l$は然るべき条件をみたすように定義されるが、特に次を満たしている(cf. Kakié [4], §5):

$$\operatorname{rank}\left(F_\alpha^{(\beta)}, e_l^\beta ; \beta = 0, 1, \cdots, m \downarrow, \alpha = 1, 2, \cdots, r \rightarrow\right) = r + 1,$$

(2) $$\left(\sum_{\beta=0}^{m} e_l^{\beta}\varphi_\beta + a_l\right) + \lambda_l\left(\sum_{\beta=0}^{m} e_l^{\beta}\psi_\beta + b_l\right) \equiv 0 \pmod{\left[\begin{array}{l}\varphi_\beta = \psi_{\beta-1}\ (0<\beta\leq m),\\ \dfrac{dF_\alpha}{dx} + \displaystyle\sum_{\beta=0}^{m}\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_{m-\beta,\beta}}\varphi_\beta = \frac{dF_\alpha}{dy} + \sum_{\beta=0}^{m}\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_{m-\beta,\beta}}\psi_\beta = 0\end{array}\right]}.$$
$$(\alpha = 1, 2, \cdots, r).$$

但し $d/dx$, $d/dy$ は $x, y$ に関する $m$ 次の全微分を表わすとした．尚 Monge 特性系は厳密には $\Phi$ の積分点のなす多様体上の Pfaff 系と考えるべきものである。

次に、古典的特性系の定義式に現われる Pfaff 式を導入する．
$$\Omega_\alpha^{(x)}(\lambda_l) = \sum_{\beta=0}^{m-1}(-1)^{\beta}\Delta_\alpha^{\beta}(\lambda_l)\,dp_{m-\beta,\beta} + (dF_\alpha/dx)\,dx,$$
$$\Omega_\alpha^{(y)}(\lambda_l) = \sum_{\beta=0}^{m-1}(-1)^{\beta}\Delta_\alpha^{\beta}(\lambda_l)\,dp_{m-\beta-1,\beta+1} + (dF_\alpha/dy)\,dx,$$
ここに
$$\Delta_\alpha^{\beta}(\lambda_l) = F_\alpha^{(0)}\lambda_l^{\beta} - F_\alpha^{(1)}\lambda_l^{\beta-1} + \cdots + (-1)^{\beta}F_\alpha^{(\beta)} \quad (0\leq\beta\leq m).$$
$\Phi$ が包合系である事より Pfaff 系 $\Omega_\alpha^{(x)}(\lambda_l)$, $\Omega_\alpha^{(y)}(\lambda_l)$ $(1\leq\alpha\leq r)$ の rank は $r+1$ であることが示されるが、実は (2) により次の成立つことが証明される。

III. 次の二つの Pfaff 系 (i), (ii) は、$dy - \lambda_l dx = 0$, $\varpi_{i,k} = 0$ $(0\leq i+k<m)$ の下で同値である:

(i) $\omega_l$, $dF_\alpha$ $(\alpha = 1, \cdots, r)$,

(ii) $\Omega_\alpha^{(x)}(\lambda_l)$, $\Omega_\alpha^{(y)}(\lambda_l)$ $(\alpha = 1, \cdots, r)$.

これは、古典的な特性系の定義と我々のそれとが当然ながら一致している事を示す (cf. Goursat [3], Lewy と Friedrichs [6]).

$\omega_l$ の係数$(e_l^0, e_l^1, \cdots, e_l^m)$に次の多項式を付随させよう:

(3)$_l$ $\quad e_l^0 dy^m - e_l^1 dy^{m-1}dx + \cdots + (-1)^m e_l^m dx^m.$

付録に述べた補題を、(1)と(3)$_l$に応用すれば、(1)と(3)$_l$の最大共通因子の次数は$\nu-1$であり、それは$\Phi$の特性多項式を1次因子$(dy-\lambda_l dx)$で除して得られることが示される。この事実と、付録の補題を再び用いて次が得られる。

IV. 各整数$h=1,2,\cdots,\nu$に対して次が成立する:

$$\operatorname{rank}\left(\begin{array}{c|l} F_\alpha^{(\beta)} & \alpha=1,2,\cdots,r\downarrow \\ e_l^\beta & l=1,2,\cdots,h\downarrow \end{array} ;\ \beta=0,1,\cdots,m\right)=r+h.$$

最後に(2)より得られる一事実を述べる。

V. $\lambda_l$と異なる$\lambda_j$に対し、次式が成立つ:

$$\left\{\sum_{\beta=0}^{m-1}(-1)^\beta \Gamma_l^\beta(\lambda_j)dp_{m-\beta,\beta}+a_l dx\right\}+\lambda_l\left\{\sum_{\beta=0}^{m}(-1)^\beta \Gamma_l^\beta(\lambda_j)dp_{m-\beta-1,\beta+1}+\right.$$
$$\left.+b_l dx\right\}\equiv 0 \pmod{\Omega_\alpha^{(x)}(\lambda_j),\ \Omega_\alpha^{(y)}(\lambda_j) : 1\leqq\alpha\leqq r},$$

ここに

$$\Gamma_l^\beta(\lambda)=e_l^0\lambda^\beta-e_l^1\lambda^{\beta-1}+\cdots+(-1)^\beta e_l^\beta \quad (0\leqq\beta\leqq m).$$

§3. $\Phi$のCauchy問題をある種の方程式系のそれに帰着させること。 $\mathfrak{M}$を$\mathfrak{V}$を初期曲線とする微分形式系$\Sigma$のCauchy問題の解曲面とする(§1.参)。 $\mathfrak{M}$は$\nu$個の異なった1径数特性曲線族で生成される;それらはそれぞれ、$dy-\lambda_1 dx=0$, $\cdots$, $dy-\lambda_\nu dx=0$で定義される。初期曲線$\mathfrak{V}$上の1点に

おける接線を二直角回転させれば、その方向は$\nu$個の特性方向と一度づつ一致する。その最初と最後のものを、($\mathcal{C}$に関して)外側の二特性方向と呼び、それらに対応する特性曲線を外側の二特性曲線と呼ぼう。それらは $dy-\lambda_1 dx=0$, $dy-\lambda_\nu dx=0$ で定義されると仮定する。座標系$(x,y)$の代わりに、$\sigma=\mathrm{const.}$, $\tau=\mathrm{const.}$ が外側の二特性曲線族となるように$\mathfrak{M}$上の座標系$(\sigma,\tau)$を導入する。$x,y$を$\sigma,\tau$の関数と考える時次の式が成立つ:

$$\partial y/\partial\sigma-\lambda_1\partial x/\partial\sigma=0,\ \partial y/\partial\tau-\lambda_\nu\partial x/\partial\tau=0.$$

ここに、$\lambda_i$はその$\mathfrak{M}$上の値を表わし、$x,y$の函数とみなすものとする。

多様体$\mathfrak{M}$は、$(\sigma,\tau)$が2変数空間のある領域を動くとして次で定義される:

(4) $(x(\sigma,\tau), y(\sigma,\tau), z(\sigma,\tau), p_{i,k}(\sigma,\tau)\ ;\ 1\leqq i+k\leqq m)$.

この時$\mathfrak{M}$上の$\mathcal{C}$は適当な函数$g$によって方程式$\tau=g(\sigma)$によって定義される。$(\sigma,\tau)$の作り方より$g'(\sigma)<0$である。

$\sigma,\tau$の函数$f$に対し、$f^\sigma$, $f^\tau$でもって、それぞれ$\sigma,\tau$に関する微分を表わすとする。又$f^{t_\ell}$でもって、特性方向$\partial/\partial x+\lambda_\ell\partial/\partial y$方向の微分を表わす;すなわち、$\partial\sigma/\partial t_\ell$, $\partial\tau/\partial t_\ell$を $dy/dt_\ell-\lambda_\ell dx/dt_\ell=0$、即ち、

$$(\partial y/\partial\sigma-\lambda_\ell\partial x/\partial\sigma)\partial\sigma/\partial t_\ell+(\partial y/\partial\tau-\lambda_\ell\partial x/\partial\tau)\partial\tau/\partial t_\ell=0$$

をみたすように選ぶ時、$f^{t_l}$を次で定める;

$$f^{t_l}=(\partial f/\partial\sigma)(\partial\sigma/\partial t_l)+(\partial f/\partial\tau)(\partial\tau/\partial t_l).$$

$\mathfrak{M}$を定義する(4)が満たす方程式を導こう. $\mathfrak{M}$が系$\Sigma$の積分多様体であることにより、$p_{i,k}^{\sigma}-p_{i+1,k}x^{\sigma}-p_{i,k+1}y^{\sigma}=0$ $(0\leqq i+k<m)$であり、又次式を得る.

$$\sum_{\beta=0}^{m}F_{\alpha}^{(\beta)}p_{m-\beta,\beta}^{\sigma}+(dF_{\alpha}/dx)x^{\sigma}+(dF_{\alpha}/dy)y^{\sigma}=0.$$

さらに(2)から次の方程式を得る.

$$\sum_{\beta=0}^{m}e_l^{\beta}p_{m-\beta,\beta}^{t_l}+a_l x^{t_l}+b_l y^{t_l}=0\quad(l=1,2,\cdots,\nu).$$

それ故、$\mathfrak{M}$を定義する(4)は次の方程式系の解である.

$$(5)\quad\begin{cases} y^{\sigma}-\lambda_1 x^{\sigma}=0,\ y^{\tau}-\lambda_{\nu}x^{\tau}=0,\\ {}^{\sigma}U_{i,k}=p_{i,k}^{\sigma}-p_{i+1,k}x^{\sigma}-p_{i,k+1}y^{\sigma}=0\ (0\leqq i+k<m),\\ \sum_{\beta=0}^{m}F_{\alpha}^{(\beta)}p_{m-\beta,\beta}^{\sigma}+(dF_{\alpha}/dx)x^{\sigma}+(dF_{\alpha}/dy)y^{\sigma}=0\ (\alpha=1,\cdots,\nu),\\ \sum_{\beta=0}^{m}e_l^{\beta}p_{m-\beta,\beta}^{t_l}+a_l x^{t_l}+b_l y^{t_l}=0\ (l=1,2,\cdots,\nu). \end{cases}$$

逆に(5)に対するCauchy問題を考えよう. $(\sigma,\tau)$-空間に$g'(\sigma)\neq 0$なる函数$g$により定義される曲線$\tau=g(\sigma)$が与えられたとしよう. この曲線上初期データを与える;

(6) $(X(\sigma), Y(\sigma), Z(\sigma), P_{i,k}(\sigma);\ 1\leqq i+k\leqq m)$.

(6)は$m$-jetsの空間$J^m$に曲線を定義するが、それが$\Sigma$の積分曲線である為には、その上で$F_{\alpha}, f_{\alpha}$がすべて消え、更に次

の帯条件を満たすことが必要十分である：

$$P'_{i,k}(\sigma) - P_{i+1,k}(\sigma)X'(\sigma) - P_{i,k+1}(\sigma)Y'(\sigma) = 0$$
$$(0 \leqq i+k < m).$$

又、その曲線が $\Sigma$ の非特性な積分曲線であることは、次の条件をみたすことと同等である：

$$Y'(\sigma) - \lambda_l(X(\sigma), Y(\sigma), \cdots)X'(\sigma) \neq 0 \ (\lambda=1,2,\cdots,\nu).$$

(5) に対する (6) を初期データとする Cauchy 問題とは、(5) の解で $x(\sigma, g(\sigma)) = X(\sigma)$, $y(\sigma, g(\sigma)) = Y(\sigma)$, etc をみたすものを見出すことである．重要なことは次の事実が成立つことである．

**VI.** (5) に対する (6) を初期データとする Cauchy 問題の解は、(6) によって定義される $J^m$ 内の曲線が $\Sigma$ の積分曲線 $\mathcal{C}$ であるならば、$\mathcal{C}$ を初期曲線とする $\Sigma$ に対する Cauchy 問題の解を与える．

（証明の略述） 証明の本質的な部分は (5) の解 (4) に対し帯条件 $\varpi_{i,k} = dp_{i,k} - p_{i+1,k}\,dx - p_{i,k+1}\,dy = 0$ $(0 \leqq i+k < m)$ が満たされていることを示すにある。明らかに $\sigma$ 方向の方程式 ${}^{\sigma}U_{i,k} = p^{\sigma}_{i,k} - p_{i+1,k}x^{\sigma} - p_{i,k+1}y^{\sigma} = 0$ はみたされているが、更に ${}^{\tau}U_{i,k} = p^{\tau}_{i,k} - p_{i+1,k}x^{\tau} - p_{i,k+1}y^{\tau} = 0$ $(0 \leqq i+k < m)$ を示さねばならない。 ${}^{\tau}U_{i,k}$, ${}^{\sigma}U_{i,k}$ をそれぞれ $\sigma, \tau$ で微分したものを ${}^{\tau}U^{\sigma}_{i,k}$, ${}^{\sigma}U^{\tau}_{i,k}$ と記す。 この時、簡単

な計算により、解に対し成り立つ次の等式を示しうる．

$$p^{\sigma}_{m-\beta,\beta}+\lambda p^{\sigma}_{m-\beta-1,\beta+1}=-\frac{1}{x^{\tau}}\,{}^{\tau}U^{\sigma}_{m-1-\beta,\beta}+\frac{1}{x^{\tau}}\left(p^{\tau}_{m-\beta,\beta}x^{\sigma}+\right.$$
$$\left.+p^{\tau}_{m-1-\beta,\beta+1}y^{\sigma}\right)\qquad(\beta=0,1,\cdots,m-1).$$

但し $\lambda_{\nu}=\lambda$ と記した．以下同様．

$$p^{t_l}_{m-\beta,\beta}+\lambda p^{t_l}_{m-1-\beta,\beta+1}=-\frac{c_l}{x^{\tau}}\,{}^{\tau}U^{\sigma}_{m-1-\beta,\beta}+\frac{1}{x^{\tau}}\left(p^{\tau}_{m-\beta,\beta}x^{t_l}+\right.$$
$$\left.+p^{\tau}_{m-1-\beta,\beta+1}y^{t_l}\right)\quad\left(\begin{array}{l}l=1,2,\cdots,\nu,\\ \beta=0,1,\cdots,m-1\end{array}\right),$$

ここに $c_l=(x^{t_l}y^{\tau}-x^{\tau}y^{t_l})/(x^{\sigma}y^{\tau}-x^{\tau}y^{\sigma})$.

又、命題III等を用いれば (5) の解に対し次が成立つ．

$$\tilde{\Omega}^{(x)}_{\alpha}(\lambda),\ \tilde{\Omega}^{(y)}_{\alpha}(\lambda)\equiv 0\quad(\mathrm{mod}\ {}^{\tau}U_{i,k};\ 0\leqq i+k<m).$$

ここに $\tilde{\Omega}$ は $\Omega$ の $dp_{m-\beta,\beta}$, $dx$, $dy$ にそれぞれ $p^{\tau}_{m-\beta,\beta}$, $x^{\tau}$, $y^{\tau}$ を代入したものを表わす． 以上の諸式, 命題V等を用いれば、(5)の解に対し次の方程式の成り立つことが示される．

$$(7)\begin{cases}{}^{\tau}U^{\sigma}_{j,h}\equiv 0\quad(\mathrm{mod}\ {}^{\tau}U_{i,k};\ 0\leqq i+k<m)\quad(0\leqq j+h\leqq m-2),\\ \displaystyle\sum_{\beta=0}^{m-1}(-1)^{\beta}\Delta^{\beta}_{\alpha}(\lambda)\,{}^{\tau}U^{\sigma}_{m-1-\beta,\beta}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ {}^{\tau}U_{i,k};\ 0\leqq i+k<m)\\ \qquad\qquad(\alpha=1,2,\cdots,r),\\ \displaystyle\sum_{\beta=0}^{m-1}(-1)^{\beta}\Gamma^{\beta}_{l}(\lambda)\,{}^{\tau}U^{\sigma}_{m-1-\beta,\beta}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ {}^{\tau}U_{i,k};\ 0\leqq i+k<m)\\ \qquad\qquad(l=1,2,\cdots,\nu-1).\end{cases}$$

所で (7) の最後の二つのグループの左辺の係数行列の rank は、丁度 $m$ に等しいことが命題IV等により示される．従っ

て、${}^{\tau}U_{i,k}$ $(0 \leqq i+k < m)$ に関する同次常微分方程式系 (7) の係数行列式は消えない。それ故、良く知られた常微分方程式系に対する解の一意性定理により ${}^{\tau}U_{i,k}$ が至る所消えることがわかる。（略証おわり）.

この命題 VI は、$\Sigma$ に対する Cauchy 問題が、(5) に対するそれに帰着できることを示している。従って、(5) に対する解の存在定理が得られるならば、我々の存在定理も証明されたことになる。より正確に言えば、初期曲線が (6) で定義され、それが非特性の条件をみたす時、(6) を初期データとする (5) に対する Cauchy 問題の解が一意的に存在することを証明すればよい。しかしながら、命題 V により (5) の係数行列式の消えないことが示されるから、M. Cinquini-Cibrario [1] により証明された結果により、このことは従う。同時に、依存領域に関する言明も得られる。かくして我々の存在定理は証明された。

## 付　録：ある代数的補題

$K$ を体とする。$K$ 係数の $\ell$ 個の 2 変数 $\xi, \eta$ の $m$ 次同次多項式を考える：

$$P_\alpha(\xi,\eta)=a_0^{(\alpha)}\xi^m+a_1^{(\alpha)}\xi^{m-1}\eta+\cdots+a_m^{(\alpha)}\eta^m.\quad(\alpha=1,2,\cdots,r).$$

$P_1,\cdots,P_r$ で生成される $K$ 上のベクトル空間を、$\langle P_1,\cdots,P_r\rangle$ で表わす。又 $P_1,\cdots,P_r$ の最大共通因子を $(P_1,\cdots,P_r)$ で表わす。ある条件下で、$(P_1,\cdots,P_r)$ の次数は容易に計算される。すなわち次の補題が成立つ。

<u>補題</u>．$P_1,\cdots,P_r$ が、条件

$$\dim\langle\xi P_1,\eta P_1,\cdots,\xi P_r,\eta P_r\rangle=\dim\langle P_1,\cdots,P_r\rangle+1$$

をみたすならば、次が正しい。

$$\deg(P_1,\cdots,P_r)=m+1-\dim\langle P_1,\cdots,P_r\rangle.$$

（証明は、Kakié[4], §3, Lemma2 をみよ。）

# 文　献

[1] M. Cinquini-Cibrario, *Un teorema di esistenza e di unicità per un sistema di equazioni alle derivate partiali*, Ann. di Mat. (4), <u>24</u> (1945), 157—175.

[2] K. O. Friedrichs, *Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables*, Am. J. Math., <u>70</u> (1948), 555—589.

[3] E. Goursat, Leçons sur l'intégrations des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables independantes, Tom. II, Hermann, Paris, 1898.

[4] K. Kakié, On involutive systems of partial differential equations in two independent variables, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. Vol. 21(1974), pp. 405~433.

[5] H. Lewy, Über das Anfangswertproblem einer hyperbolishen nichtlinearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, Math. Ann., 98 (1927), 179−191.

[6] H. Lewy und K. O. Friedrichs, Das Anfangswertproblem einer beliebigen nichtlinearen hyperbolishen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung in zwei Variablen. Existenz, Eindeutigkeit und Abhäagigkeitbereich der Lösung, Math. Ann., 99 (1928), 200−221.