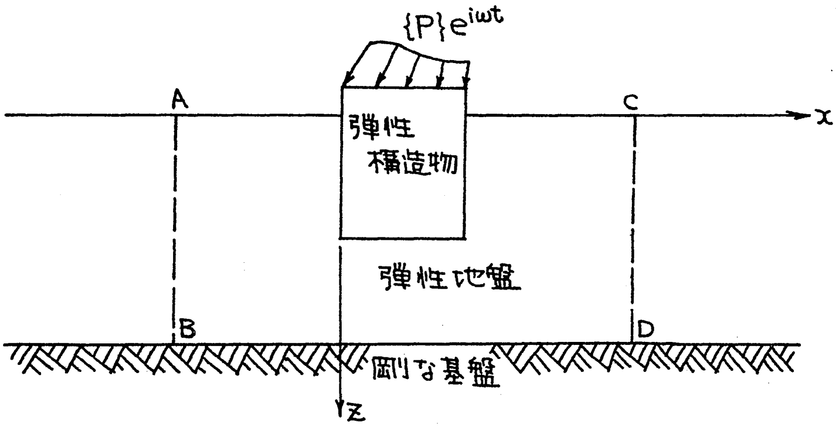
数理解析研究所講究録
第 241 巻 1975 年 137-144

基礎構造物の動的解析への有限要素法の適用

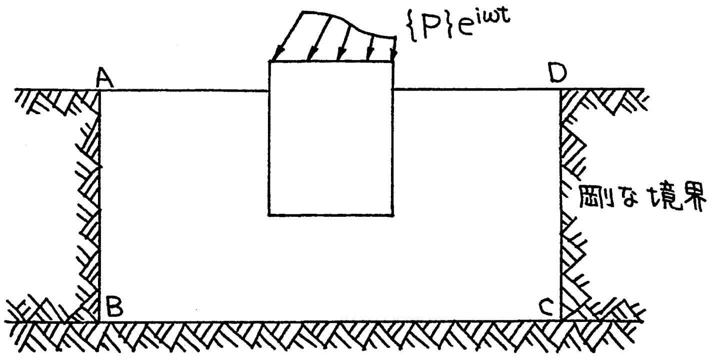
日本鋼管 K.K. 技術研究所 長岡弘明

図－1において剛な基盤上に水平方向に無限に拡がる弾性地盤が存在し、弾性地盤中の弾性構造物が円振動数 ω の荷重 $\{P\}e^{i\omega t}$ を受ける場合の定常振動応答を考える。



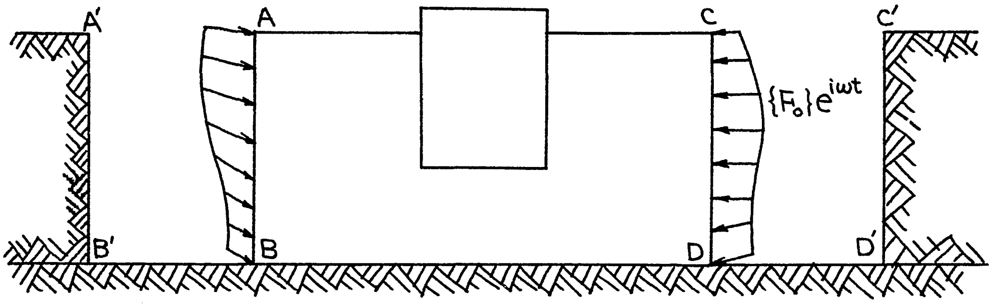
図－1

通常、有限要素法を用いる場合、図-2(a)に示すように加力点より十分遠方に境界 AB、CD をとり、例えば AB、CD 上で変位が零として答を求めている。この方法は振動解析において次のような無視できない不合理な点を持っている。



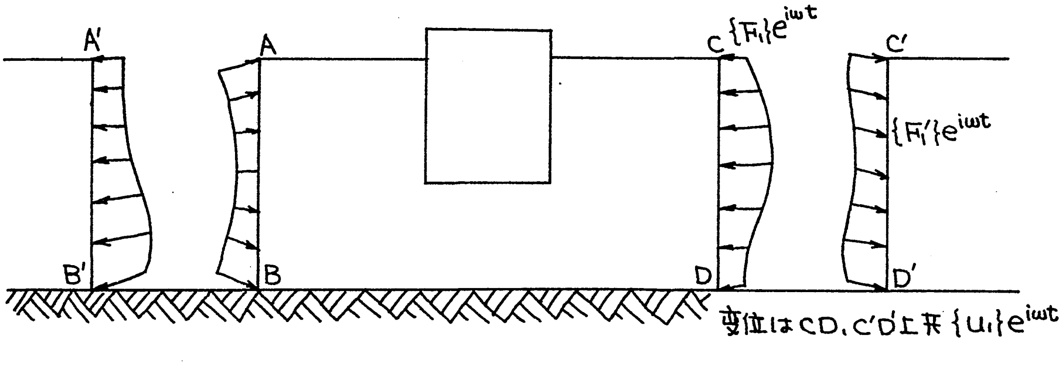
$\{P\}e^{i\omega t}$
A
D
剛な境界
B
C

図-2(a)



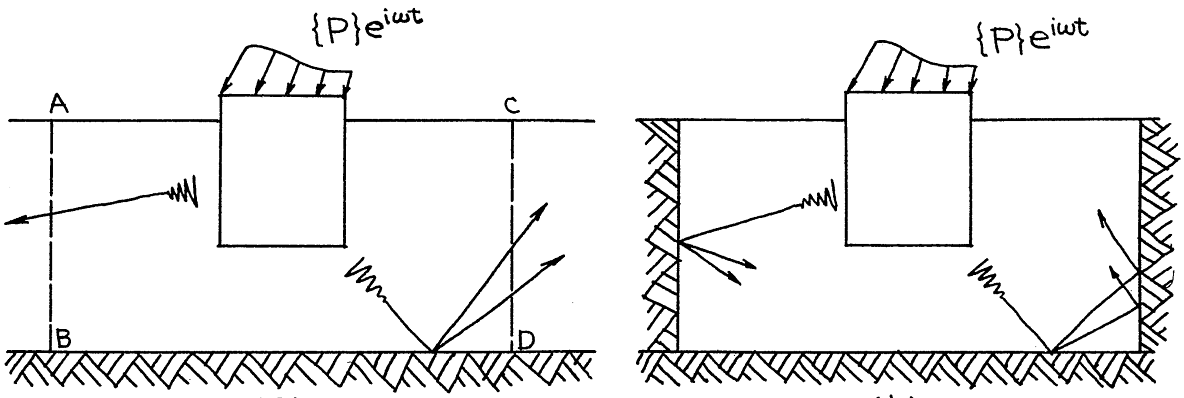
A'
A
C
C'
$\{F_0\}e^{i\omega t}$
B'
B
D
D'

図-2(b)



A'
A
C
$\{F_1\}e^{i\omega t}$
C'
$\{F_1'\}e^{i\omega t}$
B'
B
D
D'
変位はCD、C'D'上共$\{u_1\}e^{i\omega t}$

図-3



(a)　　　(b)

図-4

図-4(a)において弾性構造物を$\{P\}e^{i\omega t}$で加振すると波は仮想の境界AB、CDを通過して無限遠に向って進行していく。このため$\{P\}e^{i\omega t}$に対応する弾性構造物の変位$\{U\}e^{i\omega t}$と$\{P\}e^{i\omega t}$との間には位相差を生じる。一方、図-4(b)においては境界AB、CDで波は反射し、$\{U\}e^{i\omega t}$と$\{P\}e^{i\omega t}$との間には位相差を生じない。このように境界での波の反射の有無は弾性構造物の応答に無視できない差を生じる。

図-4(a)の応答の精度よい近似を得るために、次に示す技巧を用いている。[1) 2)]

1) J. Lysmer & G. Waas. 1972: Shear waves in plane infinite structures. Proc. A.S.C.E., EM1: 85-105.

2) L. A. Drake, 1972: Love and Rayleigh waves in nonhorizontally layered media. Bull. Seismological Soc. America, 62:5: 1241-1258.

図-2(a)を解いた時のAB、CD上の節点力を$\{F_0\}e^{i\omega t}$とする(図-2(b)参照)。図-3に示すように図-1の弾性地盤を有限領域ABDCと左方及び右方に無限に拡がるA'B'の左方及びC'D'の右方とにわけて考え、AB、CD上に強制変位$\{u_1\}e^{i\omega t}$を与えた時のABDCの領域の境界AB、CDの節点力を$\{F_1\}e^{i\omega t}$とし、A'B'、C'D'上に強制変位$\{u_1\}e^{i\omega t}$を与えた時の水平方向に半無限に拡がる領域の境界A'B'、C'D'上の節点力を$\{F_1'\}e^{i\omega t}$とする。この時次の関係式を考える。

$$\{F_0\}=[A]\{P\} \tag{1}$$

$$\{F_1\}=[B]\{u_1\} \tag{2}$$

$$\{F_1'\}=[C]\{u_1\} \tag{3}$$

[A]、[B]は通常の有限要素法で求める事ができる。もし[C]が評価できれば次の釣合式より$\{u_1\}$を$\{P\}$の関数として決定でき、$\{u_1\}$をAB、CDに強制変位として与えた時のABCDの応答と図-2(a)の応答をたしあわせる事により図-1の応答を求める事ができる。

$$\{F_0\}+\{F_1\}+\{F_1'\}=0 \tag{4}$$

$$([B]+[C])\{u_1\}=-[A]\{P\} \tag{5}$$

(3)式の行列[C]を次の方法で近似的に求める。図-1においてAB、CDは加振点より十分遠方であり、AB、CDの左方又は右方では次の形のRayleigh波が卓越しているとする(図-5参照)。

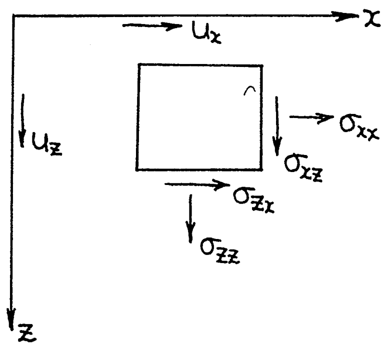


図-5

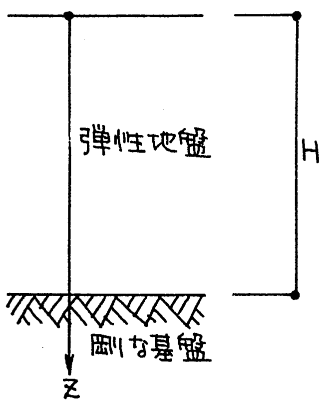


図-6

$$u_x = i\bar{U}_x(z)\exp\{i(kx-\omega t)\} \tag{6}$$

$$u_z = \bar{U}_z(z)\exp\{i(kx-\omega t)\} \tag{7}$$

この時

$$\sigma_{xx} = \{-k(\lambda+2\mu)\bar{U}_x + \lambda\bar{U}_z'\}\exp\{i(kx-\omega t)\}$$

$$= S_{xx}(z)\exp\{i(kx-\omega t)\} \tag{8}$$

$$\sigma_{zz} = \{-k\lambda\bar{U}_x + (\lambda+2\mu)\bar{U}_z'\}\exp\{i(kx-\omega t)\}$$

$$= S_{zz}(z)\exp\{i(kx-\omega t)\} \tag{9}$$

$$\sigma_{xz} = i\mu\cdot(\bar{U}_x' + k\bar{U}_z)\exp\{i(kx-\omega t)\}$$

$$= i\bar{S}_{xz}(z)\exp\{i(kx-\omega t)\} \tag{10}$$

$$S_{xx}(z) = -k(\lambda+2\mu)\bar{U}_x + \lambda\bar{U}_z' \tag{11}$$

$$S_{zz}(z) = -k\lambda\bar{U}_x + (\lambda+2\mu)\bar{U}_z' \tag{12}$$

$$\bar{S}_{xz}(z) = \mu(\bar{U}_x' + k\bar{U}_z) \tag{13}$$

λ, μ は Laméの定数であり、 $'$ は z についての微分である。

運動方程式 $\rho\ddot{u}_i = \sigma_{ij,j}$ (ρ は密度)に代入すると

$$-\rho\omega^2\bar{U}_x = k S_{xx} + \bar{S}'_{xz} \tag{14}$$

$$-\rho\omega^2 U_z = -k\bar{S}_{xz} + S'_{zz} \tag{15}$$

境界条件として（図-6参照）

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = 0 \qquad \text{at } z = 0 \tag{16}$$

$$u_x = u_z = 0 \qquad \text{at } z = H \tag{17}$$

又は

$$S_{zz} = \bar{S}_{zx} = 0 \qquad \text{at } z = 0 \tag{18}$$

$$\bar{U}_x = U_z = 0 \qquad \text{at } z = H \tag{19}$$

(18), (19)式の境界条件の下に(14), (15)式を解くのに通常の有限要素法の手法をとる。

(14), (15), (18), (19)式は次の形の変分原理で表わす事ができる。

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \bar{U}_x \\ U_z \end{Bmatrix}, \quad \{U'\} = \begin{Bmatrix} \bar{U}'_x \\ U'_z \end{Bmatrix} \tag{20}$$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad [\beta] = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda+2\mu \end{bmatrix}, \quad [\gamma] = \begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\Pi = -k^2\int_0^H \{U\}^T[\alpha]\{U\}dz + 2k\int_0^H \{U'\}^T[\gamma]\{U\}dz - \omega^2\int_0^H \rho\{U\}^T\{U\}dz - \int_0^H \{U'\}[\beta]\{U'\}dz \tag{22}$$

この時，(19)式を境界条件として

$$\delta\Pi = 0 \tag{23}$$

(22)式において $\{U\}, \{U'\}$ を次の形の節点変位 $\{\Phi\}$ で表わし，第一変分をとると(26)式を得る。

$$\{U\} = [a(z)]\{\Phi\} \tag{24}$$

$$\{U'\} = [b(z)]\{\Phi\}, \qquad [b(z)] = [a'(z)] \tag{25}$$

$$(-k^2[f]+k[g]+\omega^2[h]-[j])\{\Phi\}=0 \tag{26}$$

$$[f]=\int_0^H [a]^T[\alpha][a]dz \tag{27}$$

$$[g]=\int_0^H ([a]^T[\gamma]^T[b]+[b]^T[\gamma][a])dz \tag{28}$$

$$[h]=\int_0^H \rho[a]^T[a]dz \tag{29}$$

$$[j]=\int_0^H [b]^T[\beta][b]dz \tag{30}$$

$\{\Phi\}$をn次元とする時、(26)式はn組の共役な複素固有値、複素固有ベクトルを持つ。

$$k=\alpha\pm i\beta \quad (\beta\geqq 0) \tag{31}$$

とする時.

$$\exp\{i(kx-\omega t)\}=\exp\{\mp\beta x\}\exp\{i(\alpha x\pm\omega t)\} \tag{32}$$

ここで加振点から離れるに従い振幅は増加しないとして図-1のCDより右側では$-\beta$を、ABより左側では$+\beta$を用い、CDより右側に対しn個の、ABより左側に対しn個の固有ベクトルを選ぶ。

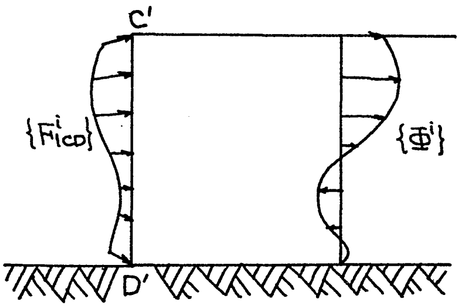


図-7

(3)式を次のように書きかえる。

$$\begin{Bmatrix} F'_{1AB} \\ F'_{1CD} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{AB} & 0 \\ 0 & C_{CD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1AB} \\ U_{1CD} \end{Bmatrix} \tag{33}$$

図-7においてi番目の固有ベクトル$\{\Phi^i\}$が決まると、この変位により応力が決まり、C'D'上の表面力が決まる。(24)式で用いたshape functionによりC'D'上の節点力$\{F^i_{1CD}\}$を決める事ができる。$\{\Phi^i\}$の大きさをξ_iとし、$\sum_{i=1}^{n}\xi_i\{\Phi^i\}$による節点力$\{F'_{1CD}\}$、節点変位$\{U_{1CD}\}$は、

$$\{F'_{1CD}\} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \{F^i_{1CD}\} = [F_{1CD}]\{\xi\} \tag{34}$$

$$\{U_{1CD}\} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \{\Phi^i\} = [\tilde{\Phi}_{CD}]\{\xi\} \tag{35}$$

$$\{\xi\} = \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{Bmatrix}, \quad [F_{1CD}] = [F^1_{1CD} \cdots F^n_{1CD}], \quad [\tilde{\Phi}_{CD}] = [\Phi^1 \cdots \Phi^n] \tag{36}$$

従って

$$\{F'_{1CD}\} = [F_{1CD}][\tilde{\Phi}_{CD}]^{-1}\{U_{1CD}\} = [C_{CD}]\{U_{1CD}\} \tag{37}$$

$$[C_{CD}] = [F_{1CD}][\tilde{\Phi}_{CD}]^{-1} \tag{38}$$

同様にして$[C_{AB}]$も評価する事ができ、(3)式の$[C]$は次の形で表わされる。

$$[C] = \begin{bmatrix} [F_{1AB}][\tilde{\Phi}_{AB}]^{-1} & 0 \\ 0 & [F_{1CD}][\tilde{\Phi}_{CD}]^{-1} \end{bmatrix} \tag{39}$$