数理解析研究所講究録
第 241 巻 1975 年 186-195

弾塑性非線形問題の特異点

東大 工学部 山本 善之

弾塑性体の非線形問題には，buckling, necking などの不安定現象があり，これらは基礎方程式の特異点に対応している。非線形問題を解く手法がいろいろあるが，一般にそのような方法は、特異点の近傍において精度が減少し，あるいは解けなくなる。このような場合によく用いられる方法が変数の変換である．たとえば，未知変数が変位であるとき，いくつかの変位の自由度の代りに定数項(外力)に関係するパラメータを未知変数にとることが行われる。ここでは．その変数選択の基準に対する考察を行いたい。

1．この問題は，

$$K\,dU = F\,d\lambda \tag{1}$$

のような形で与えられる。ここに K は U, λ に関係する対称行列, F は λ に関係するベクトル，U は未知ベクトル，λ は荷重を表わすパラメータである．

さて　$U=\{u_1,\cdots,u_n\}$, $F=\{f_1,\cdots,f_n\}$,
$$K=[k_{ij}],\ (i,j=1,\cdots,n) \tag{2}$$

とする．未知数の交換とは，たとえば $u_1 \leftrightarrow \lambda$ とするには

$$\left.\begin{array}{l} k_{12}du_2+\cdots+k_{1n}du_n-f_1d\lambda=-k_{11}du_1 \\ \\ k_{n2}du_2+\cdots+k_{nn}du_n-f_nd\lambda=-k_{n1}du_1 \end{array}\right\} \tag{3}$$

の形にして問題を解くことである[1]。実際問題では u_1 を適当に選ぶことによって，問題が解決されている。この問題をいわゆる部分構造法の立場から考察したい．すなわち

$$K=\begin{bmatrix} k_{11} & K^{*T} \\ K^{*} & K^{**} \end{bmatrix} \qquad K^{**}=[k_{ij}]\ (i,j=2,\cdots,n)$$

$$K^{*}=\{k_{i1}\} \quad i=2,\cdots,n \tag{4}$$

$$U=\begin{Bmatrix} u_1 \\ U^{*} \end{Bmatrix} \qquad U^{*}=\{u_2,\cdots,u_n\}$$

$$F=\begin{Bmatrix} f_1 \\ F^{*} \end{Bmatrix} \qquad F^{*}=\{f_2,\cdots,f_n\}$$

とおくと，(1) は

$$\left.\begin{array}{l} k_{11}du_1+K^{*T}dU^{*}=f_1d\lambda \\ K^{*}du_1+K^{**}dU^{*}=F^{*}d\lambda \end{array}\right\} \tag{5}$$

となる．この式は

$$\det|K^{**}| \neq 0 \tag{6}$$

であれば

$$
\begin{aligned}
&(k_{11} - K^{*T}K^{**-1}K^{*})du_{11} = (f_1 - K^{*T}K^{**-1}F^{*})d\lambda \\
&K^{**-1}K^{*}du_1 + dU^{*} = K^{**-1}F^{*}d\lambda
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

と同等である．容易に証明されるように

$$
k_{11} - K^{*T}K^{**-1}K^{*} = \det|K|/\det|K^{**}| \qquad (8)
$$

である。したがって， $\det|K| \approx 0$ のときは，(7) 式からは直接には dU を定めることはできないが，

$$
f_1 - K^{*T}K^{**-1}F^{*} \neq 0 \qquad (9)
$$

であれば，

$$
\begin{aligned}
&d\lambda = [k_{11} - K^{*T}K^{**-1}K^{*}]du_1/(f_1 - K^{*T}K^{**-1}F^{*}) \\
&dU^{*} = K^{**-1}F^{*}d\lambda - K^{**-1}K^{*}du_1
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

として，問題を解くことができるわけである．

2．行列 K を直交化する．すなわち K の固有値と固有ベクトルを $\kappa^{(i)}$, $U^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$ とすると

$$
[U^{(i)}]^T K [U^{(i)}] = \begin{bmatrix} \kappa^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \kappa^{(n)} \end{bmatrix} \qquad (11)
$$

$$
|\kappa^{(1)}| \leqq \cdots \leqq |\kappa^{(n)}|
$$

となる。ここに

$$
\kappa^{(1)}, \cdots, \kappa^{(p)} \approx 0, \quad |\kappa^{(i)}| \gg 0 \ (i > p) \qquad (12)
$$

としよう。このとき (1) は

$$\begin{bmatrix} \kappa^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \kappa^{(n)} \end{bmatrix} d\Xi = \Phi d\lambda \tag{13}$$

となる。ここに

$$\Xi = [U^{(i)}]^T U = \{\xi_i\}, \quad \Phi = [U^{(i)}]^T F = \{\phi_i\} \tag{14}$$

である。ここで，

$$\underset{i \leq p}{\mathrm{Max}} |\phi_i / \xi_i| = \phi_s / \xi_s \tag{15}$$

とすると，ξ_s と λ とを交換すればよいことになる。

3．固有値問題

$$K U^{(i)} = \kappa^{(i)} U^{(i)} \tag{16}$$

を解くことは厄介である。それゆえ、適当に

$$U = \begin{Bmatrix} U^0 \\ U^* \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} F^0 \\ F^* \end{Bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K^0 & K^{*T} \\ K^* & K^{**} \end{bmatrix} \tag{17}$$

とする。ここに U, F は $\bar{p}$ ベクトルであり，

$$|\det|K^{**}|| \gg 0$$

となるように U，F，K を分割する。前と同様にして，(1) は

$$\begin{aligned} &[K^0 - K^{*T} K^{**-1} K^*] dU^0 = [F^0 - K^{*T} K^{**-1} F^*] d\lambda \\ &K^{**-1} K^* dU^0 + dU^* = K^{**-1} F^* d\lambda \end{aligned} \tag{18}$$

と同等である。ここで，$\bar{p} \times \bar{p}$ 行列に関する固有値問題

$$[K^0 - K^{*T} K^{**-1} K^*] U^{0(j)} = \kappa^{0(j)} U^{0(j)} \quad (j = 1, \cdots, \bar{p}) \tag{19}$$

を解き，前と同様な手法を用いればよい。もし，$U^0 = \{u_i\}$

であれば，固有値問題を解く必要がなくなる．

4．とくに　ある $\lambda=\bar{\lambda}$ に対し

$$\det\left|K^0-K^{*T}K^{**-1}K^*\right|=0 \qquad (20)$$

であるとし，その近傍の状態を検討する．簡単のため $\bar{p}=p$ と仮定すると，

$$[U^{0(j)}]^T[K^0-K^{*T}K^{**-1}K^*][U^{0(j)}]=\begin{bmatrix} & 0 & \end{bmatrix} \qquad (21)$$

となり，したがって (13) に対応して，

$$[\,0\,]\,d\Psi^0=\Phi^0 d\lambda \qquad (22)$$

が求まる．ここに Ψ^0，Φ^0 は p ベクトルである．座標変換を行うことにより　Ψ^0，Φ^0 を

$$\Phi^{0(2)}=\cdots=\Phi^{0(p)}=0$$

となるように選ぶことができる．$\Phi^{0(1)}$ は 0 である場合とそうでない場合がある．

$\Phi^{0(1)}=0$　のとき　この点を bifurcation point といい

$\Phi^{0(1)}\neq 0$　のとき，この点を limit point という．

$\lambda=\bar{\lambda}$ の近傍に対しても，$\lambda=\bar{\lambda}$ における $U^{0(j)}$ を用いて (21) のように変換することにより，(22) のような式が得られ

$$\left[\sum_k m_{ijk}\,dU_k^0+l_{ij}\,d\lambda\right]dU^0=\begin{Bmatrix}\Phi^{0(1)}+\sum g_{ik}\,dU_k^0+h_i\,d\lambda\\ \vdots\\ \sum g_{ik}\,dU_k^0+h_i\,d\lambda\end{Bmatrix}d\lambda \qquad (23)$$

となる．

$\Phi^{o(1)}=0$ のとき，(23)は

$$[\Sigma m_{ijk}(dU^o_k/d\lambda)+l_{ij}]\{dU^o_j/d\lambda\}=\{\Sigma g_{ik}(dU^o_k/d\lambda)+h_i\} \tag{24}$$

となり，一般にこの式から，解 $dU^o_k/d\lambda$ が２組定まる。とくに $m_{ijk}=0$ だと

$$\frac{dU^o_k}{d\lambda}=\infty, \quad [l_{ij}-g_{ij}]^{-1}\{h_i\} \tag{25}$$

となる．

$\Phi^{o(1)}\neq 0$ のとき，(23)は

$$\sum_j\left(\sum_k m_{1jk}\,dU^o_k+l_{1j}\,d\lambda\right)dU^o_j=\left(\Phi^{o(1)}+\sum_k g_{1k}\,dU^o_k+h_1\,d\lambda\right)d\lambda \tag{26}$$

$$\sum_j\left(\sum_k m_{ijk}\,dU^o_k+l_{ij}\,d\lambda\right)dU^o_j=\left(\sum_k g_{ik}\,dU^o_k+h_i\,d\lambda\right)d\lambda \quad (i=2,\cdots,p) \tag{27}$$

となる。(26)より近似的に

$$d\lambda=\frac{1}{\Phi^{o(1)}}\sum_j\sum_k m_{1jk}\,dU^o_k\,dU^o_j+\cdots\approx\frac{1}{\Phi^{o(1)}}m_{111}\,dU^o_1\,dU^o_1 \tag{28}$$

となる．(27)より

$$\sum_j\sum_k m_{ijk}(dU^o_k/dU^o_1)(dU^o_j/dU^o_1)+\sum_j(l_{ij}-g_{ij})(dU^o_j/dU^o_1)(d\lambda/dU^o_1)-h_i(d\lambda/dU_1)^2=0 \quad (i=2,\cdots,p) \tag{29}$$

あるいは

$$\sum_{j,k\neq 1}\sum m_{ijk}(dU_k^\circ/dU_1^\circ)(dU_j^\circ/dU_1^\circ)+\sum_{j\neq 1}(l_{ij}-g_{ij})(dU_j^\circ/dU_1^\circ)(d\lambda/dU_1^\circ)$$
$$-h(d\lambda/dU_1^\circ)^2+\sum_{j\neq 1}m_{ij1}(dU_j^\circ/dU_1^\circ)+\sum_{k\neq 1}m_{i1k}(dU_k^\circ/dU_1^\circ)$$
$$+m_{i11}+(l_{i1}-g_{i1})(d\lambda/dU_1^\circ)=0 \quad (i=2,\cdots,p) \qquad (30)$$

となる，もし

$m_{ij1}=m_{i1k}=m_{i11}=l_{i1}-g_{i1}=0 \quad (i=2,\cdots,p)$ 　ならば

$dU_k^\circ/d\lambda$ は

$$\sum_{j,k\neq 1}\sum m_{ijk}(dU_k^\circ/d\lambda)(dU_j^\circ/d\lambda)$$
$$+\sum_{j\neq 1}(l_{ij}-g_{ij})(dU_j^\circ/d\lambda)-h=0 \quad (i=2,\cdots,p) \qquad (31)$$

より，定まる．一般には $dU_j^\circ/dU_1^\circ \ll 1$ ならば，(30) は

$$\sum_{j\neq 1}m_{ij1}(dU_j^\circ/dU_1^\circ)+\sum_{k\neq 1}m_{i1k}(dU_k^\circ/dU_1^\circ)+m_{i11}=0$$
$$(i=2,\cdots,p) \qquad (32)$$

となる．

5．塑性変形の生ずるときは，(16) 式の固有値 $\varkappa^{(i)}$ が λ とともに連続的に変化するとは限らない。 $\lambda\leqq\bar{\lambda}$ のとき $\varkappa^{(i)}$ がすべて正であり，$\lambda=\bar{\lambda}+0$ のとき $\varkappa^{(i)}$ に負の値が現われるときも，$\lambda=\bar{\lambda}$ は特異点である。

塑性変形の生ずるときは，2種類の固有値の求め方がある．すなわち

(i) $\lambda=\bar{\lambda}-0$ において塑性変形の生じていた領域には，$\lambda=\bar{\lambda}+0$ においても塑性変形が生ずると仮定して求める．

(ii) 真の応力－ひずみ関係を用いて求める．

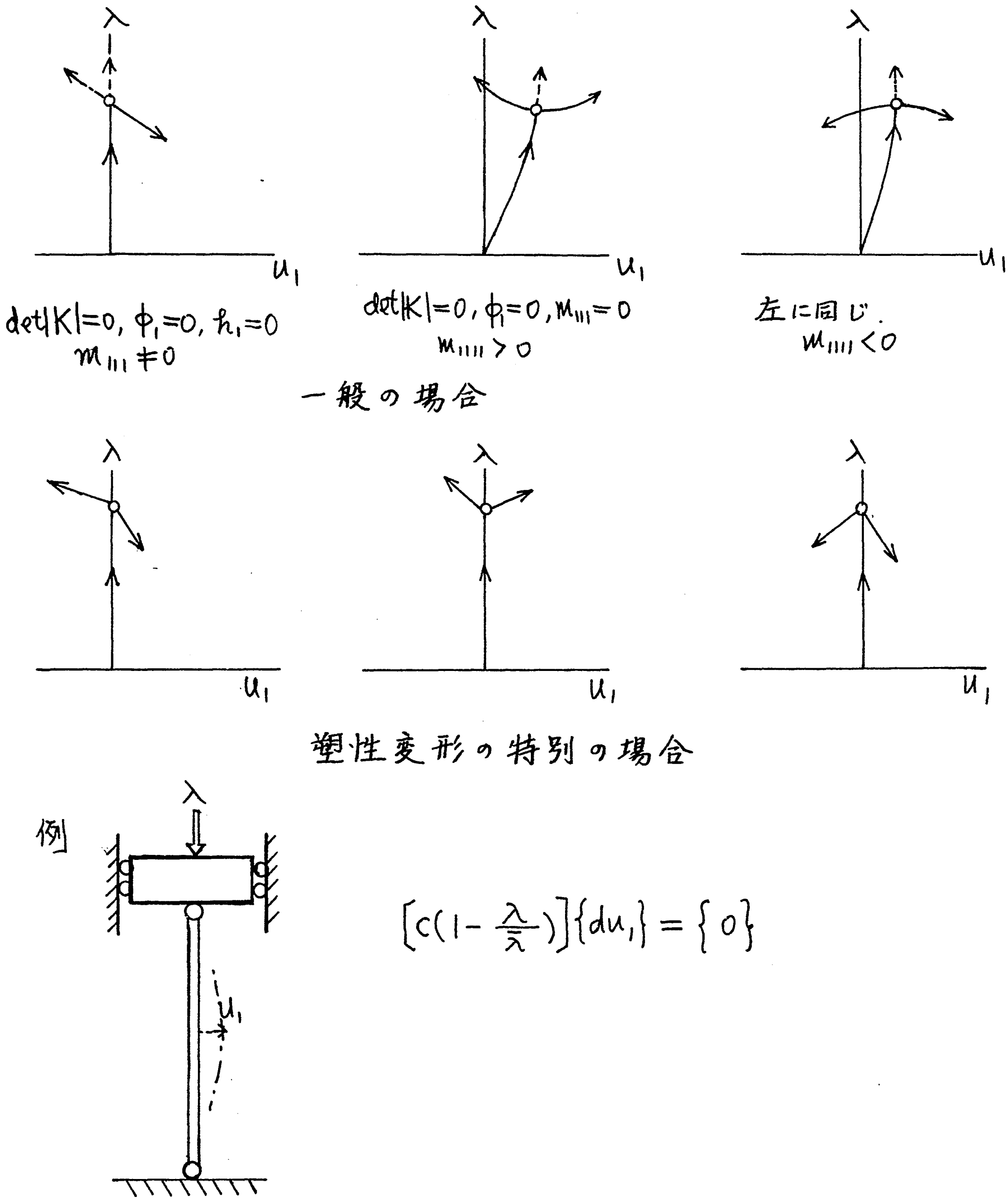
固有値は (i) によるものの方が (ii) によるものより小である．仮定(i)は Shanley の仮定といわれ，これによって定まる特異点も重要な意味をもつ．

6．付図に，種々の特異点の模型図を示す[2)]．

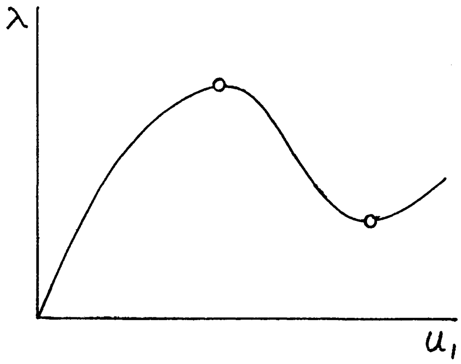
文 献

1. Y. Hangai and S. Kawamata, Analysis of Geometrically Nonlinear and Stability Problems by Static Perturbation Method, Rep. Institute of Industrial Science, Univ. of Tokyo, Vol.22, No. 5, 1973.

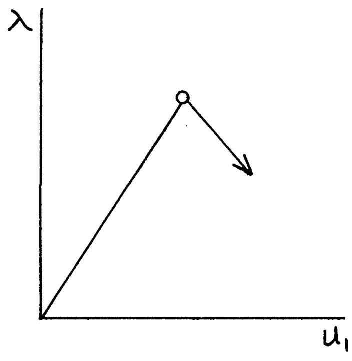
2. J. M. T. Thompson, "A General Theory for the Equilibrium and Stabolity of Discrete Conservative Systems", Z. A. M. P., Vol. 20, 1969, pp.797-846.



付図 1　Bifurcation Point

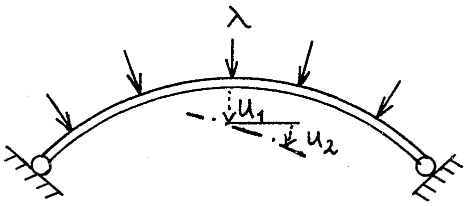


一般の場合

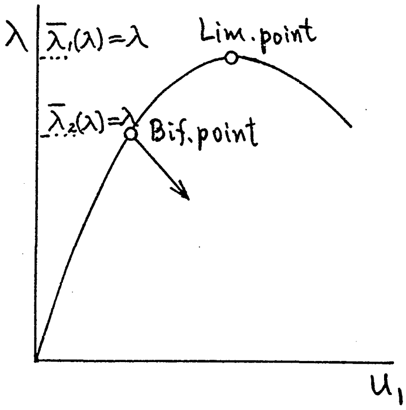


塑性変形の特例

例



$$\begin{bmatrix} c_1(\bar{\lambda}_1-\lambda) & 0 \\ 0 & c_2(\bar{\lambda}_2-\lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} * \\ 0 \end{Bmatrix} d\lambda$$



Limiting point と BifurcationPoint の一致することもある。

($\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ は λ, u に関係する)

付図 2　Limit Point