

有限要素法の基礎としての変分原理に関する一考察

東工大 工学部 吉田 裕

1. はじめに

有限要素法の基礎関係式の誘導に関しては種々の定式過程が提示されており、それぞれの過程の基礎となる変分原理によって分類されている^{1)~3)}。有限要素法は、連続体を有限の大きさの要素の集合として理想化し、解析する方法であるから、与えられた連続体の中に設定される、個々の要素間の境界の数が有限の数となり、解析に先立って仮定される変位形ないしは応力分布形に対して原理的に要求される連続の条件を、要素境界に沿っては拘束条件およびそれに対応する *Lagrange* の乗数によって導入することによって、緩和することが出来る。したがって、基本的なポテンシャルエネルギー原理、相補エネルギー原理および *Reissner* の原理から、有限要素解析に対する修正変分原理を構成することができ、実際に数多くの一般化された形の変分原理が与えられ^{4)~11)}、具体的

な有限要素の誘導およびそれらによる解析が行われてきた^{(12)~(19)}。

本論文では、独立に存在する要素単位を集合して全体系を構成するという立場から、これまでに個々に与えられてきた有限要素モデルを、統一的に説明することができることを示し、発展的に非適合直接剛性法の位置づけを行う。なお、本論文においては、Kirchhoff の仮定に基づいた平板曲げの問題を対象として話をすすめているが、ベクトル表示した変位成分や力量の成分などの内容と平衡方程式の表記などを一般形に置き換えれば、それぞれに論点を一般化することができる。

2. 要素単位の集合として表わされたポテンシャルエネルギー系の変分原理

本章において展開する論点を、図-1 に総括的に図式化して示す。図-1 において、 A_m は個々の要素の面積、 S_m は個々の要素の外周、 S_e は対象全体の外周、 $S_{e\sigma}$ は S_e のうち力学的境界条件の与えられている部分、 $S_{e\omega}$ は幾何学的境界条件の与えられている部分、 S_i は要素間の境界、 ε は曲率のベクトル、 ω は曲げおよびねじりモーメントのベクトルである。

$$\sigma^T = \langle -M_x \quad -M_y \quad -M_{xy} \rangle, \quad \varepsilon^T = \langle w_{,xx} \quad w_{,yy} \quad 2w_{,xy} \rangle$$

また、 p は与えられた外力、 w は面に垂直方向の変位、 f_e は外周 S_e における境界力のベクトル、 u_e は f_e に対応する変位成

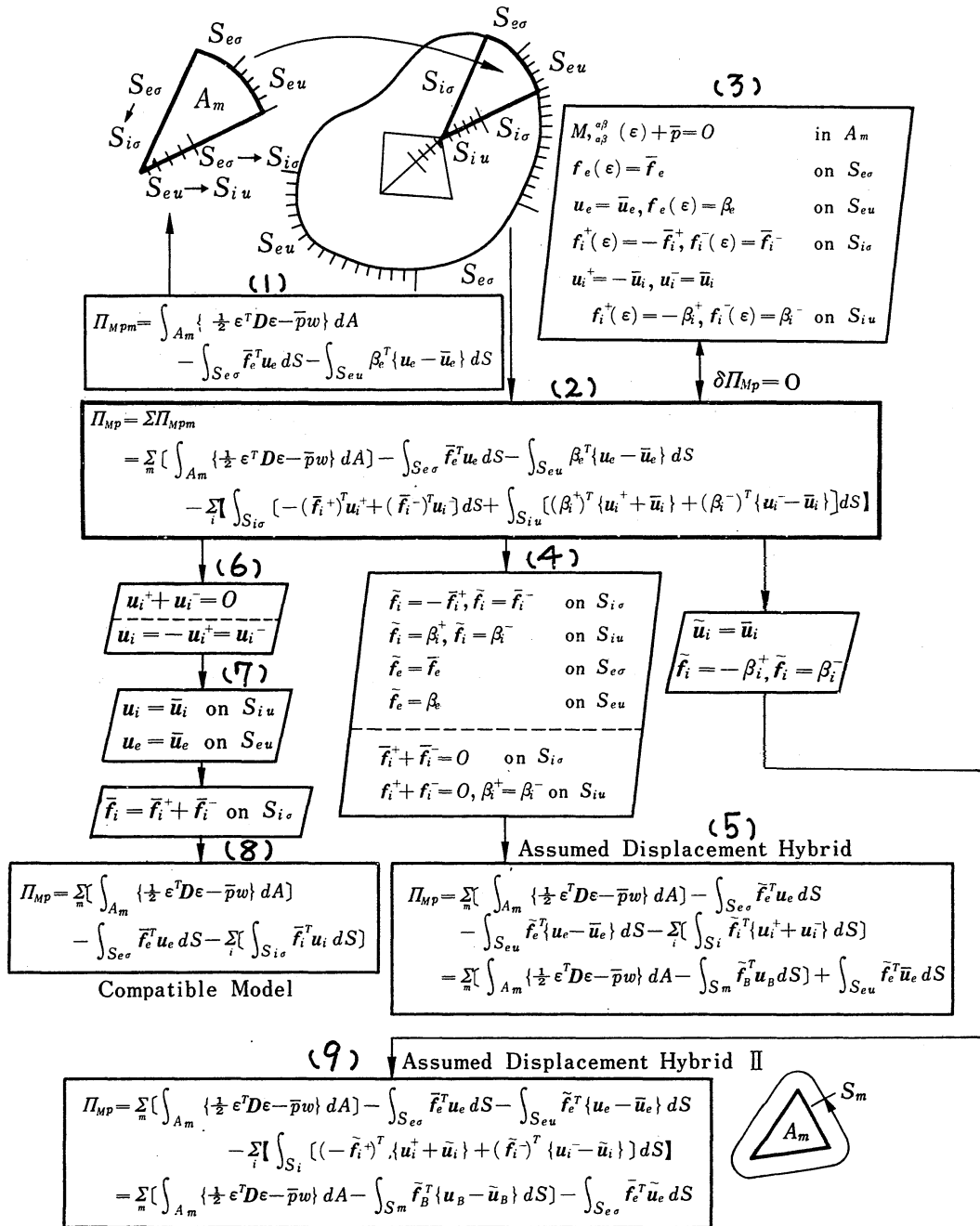


図 - 1 要素単位の集合として表わされたポテンシャルエネルギー系の変分汎関数

分のベクトルである。

$$f_e^T = \langle Q_n \quad -M_{ns} \quad -M_n \rangle_e, \quad u_e^T = \langle w \quad w_{,s} \quad w_{,n} \rangle_e$$

また, $w_{,xx} \equiv \partial^2 w / \partial x^2, \dots$ である。さらに, \bar{f}_e は S_{e0} 上に境界条件として与えられる力量のベクトル, \bar{u}_e は S_{e0} 上に境界条件として与えられる変位のベクトルである。D および N は弾性定数のマトリックスである。

$$\sigma = D \varepsilon, \quad \varepsilon = N \sigma$$

また, α_e および β_e は, 境界条件に対応する拘束条件に対応して導入される Lagrange の乗数のベクトルである。 \sum_i はすべての要素間の境界における対応する値の総和を意味し, \sum_m は各要素に関する対応する関数の総和を意味する。また, S_i を共有する隣接する2つの要素の, その辺に対応する変数を肩付きの+と-によって区別している。

具体的な有限要素解析においては, 個々の要素内では連続な変位関数が仮定される。いま, 個々の要素を独立な単位と考えて, 1つの要素 m の要素内と要素外周で閉じた形で式(1) (式は, 図中に記入した式を意味し, 番号は図中の式の上部に付記している) を適用し, 全体系を構成する全要素の, それぞれに対応する関数を単純に加え合せてみると, 式(2)のような汎関数を得られる。式(2)においては, 全体系における実際の外周の境界を S_e とし, 要素分割によって仮想的に設定さ

これら内部要素間の境界を S_i として区別して表記している。なお、本論文を通して統一的な議論をすすめるために、やや煩雑になるが、各変数の符号を図-2に示すように決める。図からわかるように、(-)側の要素に関する変数の符号が、普通とられている符号と一致していることになる。式(2)の汎関数の停留条件から Euler の方程式が式(3)のように得られる。

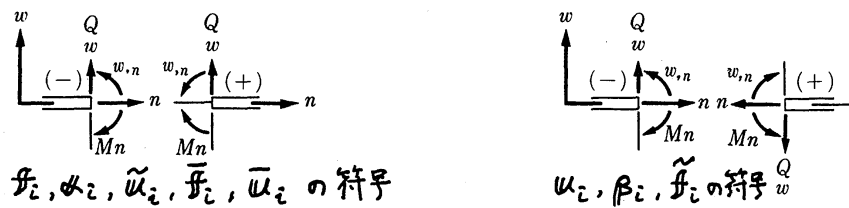


図-2 符号の規約

(1) 変位仮定ハイブリッド・モデル I

式(2)における Lagrange の乗数 β は要素周辺上における変位 u に対応する力量に等しいから、対象全体の外周に位置する境界 S_e および各要素間に仮想的に設定される境界 S_i 上で、新たに力量 \tilde{f} を一般化内力の関数として、式(4)の条件を満足するように仮定し、置き換えを行えば、式(2)は式(5)のように書き換えることができる。式(5)における f_B および u_B は、個々の要素の周辺における力量および変位を意味している。式(5)は、山本教授によって与えられた変位仮定ハイブリッド・モデル I⁸⁾ の基礎となる変分汎関数と等価な関数である。

式(3)および式(4)から、式(5)に基づいた定式化においては、

次の条件 $\bar{f}_i^+ + \bar{f}_i^- = 0 \quad \text{on } S_{i\sigma}$

$$f_i^+ + f_i^- = 0, \quad \beta_i^+ = \beta_i^- \quad \text{on } S_{i\sigma}$$

が強制されることとなる。すなわち，作用外力としては要素内に分布する荷重 \bar{p} のみを対象としており，要素間の境界 S_i 上に作用する線荷重は対象としていない。

(2) 適合モデル

要素内の変位形が，それ自身において必然的に，要素境界に沿っての要素間の適合条件を満足するように仮定されるならば，すなわち，式(6)の条件が満たされ，式(7)の条件を満たすならば，式(2)の関数は式(8)のように書くことができる。式

$$(8) \text{ においては, } \quad \bar{f}_i = \bar{f}_i^+ + \bar{f}_i^- \quad \text{on } S_{i\sigma}$$

であり， \bar{f}_i は $S_{i\sigma}$ 上に実際に作用する線荷重を示している。式(8)の汎関数は，最も基本的な有限要素モデルである，適合モデルの基礎となる変分汎関数と等価な関数である。

(3) 変位仮定のハイブリッド・モデル II

連続体内部に設定された内部要素間境界は，解析上仮想的に設定された境界であって，これらの内部要素間境界に沿っても，変位と応力の両方とも実際に連続である場合には，式(2)において内部要素間境界に与えられる変位 \bar{u}_i を，新たに付加される変数 \tilde{u}_i と置き換え，さらに，境界上の変数 β を $\tilde{\beta}$ と書き換えることによって，式(9)のような汎関数を与えること

ができる。式(9)において、 \tilde{u}_B は、 $\tilde{u}_B = \bar{u}_e$ on S_{eu} を満たすように与えられるものとしている。

式(3)から、式(9)における変数 \tilde{f}_B は一般化内力の関数として要素境界上に与えられる力量であり、個々の要素において独立に与えることができるが、 \tilde{u}_B は要素間境界を共有する隣接する要素間で同じ値をとるように仮定されなければならないことがわかる。また、式(9)の停留条件から得られる Euler の方程式の1つとして、 $\tilde{f}^+ + \tilde{f}^- = 0$ が与えられる。式(9)は、P. Tong によって与えられる変位仮定のハイブリッド・モデルIIの基礎となる変分汎関数¹⁰⁾と等価な関数である。

3. 要素単位の集合として表わされる相補エネルギー系の変分原理

本章において展開する論点を、図-3および図-4に総括的に図式化して示す。なお、本文中の式の番号は図中の対応する番号の式を意味する。

個々の要素内では、平衡方程式を満足するような、連続な応力分布 σ が仮定されるものとする。いま、1つの要素 m を独立な単位と考へて、要素内と要素外周で閉じた形で式(10)を適用し、全体系を構成する全要素の、それぞれに対応する関

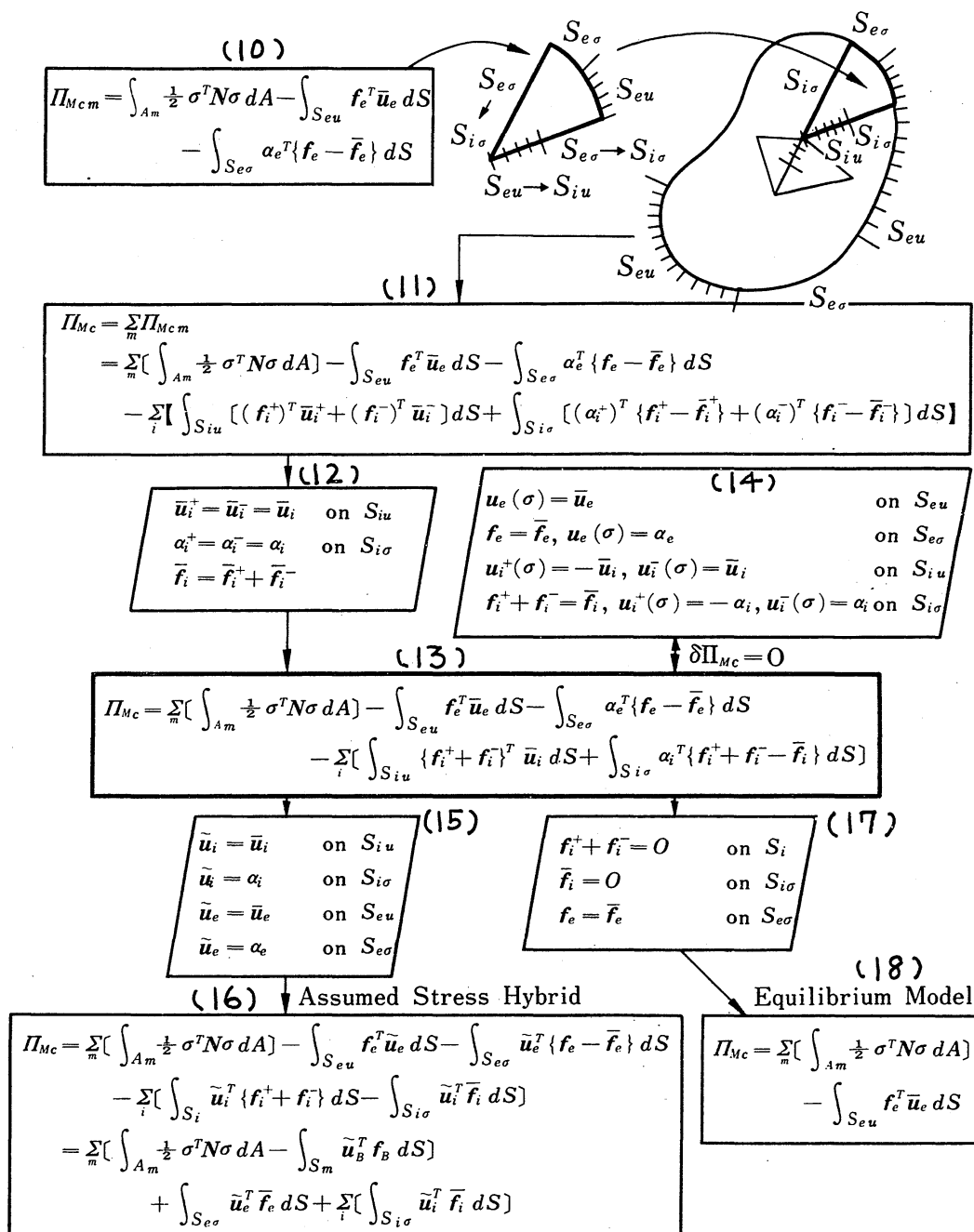


図-3 要素単位の集合として表わされた

相補エネルギー系の変分汎関数(その1)

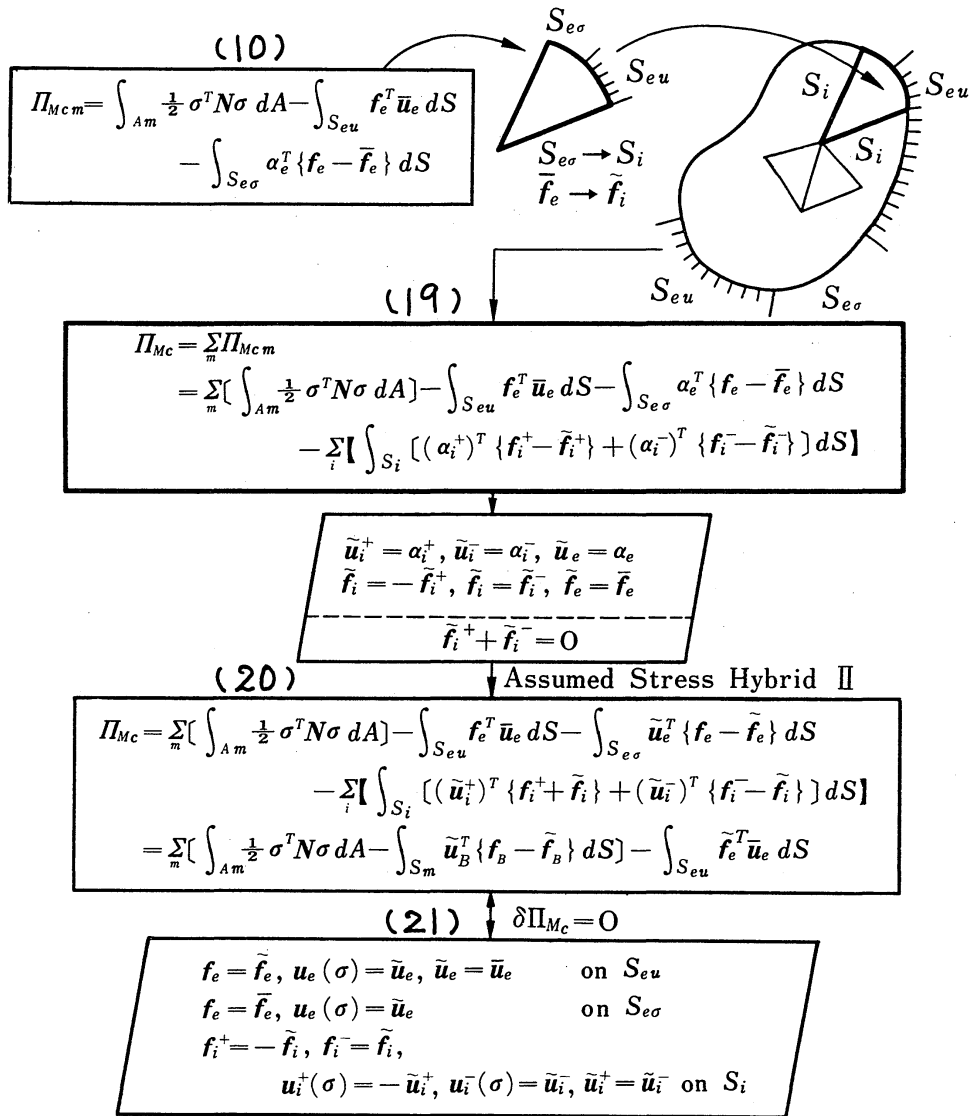


図-4 要素単位の集合として表わされた
相補エネルギー系の変分汎関数(その2)

数を単純に加え合せてみると、式(11)のような汎関数を得られる。式(11)において、付帯条件として式(12)が与えられると、式(11)の汎関数は式(13)のように書き改めることができる。式(13)の汎関数の停留条件から、式(14)のような Euler の方程式が得られる。

(1) 応力仮定のハイブリッド・モデル I

境界 S_e および S_i 上で、新たに変位 \tilde{u} を節点変位の関数として、式(15)の条件を満足するように仮定し、置き換えを行えば、式(13)は式(16)のように書き改められる。式(16)において、 \bar{f}_i は要素間境界 $S_{i\sigma}$ 上に実際に作用する線荷重を意味している。したがって、式(16)の最後の2項は、 $S_{e\sigma}$ および $S_{i\sigma}$ 上に作用する線荷重の等価節点力を与えることになる。式(16)の汎関数は、T.H.H. Pian によって与えられた応力仮定のハイブリッド・モデル I⁶⁾ の基礎となる変分汎関数と等価な関数である。

(2) 平衡モデル

式(13)を適用するにあたって、要素間境界 S_i は、解析のために連続体内部に仮想的に設定された境界であって、本来的に

$$f_i^+ + f_i^- = 0 \quad \text{on } S_i \quad \text{したがって、} \quad \bar{f}_i = 0$$

であるという基本的立場を維持し、要素内に仮定される応力分布が、必然的に式(17)を満足するように仮定されるならば、式(13)は式(18)のように書き改めることができる。式(18)の汎関数は、

平衡モデルの基礎となる変分汎関数と等価な関数である。

(3) 応力仮定のハイブリッド・モデル II

連続体内部に設定された内部要素間境界は、解析上仮想的に設定された境界であって、これらの内部要素間境界に沿って、変位とともに力量も連続でなければならないという基本的立場が維持される場合には、式(11)において、要素間境界 S_i を共有する隣接する要素 e それぞれに対して、その境界辺上に与えられる力量 \bar{f}_i^+ および \bar{f}_i^- を、新たに S_i 上に仮定される変数 \tilde{f}_i と置き換えることによって、式(19)が得られ、さらに境界上に導入されている変数 u を \tilde{u} と書き換えることによって、式(20)のような汎関数を与えることができる。式(20)から明らかのように、要素の周辺に新たに導入される変位 \tilde{u}_B は、個々の要素において独立に与えることができるが、 \tilde{f}_B は要素間境界を共有する隣接する要素間で同じ値をとるように、また次の条件 $\tilde{f}_B = \bar{f}_e$ on S_{e0} を満たすように仮定されなければならない。式(20)の汎関数の停留条件から、式(21)のような Euler の方程式が得られる。式(20)に得られた汎関数は、鷺津教授によって与えられる応力仮定のハイブリッド・モデル II の基礎となる変分汎関数¹¹⁾と等価な関数である。

4. Reissner の変分原理の適用について

これまでに対象としてきた汎関数における変数 α および β は、拘束条件としての平衡条件または適合条件に対応する Lagrange の乗数として、要素間境界 S_i および全体系の外周の境界 S_e 上に新たに導入された変数である。もし、要素内において、変位と応力の両方の分布を同時に、独立に仮定することを考えるならば、 α または β に対応する境界上の変数を、要素内に仮定された変位または応力の関数として導入することが出来る。

すなわち、次のような Reissner の変分汎関数

$$\Pi_{R1} = \int_A \left\{ \sigma^T \varepsilon - \frac{1}{2} \sigma^T N \sigma - \bar{p} w \right\} dA - \int_{S_{e\sigma}} \bar{f}_e^T u_e dS - \int_{S_{eu}} \bar{f}_e^T \{ u_e - \bar{u}_e \} dS \quad (22)$$

に基づいて、これを個々の要素 m に適用し、これらを単純に総和することによって、式(2)に対応する汎関数が得られる。

式(4)においては、一般化内力の関数として新たに導入された境界上における力量 \tilde{f} を、ここでは各要素内に仮定された応力 σ の関数として導入することによって、式(5)に対応する関数として、次のような汎関数を得られる。

$$\Pi_{R1} = \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ \sigma^T \varepsilon - \frac{1}{2} \sigma^T N \sigma - \bar{p} w \right\} dA \right] - \int_{S_{e\sigma}} \bar{f}_e^T u_e dS - \int_{S_{eu}} \bar{f}_e^T \{ u_e - \bar{u}_e \} dS - \sum_i \left[\int_{S_i} \tilde{f}_i^T \{ u_i^+ + u_i^- \} dS \right] \quad (23)$$

式(23)における S_i 上の変数 \tilde{f}_i は, S_i を共有する隣接する2つの要素に対して共通の変数である。したがって, それぞれの要素内に仮定される応力分布 σ の関数として表わされる S_i 上の力量 f_i^+ および f_i^- が, 本来的に同じ値をとるように仮定されない場合には, 変数 \tilde{f}_i はそれぞれの要素辺上の力量の線型結合として次のように導入することができる。

$$\tilde{f}_i = -a f_i^+ + b f_i^- \quad (24)$$

ここに, $f_i^+ = f_i(\sigma^+)$, $f_i^- = f_i(\sigma^-)$ であり, a および b は定数である。式(23)の停留条件から

$$f_i^+ = -\tilde{f}_i, \quad f_i^- = \tilde{f}_i \quad \text{on } S_i \quad (25)$$

おとられるから, 式(24)が意味のある仮定であるためには, a および b は $1 - a - b = 0$ を満たすように決められなければならない。したがって, 式(24)は次のようになる。

$$\tilde{f}_i = -a f_i^+ + (1-a) f_i^- \quad (26)$$

一方, 次式

$$\Pi_{R2} = \int_A \left\{ \sigma^T \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^T D \varepsilon \right\} dA - \int_{S_{eu}} f_e^T \bar{u}_e dS - \int_{S_{e\sigma}} u_e^T \{ f_e - \bar{f}_e \} dS \quad (27)$$

から, 式(16)に対応する関数として, 次の汎関数が得られる。

$$\begin{aligned} \Pi_{R2} = \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ \sigma^T \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^T D \varepsilon \right\} dA \right] &- \int_{S_{eu}} f_e^T \bar{u}_e dS - \int_{S_{e\sigma}} u_e^T \{ f_e - \bar{f}_e \} dS \\ &- \sum_i \left[\int_{S_i} \tilde{u}_i^T \{ f_i^+ + f_i^- \} dS - \int_{S_{i\sigma}} \tilde{u}_i^T \tilde{f}_i dS \right] \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)における変数 \tilde{u}_i は S_i を共有する隣接する2つの要素に対して共通の変数であり、式(26)と同じように次のように導入することができる。

$$\tilde{u}_i = -C u_i^+ + (1-C) u_i^- \quad (29)$$

こゝに、 C は定数であり、 $u_i^+ = u_i(w^+)$ 、 $u_i^- = u_i(w^-)$ である。

5. 直接剛性法の位置づけについて

こゝでは、式(23)および(28)を適用する際の変位と応力の両方を同時に、互に独立に仮定する代わりに、独立な2つの変位分布 w_1 および w_2 を要素内に仮定することを考える。すなわち、ひずみ分布 ϵ および要素境界の変位 u は w_1 の関数として表現され、応力分布 σ および要素境界の力量 f は w_2 の関数として表わされるものとする。また、式(26)および(29)の定数 a および C を

$$a = C = 1/2 \quad \text{のようにとるものとする。すなわち、}$$

$$\tilde{f}_i = \frac{1}{2} \{-f_i^+ + f_i^-\}, \quad \tilde{u}_i = \frac{1}{2} \{-u_i^+ + u_i^-\} \quad (30)$$

式(30)を式(23)および(28)に代入すると、次のような2つの汎関数を得られる。

$$\begin{aligned} \Pi_{R_1} = & \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ (\sigma(w_2))^T \varepsilon(w_1) - \frac{1}{2} (\sigma(w_2))^T N \sigma(w_2) - \bar{p} w_1 \right\} dA \right] \\ & - \int_{S_{e\sigma}} \bar{f}_e^T u_e(w_1) dS - \int_{S_{eu}} (f_e(w_2))^T \{ u_e(w_1) - \bar{u}_e \} dS \\ & - \sum_i \left[\int_{S_i} \frac{1}{2} \{ -f_i^+(w_2) + f_i^-(w_2) \}^T \{ u_i^+(w_1) + u_i^-(w_1) \} dS \right] \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{R_2} = & \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ (\sigma(w_2))^T \varepsilon(w_1) - \frac{1}{2} (\varepsilon(w_1))^T D \varepsilon(w_1) - \bar{p} w_2 \right\} dA \right] \\ & - \int_{S_{e\sigma}} (f_e(w_2))^T \bar{u}_e dS - \int_{S_{eu}} (u_e(w_1))^T \{ f_e(w_2) - \bar{f}_e \} dS \\ & - \sum_i \left[\int_{S_i} \frac{1}{2} \{ -u_i^+(w_1) + u_i^-(w_1) \}^T \{ f_i^+(w_2) + f_i^-(w_2) \} dS \right] \quad (32) \end{aligned}$$

ここで、式(31)および(32)に関する1つの事実を指摘することはできる。いま、式(31)および(32)における要素内部の項を、それぞれ Π_{I_1} および Π_{I_2} と書き、要素周辺に対応する境界の項を、それぞれ Π_{B_1} および Π_{B_2} と書くことにする。すなわち、

$$\Pi_{R_1} = \Pi_{I_1} + \Pi_{B_1}, \quad \Pi_{R_2} = \Pi_{I_2} + \Pi_{B_2} \quad (33)$$

いま、 Π_{B_1} および Π_{B_2} の平均値をとってみると、次のように示される。

$$\begin{aligned} \Pi_B &= \frac{1}{2} \{ \Pi_{B_1} + \Pi_{B_2} \} \\ &= - \left[\int_{S_e = S_{e\sigma} + S_{eu}} \frac{1}{2} u_e^T f_e dS + \sum_i \left[\int_{S_i} \frac{1}{2} \{ -u_i^+ f_i^+ + u_i^- f_i^- \} dS \right] \right] \\ &= - \sum_m \left[\int_{S_m} \frac{1}{2} (u_B(w_1))^T f_B(w_2) dS \right] \quad (34) \end{aligned}$$

式(34)から明らかのように、境界上の項の平均値は個々の要素

の要素周辺の項の単純な総和として表わされること分かる。
式(34)より、式(31)および(32)の境界の項 Π_{B_1} および Π_{B_2} は次のよ
うに書くことができる。

$$\Pi_{B_1} = \Pi_B + \Delta\Pi_B \quad , \quad \Pi_{B_2} = \Pi_B - \Delta\Pi_B \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Pi_B = & - \left[\int \left\{ u_e^T \bar{f}_e - \frac{1}{2} u_e^T f_e \right\} dS + \int \left\{ \frac{1}{2} f_e^T u_e - f_e^T \bar{u}_e \right\} dS \right. \\ & \left. + \sum_i \left[\int_{S_i}^{\text{Seo}} \frac{1}{2} \left\{ (u_i^+)^T f_i^- - (u_i^-)^T f_i^+ \right\} dS \right] \right] \quad (36) \end{aligned}$$

いま、付帯条件として $w_1 = w_2$ しかがって、

$$\sigma(w_2) = D \varepsilon(w_1) \quad \text{が与えられる場合には} \quad w = w_1 = w_2$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \Pi_I &= \Pi_{I_1} = \Pi_{I_2} \\ &= \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^T D \varepsilon - \bar{p} w \right\} dA \right] \quad (37) \end{aligned}$$

ここで、式(37)の Π_I と式(34)の Π_B とで構成される次のよう
な関数を考えてみる。

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_I + \Pi_B \\ &= \sum_m \left[\int_{A_m} \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^T D \varepsilon - \bar{p} w \right\} dA - \int_{S_m} \frac{1}{2} u_B^T f_B dS \right] \quad (38) \end{aligned}$$

式(38)は、一見してわかるように、個々の要素の要素内部と要
素周辺とで閉じた形で与えられる関数の総和として与えられ
るものである。

一方、直接剛性法における、個々の要素の節点力の意義は

$$(\delta u_n)^T f_n = \delta \left\{ \int_{A_m} \bar{p} w dA + \int_{S_m} \frac{1}{2} u_B^T f_B dS \right\} \quad (39)$$

によって与えられるものである。したがって、式(38)に与えられた汎関数は直接剛性法に対応する汎関数であることは明らかである。

式(35)から、次の関係が成り立つことを示すことができる。

$$\begin{aligned} \pi_{B_1} > \pi_B > \pi_{B_2} & \quad \text{if } \Delta \pi_B > 0 \\ \pi_{B_1} = \pi_B = \pi_{B_2} & \quad \text{if } \Delta \pi_B = 0 \\ \pi_{B_1} < \pi_B < \pi_{B_2} & \quad \text{if } \Delta \pi_B < 0 \end{aligned}$$

したがって、もし式(31)および(32)の汎関数に基づく2つの異なったハイブリッド・モデルの両方ともが収束することが保証されるならば、非適合直接剛性法によるモデルもまた要素分割を細かくするとき、収束することがわかる。

6. 結論

以上に、独立に存在する要素単位を集合して全体系を構成するという立場から、有限要素法の基礎として、これまで個々に与えられてきた変分汎関数のそれぞれを、統一的に説明することができることを示し、発展的に非適合直接剛性法の位置づけを行った。

具体的な有限要素解析においては、たとえば、平面応力問題において要素内の変位を線型分布、したがって、ひずみ一定に仮定する場合とか、平板の曲げの問題に対して、たわみの分布を3次の多項式で仮定するといった場合が多く採られる。これらの変位仮定は、平衡方程式の斉次形を満足するものである。また、具体的な応力仮定の定式化においても、要素内で平衡方程式の斉次形を満足するように応力分布を仮定する場合が普通である。

一方、工学上の問題においては、集中荷重とみ線荷重といった理想化された外力を対象とする場合が多く存在し、有限要素法を適用する解析対象は、このような荷重条件としての特異性を対象とするほうがむしろ普通である。

したがって、要素内に仮定される変位分布ないしは応力分布が平衡方程式の斉次形を満足する場合には、要素間の境界上の線荷重などを対象とし得るかどうかということが重要になってくる。その意味で有効な汎関数は、式(8)の適合モデル、式(16)の応力仮定のハイブリッド・モデルIおよび式(28)の汎関数に基づくモデルの3つであることが本論文の考察によって明らかに示される。

有限要素法の定式化のもう1つの可能性は、要素内では変位または応力のどちらか一方を仮定する場合でも、要素周辺

では、たとえば「板曲げ」の問題におけるせん断力に対しては対応する変位を節点変位として残し、曲げおよびねじりモーメントに対してはモーメントの値そのものを節点における変数として残すといったように、節点に設定される変数を変位と力量との混合形にする方法である。このようなモデルは、Reissnerの変分原理に基づいた、いわゆる混合モデルとしてはよく知られているが、ハイブリッド型の変分汎関数に基づいて誘導することも容易であることが、本論文の考察から明らかである。

本論文において、変位仮定のハイブリッドおよび応力仮定のハイブリッドの2つのモデルに対応する変分汎関数と直接剛性法に対応する関数との間に存在する1つの事実を指摘し非適合直接剛性法の位置づけを行った。直接剛性法の要素境界の項が、変位仮定のハイブリッドおよび応力仮定のハイブリッドに対応する2つの汎関数における境界上の項の間に狭まれるという事実から、ただちに非適合直接剛性法による解析結果が、要素分割を細かくとっていったときに、正しい解に収束するということができるかどうかは定かでないが、この事実は、直接剛性法の収束性を考える有力な手がかりになるものであると考える。

参考文献

1. Pian, T.H.H. and Tong, P. "Basis of Finite Element Methods for Solid Continua", Int. J. for Numerical Meth. in Eng., Vol. 1, 1969, pp. 3-28.
2. Fraeijs de Veubeke, B. "Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method", in Stress Analysis, Wiley, London, 1965.
3. 鷺津久一郎：弾性学の変分原理概論，コンピュータによる構造工学講座，II-3-A，培風館，1972.
4. Melosh, R.J. "Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method", AIAA Jnl., Vol. 1, 1963, pp. 1631-1637.
5. Jones, R.E. "A Generalization of the Direct-Stiffness Method of Structural Analysis", AIAA Jnl., Vol. 2, 1964, pp. 821-826.
6. Pian, T.H.H. "Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distribution", AIAA Jnl., Vol. 2, 1964, pp. 1333-1336.
7. Herrmann, L.R. "A Bending Analysis for Plates", Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., AFFDL-TR-66-80, 1965, pp. 577-604.
8. Yamamoto, Y. "A Formulation of Matrix Displacement Method", Dept. of Aeronautics and Astronautics, M.I.T., 1966.
9. Green, B.E., Jones, R.E., McLay, R.W. and Strome, D.R. "Generalized Variational Principles in the Finite-Element Method", AIAA Jnl., Vol. 7, 1969, pp. 1254-1260.
10. Tong, P. "New Displacement Hybrid Finite Element Models for Solid Continua", Int. J. for Numerical Meth. in Eng., Vol. 2, 1970, pp.73-83.
11. 鷺津久一郎，足立武司：ハイブリッド型変分原理に関する一覽書，日本鋼構造協会第5回大会研究集会，マトリックス構造解析法研究発表論文集，1971，pp. 127-131.
12. Clough, R.W. and Tocher, J.L. "Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending", Proc. Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech., AFFDL-TR-66-80, 1965, pp. 515-546.
13. Herrmann, L.R. "Finite Element Bending Analysis for Plates", J. of Engg. Mech. Div., ASCE, Vol. 93, EM 5, 1967, pp. 13-26.
14. Pian, T.H.H. and Tong, P. "Rationalization in Deriving Element Stiffness Matrix by Assumed Stress Approach", Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., Wright Patterson A.F. Base, Ohio, 1968, pp. 441-469.
15. Anderheggen, E. "Finite Element Plate Bending Equilibrium Analysis", J. of Engg. Mech., Div., ASCE, Vol. 95, EM 4, 1969, pp. 841-857.

16. Allman, D.J. "Triangular Finite Elements for Plate Bending with Constant and Linearly Varying Bending Moments", Proc. I.U.T.A.M., Symposium on High Speed Computing of Elastic Structures, University of Liege, Belgium, 1970, pp. 105-136.
17. 吉田 裕: 有限要素マトリックスの定式過程に関する一考察, 土木学会論文報告集, 第190号, 1971, pp. 49-59.
18. Yoshida, Y. "Equivalent Finite Elements on Different Bases", Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, J.T. Oden, R.W. Clough and Y. Yamamoto (eds.), University of Alabama Press, 1972, pp. 133-149.
19. 吉田 裕, 雨宮栄一郎, 増田陳紀: 立体構造解析のための薄板有限要素, 土木学会論文報告集, 第211号, 1973, pp. 19-28.
20. Oliveira, E.R.A. "Theoretical Foundations of the Finite Element Method", Int. J. Solids & Structures, Vol. 4, 1968, pp. 929-952.
21. 吉田 裕: 有限要素法の基礎としての変分原理に関する一考察, 土木学会論文報告集, 第232号, 1974, pp. 25-36.