数理解析研究所講究録
第243巻 1975年 19-24

non-simple な knot は Property P を持つか？

神戸大 中川 洋子

多分、"Cubes with knotted holes" [1] が書かれた頃は、Poincaré Conjectureの反例を作れるかも知れないと云うことでProperty P の向題が考えられていたのではないだろうか。今のところ、この方向に対しては否定的で、むしろ、全てのnon-trivial な knot が Property P を持ち，従って、2つの knot manifoldsが homeoなら，それら2つの knot は互に equivalent であると云う向題の解決のために、Property P の向題を考えようとする方が、妥当のようである。([3], [6])

この報告では、上に掲げた conjecture を述べるに必要な定義、例と、証明(?)の概略とを書き留めるだけとする。

Def. 与えられた knot k の companion knot とは次の様な knot である。

Wを kの regular neighborhood ではない kを内部に含む solid torus とする. Wの全ての meridional cell と kが交わっていたら, Wの core が represent する knot type を, kの companion knot と呼ぶ.

Def. 与えられた knot k が simple knot であるとは、kの全ての companion knot が trivial であるとき.

Conjecture. knot k を non-simple knot とする. このとき、kは Property P を持つ.

Ideas of proof. Dehn の方法により, homology 3-sphere Mを作る. 即ち, $M \cong (S^3 - \mathrm{int}\, V) \underset{\varphi}{\cup} S^1 \times D^2$, φは $\partial(S^1 \times D^2)$ ($S^1 \times D^2 = V'$ と表わす) から, ∂V への homeo で, $\partial V'$ の meridian を $m l^{\nu}$ $(\nu \neq 0)$ に isotopic な ∂V 上の simple closed curve へ写す写像とする. (m, l ; 夫々, ∂V の meridian と longitude を表わす.)

Wを kの companion knot の regular neighborhood で, Vを内部に含むものとすると, 条件より, Wは

knotted solid torus になっている.

M を $(S^3 - \mathrm{int}\, W) \cup ((W - \mathrm{int}\, V) \underset{\varphi}{\cup} V') = M_1 \cup M_2$ と表わす. このとき, $M_1 \cap M_2 = \partial W$ (knotted torus) となっている. 従って, induced map : $\pi_1(\partial W) \to \pi_1(M_1)$ は mono. であるから, もしも, $\pi_1(\partial W)$ から $\pi_1(M_2)$ への map. が mono. であることが解れば, $\pi_1(M) = \pi_1(M_1) \underset{\pi_1(\partial W)}{*} \pi_1(M_2)$ となって, $\pi_1(M)$ は non-trivial, 即ち, M は simply connected でないことが解る.

Conjecture を証明するためには, $\pi_1(\partial W) \to \pi_1(M_2)$ なる homomorphism が. mono. であることを示せば. 十分である.

今, $\pi_1(\partial W) \to \pi_1(M_2)$ なる homomorphism が mono ではないと仮定すると, ∂W 上の trivial ではない simple closed curve J があって, M_2 で non-singular disk D を bound している. この D と $\partial V'$ との intersection を考える. $D \cap \partial V'$ は, n 個の $\partial V'$ の meridional curves より成るように surgery 出来る. 1つの curve を考えると, $\partial V'$ の meridian であるから $(1, \nu)$-type の V の cable knot になっている. この n 個の intersection curves を link として

捕えて $l_1 \cup \cdots \cup l_n = L'$ と表わす．すると、link $L = l_0 \cup L' = l_0 \cup l_1 \cup \cdots \cup l_n$（$l_0$は、そその non-singular disk D の boundary J を表わす．即ち，l_0は W の cable knot である．）は、n個の穴のあいた disk の boundary になっている．ここで link L の Alexander polynomial を $\Delta(t_0, \cdots, t_n)$ で表わす．この polynomial を完全な形で得ることは（今のところ）出来ていないが、Torres の方法［7］によって，$\Delta(t_0, 1, \cdots, 1)$ 及び $\Delta(1, \cdots, 1, t_n)$ を求めることが出来る．これらを、求めるときに、直接に計算する方法（link L が genus 0 であることを用いて）と、linking number を用いて，夫々、l_0，l_n の knots の Alexander polynomials $\Delta_{l_0}(t_0)$，$\Delta_{l_n}(t_n)$ と関係づける方法とがある．

$g = |\mathcal{L}(l_i, l_j)|$ $(ij \neq 0,\ i \neq j)$（条件より，任意の i，j に対し、$|\mathcal{L}(l_i, l_j)|$は一定となることが解るので）と、すると，$\nu \neq 0$ より $g \neq 0$ が求まり，更に，$\Delta(t, \cdots, t)$ を求めることにより，上の2つの方法で求めた $\Delta(t_0, 1, \cdots, 1)$ 及び $\Delta(1, \cdots, 1, t_n)$ が一致したら、矛盾が出てくる．（と、予想したのだが）

最初に、$\pi_1(\partial W) \to \pi_1(M_2)$；mono. と仮定したこと

が、誤りであった．よって、M は simply connected でないことが解り、与えられた non-simple knot k は Property P を持つことがいえる．

(注) 途中で link L を考えるが，$n=1$ の場合 L は annulus の boundary となり，夫々が，V 及び W の (trivial でない) cable knot であることから，Schubert の結果より、この場合は起きないことが、解る (annulus の boundary の knot type は equivalent であることが証明されている)．これが、conjecture が正しいと思った理由で，$n \geq 2$ の場合に、何か invariant (?) を見つけられて，一方から考えた時には、genus 0 の link になっているし、もう一方からは l_0 と l_i $(i=1, \cdots, n)$ の knot types は異なるのだから、ある種の invariant が一致し得ないだろうというが、main idea である．この invariant(?) を、L の Alexander polynomial を計算することによって、得ようとした．

色々な形で polynomials を求めようとしているが、この方法では、何らかの条件が必要となりそうである。

REFERENCES

[1] Bing, R.H. and Martin, J.M., "Cubes with Knotted Holes," Trans. Amer. Math. Soc., vol. 155, 1971, 217-237.

[2] González-Acuña, F., "Dehn's Construction of Knots," Bol. Soc. Mat. Mexicana, vol. 15, 1970, 58-79.

[3] ________________, "On an Article by J. Simon," An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autonoma Mexico, vol. 11, 1971, 43-54.

[4] Hemple, J., "Simply Connected 3-Manifold is S^3 if it is the Sum of a Solid Torus and the Complement of a Torus Knot," Proc. Amer. Math. Soc., vol. 15, 1964, 195-199.

[5] Simon, J., "Some Classes of Knots with Property P," Topology of Manifolds, Markham, 1970.

[6] ________, "An Algebraic Classification of Knots in S^3," Ann. of Math., vol. 97, 1973, 1-13.

[7] Torres, G., "On the Alexander Polynomial," Ann. of Math., vol. 57, 1953, 57-89.