数理解析研究所講究録
第243巻 1975年 67-76

On homology n-sphere in S^{n+1}

東洋大(工)　山下正勝

§1. 序.

homology n-sphere の $(n+1)$-sphere への(Codim.1 の)embedding についての結果を整理し、未解決(と思われる)問題を明確にするのがこの報告の目的である。断わらない限り、category は PL である。boundary をもつ manifold M に対してその boundary を ∂M, M の double を $2M$ であらわす。standard n-sphere を S^n であらわす。

homology n-sphere Σ^n が S^{n+1} に embed された状態を考える。$S^{n+1}-\Sigma^n$ は 2つの連結成分から成る。その各連結成分の closure をそれぞれ A, B とあらわすことにする。すなわち

$$S^{n+1}=A\cup B,$$
$$A\cap B=\Sigma^n$$

である。この状態のとき $(S^{n+1}, \Sigma^n; A, B)$ と書く。

§2. homology n-sphere の S^{n+1} への embedding の可能性について．

compact contractible manifold M に対して Lefschetz duality theorem から次の同型：

$$H_k(\partial M) \xleftarrow{\cong} H_{k+1}(M, \partial M) \cong H^{n-k-1}(M)$$

が得られる．したがって compact contractible $(n+1)$-manifold の boundary はいつでも homology n-sphere であることがわかる． 逆に次の結果が知られている．

<u>Proposition 1.</u> (Kervaire [3]) (イ) $n \geq 4$ ならば．任意の homology n-sphere は或る compact contractible $(n+1)$-manifold の boundary である．
(ロ) $n = 3$ のとき．どんな compact contractible 4-manifold の boundary にもなり得ない homology 3-sphere Γ^3 が存在する．

Proposition 1 (ロ) の Γ^3 はいわゆる Poincaré sphere と呼ばれるもので，この Γ^3 は compact acyclic 4-manifold の boundary にもならないことを加藤十吉氏に教えていただいた．

問題1. acyclic 4-manifold の boundary にはなるが、contractible 4-manifold の boundary にはなり得ない homology 3-sphere は存在するか？

Proposition 2. (イ) $n \geqq 4$ ならば、任意の homology n-sphere は S^{n+1} に（locally flat に）embed できる。
(ロ) $n=3$ のとき、S^4 に embed できない homology 3-sphere が存在する。

(証明). (イ) を示す。Proposition 1 により、$n \geqq 4$ のときには任意の homology n-sphere Σ^n は或る compact contractible $(n+1)$-manifold M の boundary になっている。ところが $n+1 \geqq 5$ であることから $M \times I = I^{n+2}$ である ([1], [6])。すなわち

$$\Sigma^n = \partial M \subset 2M = \partial(M \times I) = S^{n+1}$$

となり、作り方から明らかに locally flat である。

(ロ) の例としては Poincaré sphere Γ^3 がある。Γ^3 はどんな compact acyclic manifold の boundary にもなり得ない。ところが一般に homology n-sphere Σ^n が S^{n+1} に embed されたとして $(S^{n+1}, \Sigma^n; A, B)$ を考えると、Alexander duality theorem から

$$H_k(S^{n+1} - \Sigma^n) \cong \widetilde{H}^n(\Sigma^n)$$

であるから A, B はともに acyclic でなければならない。Γ^3 はこのような A, B を持ち得ない。

S^4 に (locally flat に) embed できる homology 3-sphere は勿論存在する (たとえば Mazur [4] の作ったもの)。したがって次の問題が起こる。

<u>問題 2</u>. homology 3-sphere が S^4 に embed できるための条件を求めよ。

この問題はいろいろな形に作り変えられるが、微妙に 4 次元 Poincaré Conjecture に関係するようである。もしも 4 次元 Poincaré Conjecture が正しいとすると、compact contractible 4-manifold の boundary になり得る homology 3-sphere はすべて S^4 に (locally flat に) embed できる。したがってたとえば「compact contractible 4-manifold M^4 の boundary が S^4 に embed できるとき、M^4 自身が S^4 に embed できるか?」ということも問題になる。これは「$M^4 \times I = S^5 \rightleftarrows$ 4 次元 Poincare Conjecture が正しい ([6] 参照)」ことも考えると少なくとも 4 次元 Poincaré Conjecture

よりいくらかは易しい問題(のはず)である.

§3. homology n-sphere の embedding の様子について.

$n \geqq 4$ のとき, 任意の homology n-sphere Σ^n は, 或る compact contractible $(n+1)$-manifold M^{n+1} の boundary になっている (Proposition 1). 一方 $n+1 \geqq 5$ に対して $M^{n+1} \times I = I^{n+2}$ となる ([1], [6]) から

$$\Sigma^n \subsetneq \partial M = \partial(M^{n+1} \times I) = S^{n+1}$$

となる. すなわち任意の homology n-sphere Σ^n $(n \geqq 4)$ に対して A, B がともに contractible となるような (locally flat な) embedding $(S^{n+1}, \Sigma^n; A, B)$ が存在する.

$n=3$ の場合にもたとえば Mazur [4] の作った homology 3-sphere Λ^3 はこの性質をもっている. 勿論 contractible 4-manifold の boundary になり得ない homology 3-sphere (たとえば Poincaré sphere Γ^3) は問題にならないが; 4次元 Poincaré Conjecture が正しければ contractible 4-manifold M^4 の boundary に対して, A, B がともに contractible となる embedding

$(S^4, \partial M ; A, B)$ が存在する. 4次元 Poincaré Conjecture を仮定せずにこのことが言えないだろうか?

<u>問題 3.</u> contractible 4-manifold の boundary ∂M に対し. A, B がともに contractible となるような embedding $(S^4, \partial M ; A, B)$ が存在するか?

acyclic 2-complex K^2 を S^5 に embed する. $N = N(K^2, S^5)$ をその regular neighborhood とする. そのとき $N \simeq K^2$ であり. Alexander duality theorem と general position theorem から $W = \overline{S^5 - N} = \overline{S^5 - K^2}$ は contractible である. また $\pi_1(\partial N) \cong \pi_1(N - K^2) \cong \pi_1(N) \cong \pi_1(K^2)$ である. すなわち ∂N は K^2 と同じ基本群をもつ homology 4-sphere であり. $(S^5, \partial N ; N, W)$ で. N は contractible でなく. W は contractible である. $n \geqq 5$ の場合も同様である.

すなわち $n \geqq 4$ のときは任意の homology n-sphere $\Sigma^n (\neq S^n)$ に対して $\pi_1(\Sigma'^n) \cong \pi_1(\Sigma^n)$ なる homology n-sphere Σ'^n で. A は contractible でなく. B は contractible であるような locally flat embedding $(S^{n+1}, \Sigma'^n ; A, B)$ をもつものがある.

$n = 3$ に対しては Neuzil [5] の結果がある.

問題 4. 任意の homology n-sphere $\Sigma^n (\neq S^n)$ に対して. A は contractible でなく, B は contractible であるような embedding $(S^{n+1}, \Sigma^n; A, B)$ が存在するか？

問題 5. compact contractible n-manifold M は $[\frac{n}{2}]$-polyhedron へ collapse できるか？

この問題は否定的な気もするが, もし問題 5 が $n \geq 4$ に対して成りたつならば, 問題 4 も $n \geq 4$ に対して正しい。 またこれに関連して次の問題がある.

問題 6. compact contractible 4-manifold M^4 に対して. $M^4 \times I$ は 2-complex へ collapse できるか？

問題 7. contractible 2-complex K^2 の S^5 における regular neighborhood $N(K^2, S^5)$ は I^5 か？

問題 6 及び 7 がともに正しいことと 4 次元 Poincaré Conjecture が正しいことは同値である. また $K^2 \times I \searrow \cdot$ ならば $N(K^2, S^5) = I^5$ となることもわかっている([7]).

acyclic 2-complexについてFenn [2] は次のような興味ある問題を提出している.

<u>問題8.</u> S^4 にembedできないacyclic 2-complexは存在するか?

さて本題にもどって, A, B がともに contractible でないような embedding $(S^{n+1}, \Sigma^n; A, B)$ が作れるかという問題が残っているが, それは次のようにして作ることができる.

$(S_1^{n+1}, \Sigma_1^n; A_1, B_1)$, $(S_2^{n+1}, \Sigma_2^n; A_2, B_2)$ という2つの locally flat な embeddings を考える. こゝに S_1^{n+1}, S_2^{n+1} はともに standard $(n+1)$-sphere であるが便宜上別々にしたものである. Σ_1^n, Σ_2^n はそれぞれ homology n-sphere である. homeomorphic であってもなくてもよい. また, A_1 と B_2 は contractible でなく, B_1 と A_2 は contractible である. このような embeddings が任意の $n(\geq 3)$ に対して作れることはすでに述べた.

いま $x_1 \in \Sigma_1^n$, $x_2 \in \Sigma_2^n$ を適当に選び, x_i の S_i^{n+1} における disk neighborhood D_i^{n+1} を考える. そして connected sum $S_1^{n+1} \# S_2^{n+1} = (S_1^{n+1} - D_1) \cup (S_2^{n+1} - D_2)$ を

$$\partial D_1 \cap A_1 = \partial D_2 \cap A_2$$
$$\partial D_1 \cap B_1 = \partial D_2 \cap B_2$$
$$\partial D_1 \cap \Sigma_1 = \partial D_2 \cap \Sigma_2$$

で identify して作る．すると自然に connected sum $\Sigma_1^n \# \Sigma_2^n$ と disk sums $A_1 \natural A_2$, $B_1 \natural B_2$ が構成できる．作り方から明らかに

$\Sigma_1^n \# \Sigma_2^n$ は homology n-sphere,

$S^{n+1} \# S^{n+1} = S^{n+1}$ (standard $(n+1)$-sphere),

$A_1 \natural A_2$, $B_1 \natural B_2$ はともに contractible でない．

したがって $(S^{n+1}, \Sigma_1^n \# \Sigma_2^n ; A_1 \natural A_2, B_1 \natural B_2)$ は求める embedding である．

津久井康之氏は次のような問題を提出された．これに対する解答は現在のところ(著者には)わからない．

<u>問題 9</u>. homology n-sphere Σ^n の基本群が nontrivial groups の free product に分解できない場合は A, B がともに contractible でないような embedding $(S^{n+1}, \Sigma^n ; A, B)$ は存在しない？

文献

[1] M.L. Curtis, Cartesian products with intervals, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 819-820.

[2] R. Fenn, Embedding polyhedra, Bull. London Math Soc. 2 (1970), 316-318.

[3] M.A. Kervaire, Smooth homology spheres and their fundamental groups, Trans. Amer. Math. Soc. (1969) 67-72.

[4] B. Mazur, A note on some contractible 4-manifolds, Ann. of Math. 73 (1961), 221-228.

[5] J.P. Neuzil, Embedding the dunce hat in E^4 (pre-print).

[6] M. Yamashita, On the product structure of contractible manifolds, Research Rep. of general education c. Toyo Univ. (to appear).

[7] M. Yamashita, (to appear).