

種数 2 の 3 次元多様体についての  
Birman-Hilden の定理の別証

筑波大学

高橋 元男

本稿では、次の定理の証明 (i) のみ) を与える。

定理. (i) 任意の、種数 2 以下の 3 次元可附号閉多様体  $M$  は、 $S^3$  上の絡み目  $L$  を分岐線とする 2 重分岐被覆空間と同相である。

(ii) 特に、 $M$  がホモロジー球面なら、 $L$  は結び目である。  
(もっと一般に、 $M$  の 1 次元ホモロジー群の位数が奇数であることと、 $L$  が結び目であることは同値である。)

(iii)  $M$  (の有限表示、例えば Heegaard diagram) から、 $L$  を作るアルゴリズムが存在する。

(iv)  $M$  が  $S^3$  と同相であるための必要十分条件は、 $L$  が平凡結び目であることである (従って  $M$  が  $S^3$  か否かを判定するアルゴリズムが存在する)。

(v) (Waldhausen の意味で) 同値な Heegaard diagram から作られる  $L$  は同値である。

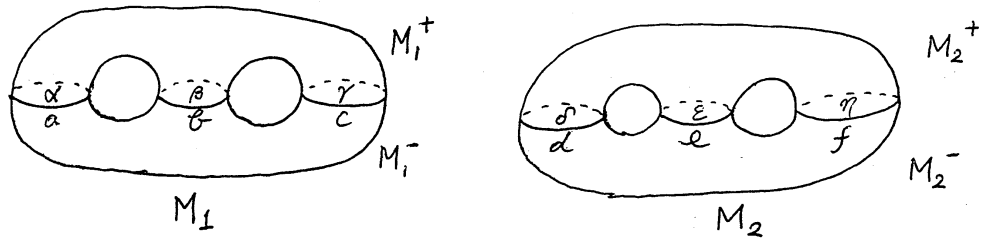
(vi)  $M$  に対し、 $L$  は必ずしも一意的には定まらない。

( $M$  の Heegaard 分解に依存する。)

定理. 種数 2 の Heegaard diagram  $D$  から読み取った 2 つの関係式の一方が  $a^p b^q = 1$  (ないし  $a^p b^q a^r b^s = 1$ ) の場合、この diagram  $D$  を持つ多様体は Poincaré 予想の反例でない。また、2 つの関係式の一方の関係式の長さが 9 以下の場合も同様。

(i) の証明。

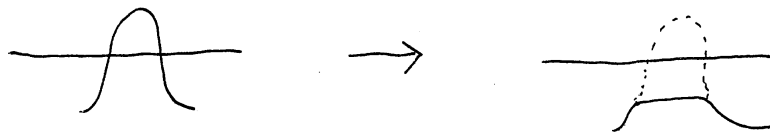
$M$  を種数 2 以下の 3 次元可附号閉多様体とする。 $M$  は種数 2 の Heegaard 分解を持つ。



従って上図の様な 2 つの、種数 2 の *solid torus* の表面を適当に貼り合せて  $M$  が出来ていると考えてよい。

$M_2$  上の loop  $d, e, f$  はこの貼り合せによって  $M_1$  上の loop  $d', e', f'$  に移る。この際、*small isotopy* による変換によって、 $a, b, c$  と  $d', e', f'$  は高々有限個の点において交わり、これらは、各々の交点において、単純に交叉しているものとしてよい。

また、



の様を変形により、左上図のような部分はないものとしてよい。

今、それぞれ  $a, b, c$  を境界とする  $M_1$  の *meridian*

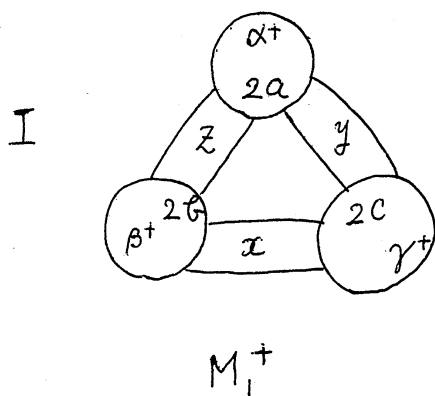
下部

disk  $\alpha, \beta, \gamma$  によって  $M_1$  を2つの部分 (上部  $M_1^+$  と  $M_1^-$ ) に分ける。  $M_1^+$  及び  $M_1^-$  は3-diskである。それらの表面には、 $\alpha, \beta, \gamma$  で切った切口と、それらによって切断された  $d', e', f'$  の部分弧が画かれているものとする。

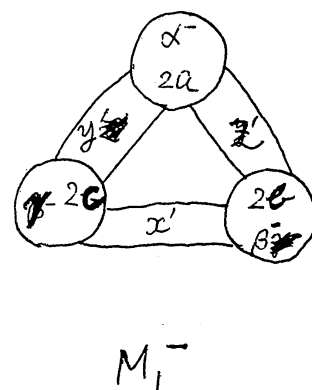
ところで、 $M_1$  上で  $a, b, c$  の各々に  $d', e', f'$  が交わる交点の個数はそれぞれ偶数である。これは、交わり方が単純交叉なので、~~樹~~ 各 loop  $a, b, c$  は交点によって  $M_2^+$  に対応する部分と  $M_2^-$  に対応する部分に交互に分れるからである ( $M_2^+, M_2^-$  は  $M_2$  の上部下部)。

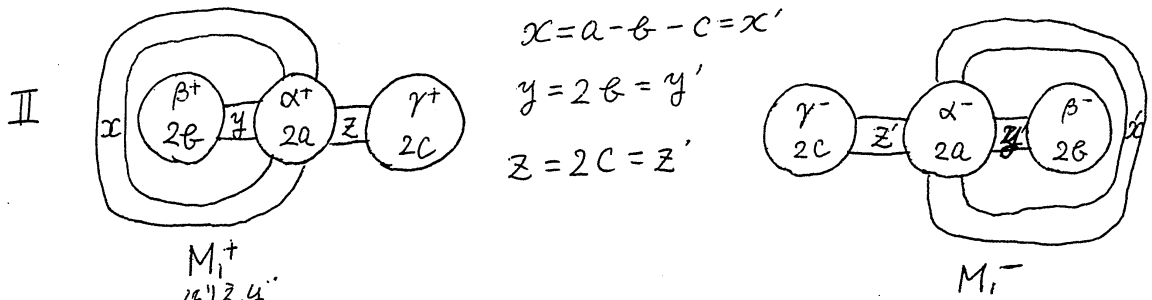
$a, b, c$  の各々に  $d', e', f'$  の交わる点の数をそれぞれ  $2a, 2b, 2c$  とする。

さて、 $M_1^+$  及び  $M_1^-$  の表面に画かれた図形を考えよう。この図形に2種類考えられる。次の図の I と II である。



$$\begin{aligned} x &= b + c - a = x' \\ y &= c + a - b = y' \\ z &= a + b - c = z' \end{aligned}$$





ここで、Iの  $M_1^+$  の  $x$  は  $\beta$  と  $\gamma$  を結ぶ弧の数である。  
 また、例え  $\alpha$  で切った切りの一方を  $\alpha^+$  で他方を  $\alpha^-$  で表わした。

$x, y, z, x', y', z'$  は上記の様  $a, b, c$  で表わす  
 ことが出来、Iの場合も IIの場合も  $x=x', y=y', z=z'$   
 であることがわかる。

注意、 $M_1^+$  が I型で  $M_1^-$  が II型というよう事は考  
 えなくてよい。何故なら、その場合  $x = b + c - a \geq 0$   
 $x' = a - b - c \geq 0$  より  $x = x' = 0$  となってしまうから  
 である。

さて、 $x=x', y=y', z=z'$  であるから、いずれの場  
 合にも  $M_1^+$  上に画かれた図形と  $M_1^-$  上に画かれた図形は  
 同じものと思ってよい。

以下の都合のため、各  $\alpha, \beta, \gamma$  は円であり、交点は円周を  
 等分しているものとする。

合同 変換  $\sigma: M_1^+ \rightarrow M_1^-$  によって  $M_1^+$  上に画かれた図形が、 $M_1^-$   
 上に画かれた図形にうつるものとする。

更に  $M_1^+$  の  $\alpha^+, \beta^+, \gamma^+$  と  $M_1^-$  の  $\alpha^-, \beta^-, \gamma^-$  の対応では合同変換で向きを逆にするものとしてよい。対え

$$\alpha^+ \xrightarrow{\sigma} \alpha^- \xrightarrow{\tau^{-1}} \alpha^+$$

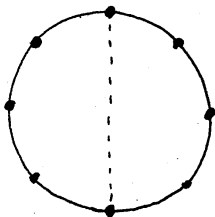
$$\beta^+ \xrightarrow{\sigma} \beta^- \xrightarrow{\tau^{-1}} \beta^+$$

$$\gamma^+ \xrightarrow{\sigma} \gamma^- \xrightarrow{\tau^{-1}} \gamma^+$$

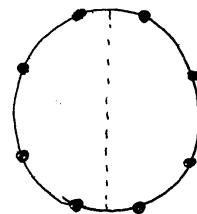
は円  $\alpha^+, \beta^+, \gamma^+$  をそれぞれ自身に移す合同変換でありしかも向きを逆にする。従ってそれは、ある対称軸(円の直径)に属する対称変換になっている。

この対称軸は必ず円周を等分している交点を結ぶ直径であることを示そう。

即ち、(交点の数が偶数であるから)可能性としては、下図の様な二通りの場合が考えられるが、IIは起らないことを示すわけである。

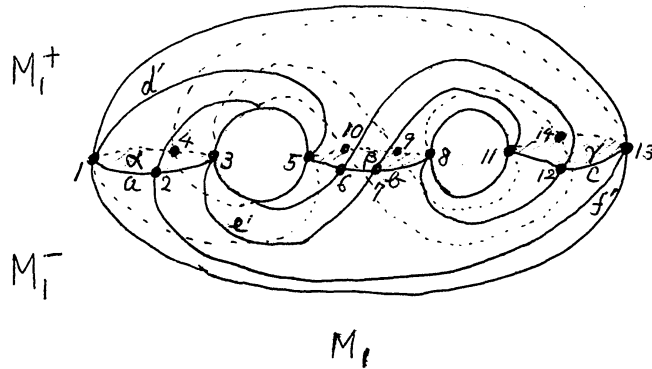


I

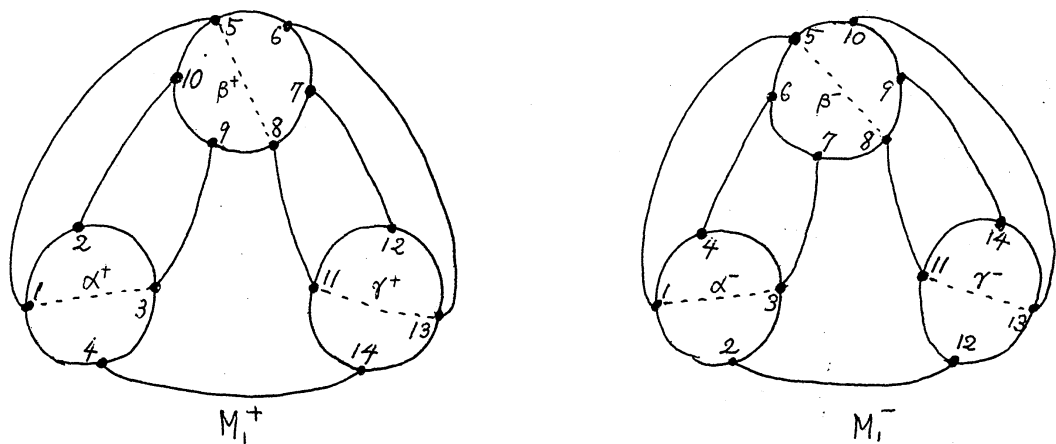


II

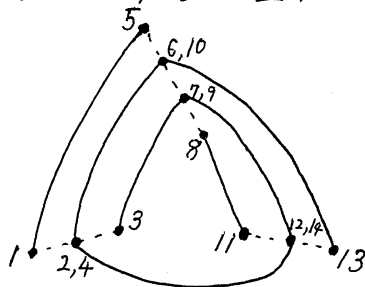
以下、次のような具体例によって考えてみる。



$M_1$  上の loop  $d', e', f'$  が図の様であったとする。  
これを  $\alpha, \beta, \gamma$  で切ると下図の様になる。

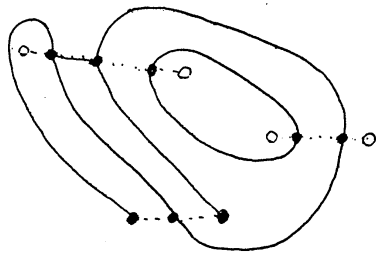


$M_1$  の表面だけ考えると、これは  $S^2$  上の、6点  $1, 3, 5, 8, 11, 13$  を分岐点とする 2重分岐被覆空間である。(下図参照)



この様に、基底空間  $S^2$  上では、3つの loop は、6つの分岐点を結ぶ単純弧になっていることを示そう。そうすれば、対称軸が交点を結ぶ直径であることが言えたことになる。

今、上の事を否定すると、例えば 下図の様に



基底空間  $S^2$  上で、3つの loop は、1つの loop と 1つの単純弧の様になっている。(genus 2 の torus 上で 3つの loop であるから、可能性は 上の場合とこの場合 の 2つしかない。)

もし、この様になっていたとすると、 $S^2$  を 2つの部分に分けるから genus 2 の torus 上でも、この loop 上の 2つの loop によって、2つの部分に分けられていることになる。しかし、最初に戻って、3ページの

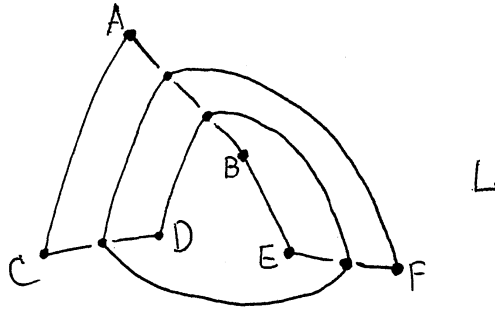
図の  $M_2$  の loop  $d, e, f$  のどの 2つの loop によって  $M_2$  も種数 2 の torus は 2つの部分に分けられない。

これは矛盾であるので、我々の主張は証明された。

従って、いつでも 7ページの一番下の図の様に、<sup>(6つの)</sup> 分岐点は  $\alpha, \beta, \gamma$  で切った時の交点になっている。



さて、7頁の一番下の図から次の様な絡み目(この場合は結び目)を作る。



このようにして作られた絡み目は3橋型、即ち3つの上道と3つの下道からなるものである。

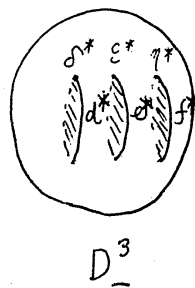
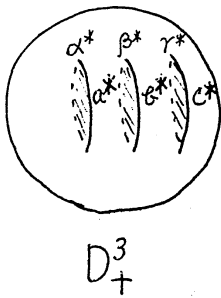
さて、与えられた3次元多様体  $M$  中、こうして作られた絡み目  $L$  を分岐線とする2重分岐被覆空間であることを示す。

このため、3橋型の絡み目を先ず一般的に論ずることにする。3橋型の絡み目  $L$  の図が平面上に上の如く与えられたとすると上道と下道をつなぐ6点  $A, B, C, D, E, F$  のみが、この平面上にあり、上道はこの平面の少し上を図の通りに走り下道は、平面の少し下を走り6点をつなぐような空間曲線を考えると、それが  $L$  を実現したものになる。

今の事は3次元ユークリッド空間内で考えたが  $S^3$  内で考えて言いかえると次の様になる。

$S^3$  はその中にある  $S^2$  によって  $D_+^3$  と  $D_-^3$  の2つの disk に分れるものとし、 $S^2$  上に6点  $A, B, C, D, E, F$

があるものとする。この6点の2つづつを結ぶ<sup>3つの</sup>単純弧<sup>p, q, r</sup>が $D_+^3$ 内に画かれていて、これらは $D_+^3$ の表面 $S^2$ の近くを通り互いに絡み合っているとする。もっと正確にいうと、 $S^2$ 上に6点A, B, C, D, E, Fを結ぶ互いに交わらない3つの単純弧が画かれ、その近くを通過して $D_+^3$ 内に3つの単純弧が画かれているという ことである。 $D_-^3$ 内にも同様に3つの単純弧<sup>s, t, u</sup>があるものとする。これらの合計6つの単純弧を結んだものが3橋型の絡み目<sup>L</sup>ということになる。

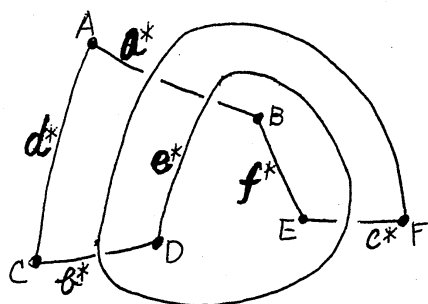


さて、 $L$ を分岐線とする、 $S^3$ 上の2重分岐被覆空間 <sup>$M^*$</sup> の意味は既知とし、 $M^*$ の Heegaard 分解を作る。

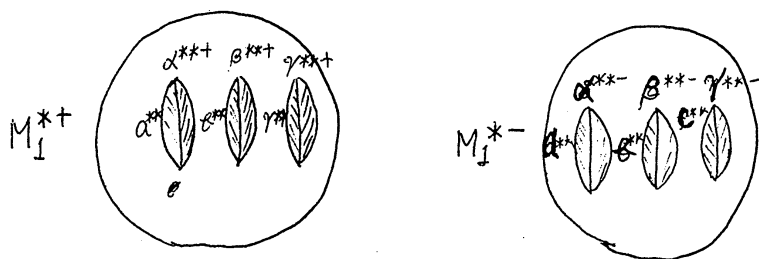
$L$ は、 $p, q, r, s, t, u$ という6つの弧より成り、 $p, q, r$ は $D_+^3$ 内に、 $s, t, u$ は $D_-^3$ 内にあるから、 $M^*$ は、 $D_+^3$  上の  $p, q, r$  を分岐線とする2重分岐被覆空間 <sup>$M_+^*$</sup> と $D_-^3$  上の  $s, t, u$  を分岐線とする2重分岐被覆空間 <sup>$M_-^*$</sup> (共に genus 2 の solid torus)の表面を適当に貼り合せて出来る。これは  $M^*$  の種数

2の Heegaard 分解を与える。しかも、前ページの図の  $a^*, b^*, c^*$  及び  $d^*, e^*, f^*$  は 分岐被覆空間  $M_{\#1}^*$  及び  $M_2^*$  上では、丁度3ページの図の  $a, b, c$  及び  $d, e, f$  に相当する meridian loop になる。これを  $a^{**}, b^{**}, c^{**}, d^{**}, e^{**}, f^{**}$  とする。貼り合せによって  $d^{**}, e^{**}, f^{**}$  に対する  $M_1^*$  上の loop を  $d^{**'}, e^{**'}, f^{**'}$  とする。

例えば、9ページの絡み目で考えると



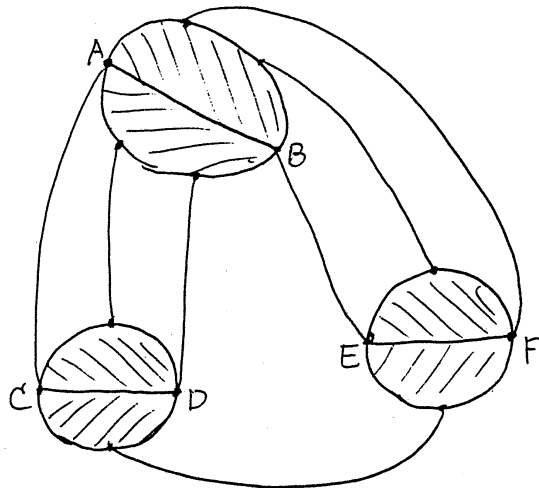
の様になっている。また、前ページの  $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \delta^*, \varepsilon^*, \eta^*$  は分岐被覆空間上では meridian disk  $\alpha^{**}, \beta^{**}, \gamma^{**}, \delta^{**}, \varepsilon^{**}, \eta^{**}$  となる。  $M_1^*$  を  $\alpha^{**}, \beta^{**}, \gamma^{**}$  で切ったとすると(前ページの図参照)、次のようになる。



(斜線は切口を示す。)

この切口は  $M_1^{**+}$  と  $M_1^{**-}$  とで互に対称に対応して

いる。9ページの絡み目の場合は  $M_1^{*+}, M_1^{*-}$  共



の様になる。ところがこれは7ページの真中の図と同じである。これは  $M$  に最初に与えられた Heegaard diagram と  $M^*$  から上の様にして作った Heegaard diagram が同一であることを意味し、従って  $M$  と  $M^*$  は同位相である。(証明終)