数理解析研究所講究録
第 244 巻 1975 年 117-128

Liouville 方程式の初期値問題の近似計算

東大 理　　金田 行雄

§1. 序

乱流理論における興味の中心は，レイノルズ数Rの大きな，強い乱流ではある。しかし，Rの小さい場合，あるいは，R-展開についてさえも解決済みとは言い難い。[1] 又，R-展開が強い乱流に関する何らかを与えないとも限らない。例えば，ある程度肯定的結果が報告されている[2]，Wyld流のくりこみ，あるいはconsolidationの方法はR展開を基に作られる。[3] どのようなconsolidationが有効かを調べるためにも，R-展開をみやすくし，その性質を知ることが必要であろう。

ここでは，Burgersモデル方程式を例にとり，このR-展開を，Liouville 方程式の初期値問題を基として調べ，二，三の近似について，コメントする。（§3は読みとばされても良い）

§2. 外力のない場合

Burgers方程式は，適当な無次元化と，フーリエ成分による表現で，次式のように与えられる。

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} = -p^2 u_p + (-i)R \sum_{q,r}{}' \frac{1}{2} p\, u_q u_r \qquad (1)$$

ここで，p, q, r, は波数，Σ' は $p=q+r$ を満たす q, r の和を示めし，以下，波数の離散的，あるいは連続的表現は，ことわらずに適宜使い分けることにする。　(1) において，

$u_p = e^{-p^2 t} \cdot \omega_p$　と変換すれば (1)は次式となる。

$$\frac{\partial \omega_p}{\partial t} = -\frac{1}{2} i R \sum_{q,r}{}' p\, e^{2qrt} \omega_q \omega_r \qquad (2)$$

この $\underset{\sim}{\omega} \equiv (\cdots, \omega_{-N}, \cdots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_N \cdots)$ の確率分布函数 P に対する，Liouville方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\sum_p \frac{\partial}{\partial \omega_p}(\dot{\omega}_p P) = \tilde{Y}(t) P \qquad (3)$$

ここで　$\tilde{Y}(t) \equiv R \sum_p \sum_{q,r}{}' M(t)\, \partial_p\, \omega_q \omega_r \qquad (4)$

$$M(t) \equiv +\frac{1}{2} i p\, e^{2qrt}, \quad \partial_p \equiv \frac{\partial}{\partial \omega_p} \qquad (5)$$

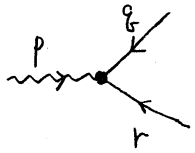
(3)の解は

$$P(t) = \exp\left\{ \int_0^t \tilde{Y}(t')dt' \right\} P(0) \qquad (6)$$

$$= \left[1 + \int_0^t \tilde{Y}(t')dt' + \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\, Y(t_1) Y(t_2) + \cdots \right] P(0) \qquad (7)$$

で与えられる。ここで，$\mathcal{T}$ の ← は時間の順序づけ演算を意味し，$t_1 > t_2 > \cdots$ のとき $Y(t_1)Y(t_2)\cdots$ とする。→ なら逆向き。　図形的に表わすためには，例えば，ω を実線，∂ を波線，M を点に対応させると，(4) は次のように表わせる。

$$R\sum\sum{}' M\,\partial_p\,\omega_q\,\omega_r =$$



$$,\quad -p+q+r=0 \tag{8}$$

例題

例として，初期分布が Gaussian で

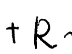
$$P(\underset{\sim}{u},0)\prod d\underset{\sim}{u} = N\prod \exp\left[-\frac{u_k u_{-k}}{\phi_k}\right]\prod d\underset{\sim}{u}_k = P(\underset{\sim}{\omega},0)\prod d\underset{\sim}{\omega}$$

（N は規格化因子）

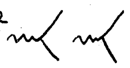
で与えられた時のエネルギー $E_a(t)=\langle u_a(t)\,u_{-a}(t)\rangle$ を考えてみる。(7), (8) から

$$E_a(t) = e^{-2a^2t}\langle \omega_a(t)\,\omega_{-a}(t)\rangle = e^{-2a^2t}\int\prod d\underset{\sim}{\omega}\;\omega_a\omega_{-a}P(\underset{\sim}{\omega},t)$$

$$= e^{-2a^2t}\int\prod d\underset{\sim}{\omega}\;\omega_a\omega_{-a}\Big[1 + R$$



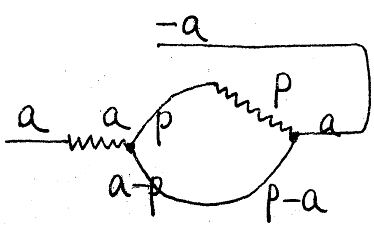
$$+\,R^2$$



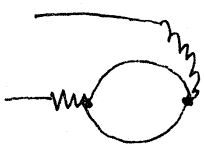
$$+\cdots\Big]\,P(0)$$

となる。ただし，ここで時間積分，波数などの記号は省略した。これから，たとえば $O(R^2)$ への寄与は

$$R^2 e^{-2a^2t}\Big[\,8$$



$$+\;4$$



$$\Big] \tag{9}$$

で表現できることがわかる。ここで q 〰 r は $\langle u_q \partial_r \rangle_0 = -\delta_{q,r}$ ，q —— r は $\langle u_q u_r \rangle = \delta_{q+r}\phi_q$ ，$\langle\ \ \rangle_0$ は $t=0$ における平均を意味する。$\langle \partial u \rangle = 0$ に注意。

たとえば (9) の前者を数式で表現すると次のようになる。

$$R^2 e^{-2a^2t} \cdot 8 \sum_p \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \left(+\frac{ia}{2}\right) e^{\alpha_1 t_1} \left(+\frac{ip}{2}\right) e^{\alpha_2 t_2}\ \phi(a-p)\,\phi(a)\cdot(-1)^2$$

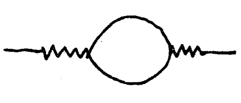
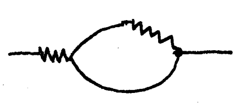
ただし，$\alpha_1 = p(a-p)$，$\alpha_2 = a(p-a)$

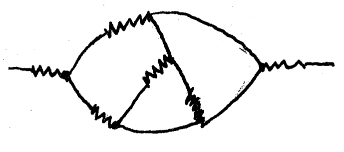
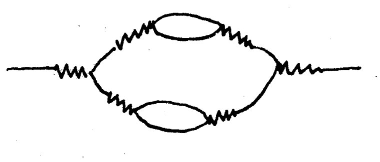
R の高次では，種々の図形が現われる。まず $t_1, t_2, \cdots, t_n$ の時間積分を実行すると，それらは次の型の寄与を与えることがわかる。（ひとつひとつの図形について）

$$e^{-2a^2t} \sum_k e^{2a^2t-\beta_k t} \left\{ \sum_{q_1}\sum_{q_2}\cdots\sum_{q_n} \Phi(q_1, q_2, \cdots, q_n) \exp\left[\left(-\sum^n \gamma_i q_i^2\right)t\right] \right\}$$

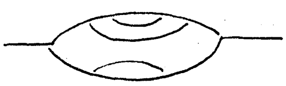
ここで，$\gamma_i = 0$ 又は 1，β_k は適当な定数。これから $t \to \infty$ においては，$\{\ \ \}$ による特異性が無視できるという仮定のもとで，これらのエネルギーへの寄与は，主要には $\{t$ の代数函数$\} \times \exp\{-(\min \beta_k)t\}$ となることがわかる。

いくつかの図形について $-\min\beta_k$ を示めす。

 $\to -a^2$  $\to -\frac{3}{2}a^2$

 $\to -\frac{a^2}{2}$  $\to -\frac{a^2}{2}$

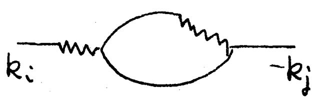
 の型の $O(k^{2m})$ の項 $\rightarrow -a^2$ (10)

 〃 $\rightarrow -\frac{2a^2}{m+1}$ (11)

ただし、ここで 〰— は —〰 あるいは 〰⌒ のことと了解されたい。又、(10), (11) では 〰 印を省略した。

一般的に、{ } に関する、同じ仮定のもとに、$O(k^{2m})$ の項は、$t\rightarrow\infty$ で $O(k^{2m}e^{-\frac{2a^2t}{m+1}})$ となることがわかる。

なお、等方性、Navier-Stokes、非圧縮乱流では、図形の対応は $\overset{k_i\quad q_j}{\overline{\qquad\quad}} = D_{ij}(\vec{k})\,\Phi(k)\,\delta_{\vec{k}+\vec{q}}$，〰— $=0$，$\overset{k_i\quad q_j}{—〰}$ $= -D_{ij}(\vec{k})\,\delta_{\vec{k}-\vec{q}}$，$D_{ij}(\vec{k}) \equiv \delta_{ij} - k_ik_j/k^2$，$k=|\vec{k}|$ となり、たとえば

 $= -\frac{2}{3}D_{ij}(\vec{k})\times$ [Burgers eq. と同じ意味の ]

となる。

又、Burgersモデルで vertex のくりこみをするとその vertex の波数展開の一次の項はあり得ないのに対し、N−Sでは、あり得ることを附記しておく。

§3 外力のある場合

$t\rightarrow\infty$，あるいは定常での状態を問題とするには、外力が必要である。(1)式に外力の項 f_p を付加すると次式のようになる。

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} = -p^2 u_p - iR \sum{}' p u_q u_r + f_p$$

今、Edwards[4]に従って f_p が Gaussian の偶然外力であって、その相関が次のように与えられる特別の場合を考える。

$$\langle f_p(t) f_{p'}(t') \rangle = h_p \delta(p+p')\delta(t-t') \qquad (12)$$

(h_p は定数)

この時、$\underset{\sim}{u}$ の確率分布函数 P についての Liouville 方程式は

$$\frac{\partial P}{\partial t} = (V + D + Y) P = (X + Y) P \qquad (13)$$

ここで

$$V = \sum_p \frac{\partial}{\partial u_p} p^2 u_p \quad , \quad D = \sum_p h_p \frac{\partial}{\partial u_p}\frac{\partial}{\partial u_{-p}}$$

$$Y = +R \sum_p \sum_{qr}{}' \left(+\frac{ip}{2}\right) \frac{\partial}{\partial u_p} u_q u_r \quad , \quad X = V + D$$

となる。これは、いわば、無限次元の Fokker-Planck 方程式である。　(12) は強い制限ではある。現実的には、f は (1) 境界条件による制限を受け、(2) 速度場 $\underset{\sim}{u}$ に依存し、(3) 履歴効果もあるであろう。（(2) の要因を取り入れるのが最も困難と思われる。）　ここでは、"思考実験としてあり得る" (12) を考える。

さて (13) の解は

$$P = e^{(X+Y)t} P(0), \qquad P(0) \text{ は初期分布.}$$

$$= \exp\left\{ \int_0^t Z(t')dt' \right\} e^{Xt} P(0)$$

ここで $\quad Z(t) \equiv e^{tX} Y e^{-tX} = \left(\sum \frac{t^n}{n!} Y_n\right).$

$$Y_n \equiv [X[X[\cdots[X[X,Y]\underbrace{]\cdots]]}_{n]} \quad , \quad [X,Y] = XY - YX$$

で与えられる。$Z(t)$ は $[\partial_p, u_q] = \partial_p u_q - u_q \partial_p = \delta_{p.q}$ を使い，具体的に表現できる。

$$Y_n = \sum_p \sum_{qr}{}' \left[\alpha_n \partial_p u_q u_r + \beta_n \partial_p \partial_{-q} u_r + \gamma_n \partial_p \partial_{-r} u_r + \delta_n \partial_p \partial_{-q} \partial_{-r}\right] R$$

として．
$$\alpha_{n+1} = (-p^2 + q^2 + r^2)\alpha_n$$
$$\beta_{n+1} = (-p^2 - q^2 + r^2)\beta_n + 2h(q)\alpha_n$$
$$\gamma_{n+1} = (-p^2 + q^2 - r^2)\gamma_n + 2h(r)\alpha_n$$
$$\delta_{n+1} = (-p^2 - q^2 - r^2)\delta_n + 2(h(r)\beta_n + h(q)\gamma_n)$$

ただし $h(0)=0$ とした．

より

$$2Z(t) = R\sum\sum\left[M_u(t)\partial_p u_q u_r + A(t)\partial_p \partial_{-q} u_r + B(t)\partial_p \partial_{-r} u_q + C(t)\partial_p \partial_q \partial_{-r}\right]$$

ここで $\quad M_u(t) \equiv +ip\, e^{-2qrt}$

$A(t) \equiv h(q)[e^{-2qrt}(1 - e^{-2q^2t})]/q^2, \quad B(t) = (A \text{ で } p \leftrightarrow q)$

$\dot{C}(t) = -(p^2 + q^2 + r^2)C(t) + 2(h(r)A(t) + h(q)B(t)), \quad C(0) = 0.$

又，$e^{Xt}P(0)$ も具体的に表現できる。[5]

§2に類似の，図形による表現ができることは，いうまでもない。 ただし，ここでは p —— q は $\delta_{p+q}\,\phi(q)e^{-2q^2t}$ に対応させるなどの違いはある。

なお，Rの2次以上で，みかけ上発散が起こる。(計算に間違いがなければ!?)。 これは，あくまで，みかけ上のことで，実際は各次数でcancelするものと予想される。

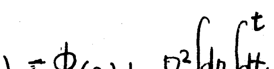
§4 二，三の近似について

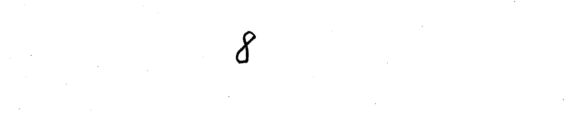
この節では，二，三の，興味あると思われる近似について若干のコメントをしたい。

(A) くりこみ。consolidation

場の理論や，物性論における"くりこみ"に似たものである。 順序としては，いきなり非線型の近似式にしないで，まず，線型近似の，性質を調べるのも，妥当であろう。

(1) 線型近似，はしご近似など

たとえば  のような，はしご段型の図形だけを，全部加えたもの $\Phi(a,t)\equiv$ は次のように表わせる。

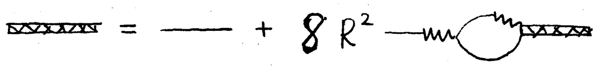
 (14)

即ち，

$$\Phi(a,t)=\phi(a)+R^2\int dp\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\,(ia)(-ia)\,e^{\alpha_1t_1+\alpha_2t_2}\phi(a-p)\Phi(a,t_2)$$

ただし，$\alpha_1=\alpha_2=2p(a-p)$

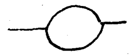
又，たとえば  の型のみを加えると

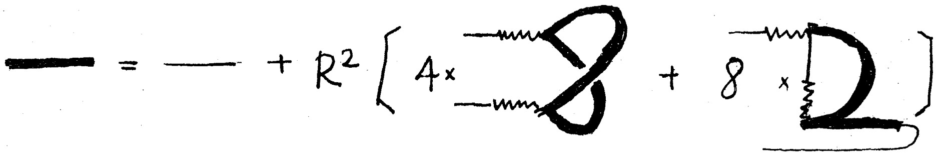


(15)

となる。(10)，(11) をみると，(14) のほうが，少なくとも，(15) より，$t\to\infty$ では良い近似を与えそうである。

(2) 高次のくりこみ。

非線型を厭わなければ，更にたくさんの図形を，取り入れることができる。ここでは，一例を示す。既約な骨格として  型だけに注目して，更に，その一部だけを，取り込んだのが次式である。



即ち，

$$\Phi(a,t)=\phi(a)+R^2\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\int dp\Big[a^2 e^{\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2}\Phi(a,t_1)\Phi(a-p,t_2)$$

$$+2a(p-a)e^{\alpha_3 t_1+\alpha_4 t_2}\Phi(p,t_2)\Phi(a,t_2)\Big]$$

ここで $\alpha_1=\alpha_2=2p(a-p)$，$\alpha_3=p(a-p)$，$\alpha_4=a(p-a)$ [6]

これは，いわゆる，0-4次 Cumulant 近似と同じ式である。 型の全部を，取り入れてはいないこと，時間因子の入り方が問題であること，に注意されたい。

$O(R^2)$ までは正確である。

(B) その他

R-展開の収束半径の有無，pade 近似にも興味がもたれる。なお，§3の定常問題のR展開で $O(R^2)$ までとって，pade 近似と一種のくりこみを併用すると，Edwards と良く似た結果がでる，(k^{-5}も)。ことを附記しておく。（[4] の記号で $q_k=(h_k+S_k)/(\nu k^2+R_k)$ として $O(R^2)$ まで同一になるように，$S \leftrightarrow$ ，$R \leftrightarrow$ に対応させる。）

§2，§3 の方法は Hopf 方程式や，Novikov[7] 方程式にも同様に適用できる。特性汎函数 $P(\xi)$ のR-展開から，その Cumulant $\Phi(\xi)\equiv \ln P(\xi)$ を近似する方法も考えられる。

以上（A)(B) の方法は，勿論，それ自体では，なんら正当性を主張しうるものではない。ただ，多くの近似が，図形的には，何らかの意味で 型で解釈される[8]のは，おもしろい。

§5．比較，その他

(1)，§2，§3 の方法は他の方法（(E) Edwards[4]，(W) Wyld[3]，(D) Deissler[9]）に比べて，若干の利点がある。まず，「初期値問題を具体的に計算するのに簡単か？」という点で，

(E),(W) よりも良い，と思われる。(W) は初期に正規分布でないと，特に，まずいと思われる。$\vec{u}$ については重ね合わせがきかない。それに反して，$P(\underline{u})$ については重ね合わせがきくことに注意されたい。 又，(D) では図形表現による，簡単化，外力のある場合の定式化がなされていない，という点で，§2，§3 の方法は (D) より良いと思われる。 欠点としては，§3 で少なくともみかけ上の，発散を招いていること，時間因子の対称化がされていないこと，が挙げられる。

(2) ここでの問題は，量子論での散乱問題や，物性論における有限温度の問題と類似の一面をもつ。しかし，類似は完全ではない。詳細は省略する。 不変性，対称性等の要求を最大限，利用することも必要であろう。[1]

(3) 最後に，ここでの Burgers モデルは，一般的な非線型，開放，不可逆系の一つの典型的な，「純数学的モデル」としての位置づけもあり得ることを，附記しておきたい。(その意味では，一般的に使える，近似技術の開発も望まれる。) 決定論的 "力" と確率論的 "力" の素性や，決定系における "でたらめ" のおいたち，などに興味がもたれる。

Reference

[1] Ohji,M. 数理研講究録 185 ,p112 (1973)

R.H.Kraichnan, Symp.Dynamics of Fluids and Plasmas. Acad.Press, 239 (1967)

[2] J.B.Morton and S.Corrsin, J.Stat.Phys.2 153 (1970)

[3] H.W.Wyld, Jr.Ann.Phys. (N.Y.) 14, 143 (1961)

[4] S.F.Edwards, J.F.M. 18, 239 (1964)

[5] Ming Chen Wang and G.E.Uhlenbeck Noise and Stochastic Processes,ed.by N.Wax,Dover Publications, 113 (1954)

[6] T.Tatsumi and S.Kida, 数理研講究録 185, 79, (1973)

[7] K.Yamamoto,T.Nakamura and I.Hosokawa, 数理研講究録 171, 8, (1973)

[8] R.Phythian, J.Phys. A2,181 (1969)

P.C.Martin,E.D.Siggia and H.A.Rose, Phys.Rev. A8,423 (1973)

D.C.Leslie, Developements in the theory of turbulence. Clarendon Press, (1973)

[9] R.G.Deissler, Phys.Fluids, 1,111, (1958)

R.G.Deissler, Phys.Fluids, 3,176, (1960)