数理解析研究所講究録
第245巻 1975年 31-52

多様体上の力学系

名大 教養 白岩謙一
池上宜弘

§1. Morse Smaleの力学系まで

微分可能な力学系の理論は、1960年代にS. Smaleによって確立された。彼の初期の仕事の中で最も重要な[45], [46]を中心として、この仕事に到るまでの歴史を概観しよう。

Mをコンパクトで境界を持たないn次元C^∞多様体とする。(以下このようなものを単に多様体という。) Mの上のC^r級ベクトル場(C^r級力学系ともいう。) XはMの上の流れ$\{\phi_t\}$ $t\in\mathbb{R}$をひき起こす。($r\geq 1$)。

$\gamma\subset M$をXの特異点または周期軌道とする。そして

$$W^s(\gamma)=\{x\in M;\ \lim_{t\to\infty}\phi_t(x)=\gamma\},\quad W^u(\gamma)=\{x\in M;\ \lim_{t\to-\infty}\phi_t(x)=\gamma\}$$

とおき、これらをγの<u>安定</u>および<u>不安定多様体</u>という。γが基本特異点や基本周期軌道のとき、$W^s(\gamma)$, $W^u(\gamma)$はMの1-1 immersed submanifoldとなる。

Mの上のベクトル場Xが<u>Morse Smale</u>であることは、次の5つの条件が成立することである。

(MS) (1) 特異点は有限個であって，これらはすべて基本的である。これらを $\beta_1, \cdots, \beta_k$ とする。(2) 周期軌道は有限個であって，これらはすべて基本的である。これらを $\beta_{k+1}, \cdots, \beta_m$ とする。(3) Mの任意の点 y に対して，その α 極限集合 $\alpha(y)$ および ω 極限集合 $\omega(y)$ は $\bigcup_{i=1}^{m} \beta_i$ に含まれる。(4) $i, j = 1, \cdots, m$ として $W^s(\beta_i)$ と $W^u(\beta_j)$ は横断的に交わる。(5) 周期軌道 β_i $(i = k+1, \cdots, m)$ に対して，$\alpha(y) = \omega(y) = \beta_i$ となるようなMの点 y は存在しない。

いま $a_q = \#\{\beta_i ; 1 \leqq i \leqq k, \dim W^s(\beta_i) = q\}$，$b_q = \#\{\beta_i ; k+1 \leqq i \leqq m, \dim W^s(\beta_i) = q+1\}$ とし $M_q = a_q + b_q + b_{q+1}$ とおく。そして $B_q = \dim_{\mathbb{Z}_2} H^q(M; \mathbb{Z}_2)$ とすると次の不等式および等式が成立する。

$$\sum_{i=0}^{q} (-1)^i M_{q-i} \geqq \sum_{i=0}^{q} (-1)^i B_{q-i}, \quad q = 0, 1, \cdots, n.$$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i M_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i B_i$$

これらの不等式および等式をMorse Smaleの不等式という。これがSmale [45] の主定理である。この定理に関して重要なことを4つあげよう。(i) 1937年 Andronov Pontrjagin [I] は物理学や工学などで用いられる方程式が近似的にしか定まらないにもかかわらず有効に用いられることからこのような方程式は係数の微小な変化によって，軌道の大域的な状態が位相的に変化しないようなものでなければならないとして構造安定性の概念を定義した。これを最近の用語を用いて表わすと次のようになる。

多様体 M, M' の上の C^r 級ベクトル場 X, X' が位相的に同値であることは，適当な同相写像 $h: M \to M'$ があって，h は X の軌道を X' の軌道の上へ向きを保ちながら写像するときをいう。

M の上の C^r 級ベクトル場全体の集合 $\mathfrak{X}^r(M)$ は，Banach 空間となる。そこで $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ が構造安定であるとは，適当な X の近傍 $\mathcal{N} \subset \mathfrak{X}^r(M)$ があって，$Y \in \mathcal{N}$ はすべて X と位相的に同値となるときをいう。

Andronov Pontrjagin [1] は，2次元閉円板の上の解析的な力学系について，それが構造安定となるための必要十分条件がその軌道の状態によって決定されることを示した。

その後 de Baggis [8], Markus [18], Peixoto [30] らによって，構造安定性の理論が発展してきたが，1962年 Peixoto は [31] において，2次元多様体の上の構造安定な力学系について次のような決定的な結果を得た。

定理　$\dim M = 2$ とする

(a) M 上の C^r 級力学系が構造安定となるための必要十分条件は，これが Andronov Pontrjagin の条件をみたすことである。

(b) M 上の構造安定な C^r 級力学系全体の集合 $\mathcal{S}^r(M)$ は $\mathfrak{X}^r(M)$ の中で open dense である。　以上の背景のもとで，Smale は Andronov Pontrjagin の条件を一般次元に拡張し Morse Smale の力学系として定式化したのである。そして Peixoto の定理と同様な

ことが成立するのではないかと予想した。

(ii) Morse Smale の力学系に関する Morse Smale 不等式は，H. Poincaré に始まり，H. Hopf [11]，M. Morse [19]，Él'sgol'c [7] と続く"多様体 M 上の力学系 X と M の位相的不変量の間の関係"を研究するという「解析学における定性的理論」における最も重要な結果の1つである。

(iii) この論文において安定多様体の理論が最も重要な役割の1つを果たしているが，これは Liapunov，Poincaré に始まる特異点や周期軌道の安定性の理論をさらに発展させたものである。

(iv) この論文において Smale は C^r 級ベクトル場による力学系だけでなく，C^r 級微分同相写像によって定義される離散力学系について Morse Smale の力学系を定義し，同様な結果が成立することを示した。

次に 1963 年，Smale の発表した論文 [46] は，大きく分けて，次の4つの内容を持つ。(i) Poincaré Bendixson の理論に用いられる局所断面の理論を一般化し，n 次元多様体 M の上の C^r 級ベクトル場 X の <u>断面</u> Σ（これは M の $(n-1)$ 次元部分多様体である）と <u>Poincaré 変換</u> と呼ばれる C^r 級微分同相写像 $f:\Sigma\to\Sigma$ を定義した。そして C^r 級微分同相写像によって定義される離散力学系と断面をもつ C^r 級ベクトル場によって定義される連続力学系の間の関係が <u>懸垂</u> という方法によって表わされることを明確化した。

(ii) C^r 級微分同相写像の双曲型不動点や双曲型周期点の安定

多様体の理論を展開し，懸垂の方法を用いてベクトル場の基本特異点、や基本周期軌道の安定多様体の理論との関連を調べた．

(iii) Thomの横断性定理[53]を用いて，Kupka Smaleの近似定理を証明した．一般にopen dense setの可算個の共通部分をBaire集合という．$\mathfrak{X}^r(M)$のBaire集合で成立する性質を生成的な性質という．そこで

定理（G. Kupka [15]）次の性質は生成的である．

(a) 特異点や周期軌道はすべて基本的である。

(b) 基本特異点や基本周期軌道の安定多様体と不安定多様体は互に横断的に交わる．

(iv) 上の定理と同様な定理が C^r 級微分同相写像の場合にも成立することを証明した。

Kupka Smaleの近似定理の性質(a),(b)に，さらに次の(c)をつけ加えたものがMorse Smaleの力学系である。

(c) 非遊走集合は有限個の特異点と有限個の周期軌道からなる．

§2. Anosov力学系

Hamilton力学系の研究において，等エネルギー曲面上の流れの研究の重要性は古くから知られていたが，これはRiemann空間の測地流の研究と結びつくことがわかっている。

1939年G. Hedlund [9], E. Hopf [11]は，コンパクトな負定曲率空間の測地流がエルゴード的であることを示したが，1962年Anosov[2]

はこれをコンパクトな負曲率空間の測地流が構造安定でかつエルゴード的であることを示した。このとき，Anosov力学系が定式化された。

Riemann多様体M上の力学系Xが<u>Anosov</u>であることは次の3つの条件が成立することである。

(A) (1) Mの接ベクトル束$T(M)$が$\{\phi_t\}$不変な3つの部分ベクトル束のWhitney和となる。すなわち

$$T(M) = E^0 \oplus E^s \oplus E^u$$

であって，$T\phi_t(E^0) = E^0$, $T\phi_t(E^s) = E^s$, $T\phi_t(E^u) = E^u$が成立する。

(2) E^0はベクトル場Xで生成される一次元空間である。

(3) 適当な正数c, αが存在して，任意の$t \geqq 0$に対して

$$\|T\phi_t(v)\| \leqq ce^{-\alpha t}\|v\|,\ v \in E^s, \quad \|T\phi_{-t}(v)\| \leqq ce^{-\alpha t}\|v\|,\ v \in E^u$$

が成立する。

Anosovはコンパクトな負曲率空間の測地流がAnosov力学系であること，およびAnosov力学系が構造安定であること，Anosov力学系に対して不変測度が存在するとき，これがエルゴード的であること，周期軌道がdenseに存在することなどを示した。そして1967年の[3]ではこれらの結果が離散力学系でも成立することを示した。

Anosovはこれらの定理をAnosov foliationと呼ばれる構造を用いて証明したが，これについてはJ. Moserの別証[20]がある。このMoserの方法はRobbin[34]，Robinson[35]らに多くの影響を与えた。

Anosov力学系のその後の主要問題や結果については白岩[36]を

参照されたい。

§3. Axiom A の定式化まで

Poincaré, Birkhoff は制限3体問題において，曲面の微分同相写像の *homoclinic point* の存在がいろいろな困難をひき起こすことを述べているが，1965年 Smale は [47] において，*homoclinic* point の近傍での状態が Hadamard, Morse らの Symbolic dynamics を用いて記述できることを発見した。

また 1966年 Smale は，$\dim M \geqq 3$ なら構造安定な力学系全体の集合 $\mathcal{S}^r(M)$ が $\mathcal{X}^r(M)$ の中で dense でないことを発見した。この頃から彼は離散力学系の方へ重点を移してきた。そこでこれからは微分同相写像によって定まる離散力学系に重点を置いて考察しよう。

微分同相写像 $f: M \to M$ が与えられたとき，f 不変な M の閉集合 Λ が<u>双曲型集合</u>であることは，次の2つの条件が成立するときをいう。

(1) M の接ベクトル束を Λ へ制限したベクトル束 $T_\Lambda(M)$ が Tf 不変な2つの部分ベクトル束 E^s, E^u の Whitney 和となる。すなわち

$T_\Lambda(M) = E^s \oplus E^u$, $Tf(E^s) = E^s$, $Tf(E^s) = E^u$.

(2) M の適当な Riemann 計量があって，適当な $c > 0$, $0 < \lambda < 1$ をとるとすべての $n \geqq 0$ に対して，次の式が成立する。

$$\| Tf^n(v) \| \leqq c\lambda^n \| v \|, \qquad v \in E^s$$

$$\| Tf^{-n}(v) \| \leqq c\lambda^n \| v \|, \qquad v \in E^u$$

この概念を用いると，$f: M \to M$ が <u>Anosov</u> とは M が双曲型集合である

ということである。またΩをfの非遊走集合とすると，Ωはf不変な閉集合となる。そしてfがMorse SmaleであるとはΩが有限集合，かつ双曲型集合であって横断性条件をみたすということになる。

そこで，Axiom Aとは次のようなものである。

Axiom A (a) Ωは双曲型集合である。

(b) Ωの中で周期点全体の集合は稠密である。

Morse SmaleはAxiom Aをみたすことはすぐわかるが，Anosov力学系もAxiom Aをみたすことが知られている。そして1965年の仕事の拡張である馬蹄形力学系もAxiom Aをみたし，Morse SmaleやAnosovとは全く異なる新しい力学系であることが知られている。

1967年SmaleはDifferentiable Dynamical Systemsという論文をBull. A.M.S.に発表し，今までのこの分野で行なわれた仕事と，Axiom Aをみたす力学系に関する重要な結果などをまとめて報告した。これが微分可能な力学系という新分野の確立を告げる光輝かしい業績である。

§4. Axiom Aと安定性

初期のSmale，Anosovの仕事以後の微分可能力学系の研究の主な流れをみていく。力学系として，最初は勿論主として連続力学系が考えられていたが，後には離散力学系が主に考えられるようになった。

$\mathcal{D}^r(M)$をM上のC^r級微分同相写像全体にC^r位相を入れた空間とする。$\mathcal{D}^r(M)$は$1 \leqq r < \infty$のとき，Banach多様体，$\mathcal{D}^\infty(M)$はFréchet多様体である。以後$\mathcal{D}^r(M)$，$\mathcal{X}^r(M)$について一度に話を進める場合は，これを

$\mathrm{Dyn}^r(M)$で表わす。

1967年頃におけるSmaleの目的は次のようであった[49]. $\mathrm{Dyn}(M)$において. 軌道構造をある意味で保つような同値関係E($\sim_E$で示す)を入れる事. $f\in\mathrm{Dyn}(M)$が<u>E-安定</u>であるとは, $\mathrm{Dyn}(M)$におけるfの近傍Nが存在して任意の$g\in N$に対して$f\sim_E g$であることである。次に$\mathrm{Dyn}(M)$にopen dense set Uを探して, Uに含まれる元をnumericalでalgebraicな不変量で類別できるようにすること. またE-安定な元はopen setを作るが, これが$\mathrm{Dyn}(M)$の中でdenseであるようなEをみつけたいというのが目的であった。1966年の論文で, すでにSmaleは構造安定な力学系は一般にdenseでない事を示していたが, [48]またΩ-安定等には希望が持てた。1969年Smaleは次のことを提唱している。即ち$\mathrm{Dyn}(M)$の中に適当なopen setの列. $U_1\subset U_2\subset\cdots\subset U_k$で次の条件を持つものを探すこと。

(i) U_iはopen又は少くともあるopen setのBaire subsetであること,

(ii) iが小さくなる程U_iに含まれる力学系は詳しく構造が分るようなものであること.

2つの微分同相写像f, gが位相共役($\sim$)であるとは同相写像$h: M\to M$が存在して, $hf=gh$が成立することである。$\sim$による安定性を<u>構造安定</u>という。$f, g\in\mathrm{Dyn}(M)$が<u>Ω-同値</u>($\sim_\Omega$)であるとはfの非遊走集合$\Omega(f)$から$\Omega(g)$の上への同相写像hが存在して, hが軌道とその方向を保つこと. $\sim_\Omega$による安定性を<u>Ω-安定</u>という。

以下 Axiom A と安定性の関係を中心に研究の結果をみていく。

スペクトル分解定理 [49, 33]. 力学系が Axiom A をみたせば次の意味で一意的な分解 $\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$ が存在する。(i) $\forall \Omega_i$ は閉不変集合. (ii) $\Omega_i \cap \Omega_j = \phi$ $(i \neq j)$, (iii) Ω_i は topologically transitive ($i.e\ \exists x \in \Omega_i$, x の軌道は Ω_i で dense).

特に (i), (ii) をみたす分解を Ω 一分解という。力学系が Ω-分解をもつとき, $W^s(\Omega_i) = \{x \in M \mid \omega(x) \subset \Omega_i\}$, $W^u(\Omega_i) = \{x \in M \mid \alpha(x) \subset \Omega_i\}$ を各々 Ω_i の安定集合 不安定集合という。

定理 [49, 33]. 力学系が Ω-分解 $\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$ を持つとき, M は次の直和分割であらわされる。

$W^s(\Omega_1) \cup \cdots \cup W^s(\Omega_k) = M = W^u(\Omega_1) \cup \cdots \cup W^u(\Omega_k)$. Ω-分解 $\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$ において, $(W^u(\Omega_i) - \Omega_i) \cap (W^s(\Omega_j) - \Omega_j) \neq \phi$ のとき, $\Omega_j < \Omega_i$ と定義する。そして $\Omega_{i_0} < \Omega_{i_1} < \cdots < \Omega_{i_\ell} = \Omega_{i_0}$, $\ell \geq 1$ なる $(\Omega_{i_0}, \ldots, \Omega_{i_\ell})$ を cycle という。Ω-分解, cycle の概念は Ω 以外の不変集合, 例えば α-極限集合 $L^-(f) = Cl\{x \in M \mid \exists y \in M\ \ x \in \alpha(y)\}$ や ω-極限集合 $L^+(f)$ にも同様に定義されて上の定理と同様なことが成立する [22].

Ω 一安定性定理 [51, 33]. Axiom A をみたし cycle を持たない力学系は $Dyn^r(M)$, $r \geq 1$ に於て Ω-安定である。

この結果により Smale は "$f \in D^r(M)$ が Ω-安定であるための必要十分条件は Axiom A をみたし cycle を持たないことである" という予想をした。

これに関してPalisの次の結果がある。

定理[27]. fがAxiom Aをみたし$\mathcal{D}^r(M)$, $r \geqq 1$でΩ-安定ならばfはcycleを持たない。

Ω-安定な力学系は一般にはdenseでない事が知られている。(例えば[21])(non-densityに関しては[13]も参考にされたい。)

Ω-安定性定理の証明から出てきた概念に次のfiltrationがある。$f \in \mathcal{D}^r(M)$ $(r \geqq 0)$の filtrationとは境界を持つ多様体の列 $M = M_k \supset M_{k-1} \supset \cdots \supset M_1 \supset M_0 = \phi$で$f(M_i) \subset \mathrm{Int}\, M_i$, $\mathrm{Int}\, M_i \supset M_{i-1}$をみたすものである。$C^0$位相で$f$に近い$g$は同じfiltrationを持つ。$K_i = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i - \mathrm{Int}\, M_{i-1})$は$M_i - M_{i-1}$に含まれる最大の不変集合である。特に$K_i = \Omega \cap (M_i - M_{i-1})$となるとき，このfiltrationは fineであるという。

命題[38]. $f \in \mathcal{D}^r(M)$がfine filtrationを持つための必要十分条件はfがcycleのないΩ-分解を持つことである。

"Ω-安定"より弱い条件である"Ω-爆発を持たない"という考え方が[27]の頃から問題になった。$f \in \mathcal{D}^r(M)$がC^r Ω爆発を持たないとは任意の開近傍$U(\Omega(f))$に対してfの近傍$N(f) \subset \mathcal{D}^r(M)$が存在して，任意の$g \in N(f)$に対して$\Omega(g) \subset U(\Omega(f))$であることである。$f$のfiltrationの列$\{M = M^\alpha_{k_\alpha} \supset M^\alpha_{k_\alpha - 1} \supset \cdots \supset M^\alpha_1\}_{\alpha = 1, \ldots, n}$が fine sequence of filtrationsであるとは (i) $\forall i \; \exists j$ $M^\alpha_i - M^\alpha_{i-1} \subset M^{\alpha-1}_j \subset M^{\alpha-1}_{j-1}$, ii) $\bigcap_{\alpha > 0} K^\alpha = \Omega$, (但し$K^\alpha = \bigcup_i K^\alpha_i$, K^α_iは上のK_iと同様なもの),

をみたすことである。

<u>定理</u>（Shub-Smale [39]）. $f \in \mathcal{D}^0(M)$ が C^0 Ω-爆発を持たないための必要十分条件は f が fine sequence of filtration を持つことである。

<u>予想</u>（Shub-Smale [39]）. 微分同相写像の fine sequence of filtration の存在性は生成的か？（fine filtration を持つものは $\mathcal{D}(S^2)$ で dense でないことが知られている）　　これに関して次の定理がある

<u>定理</u>（Palis-Shub-Sullivan [28]）. $\dim M \neq 4$ とする。このとき $\mathcal{D}^0(M)$ の中で fine sequence of filtration を持つもの（従って C^0 Ω-爆発を持たないもの）は生成的に存在する。

次に構造安定性についてみていく。d を M の距離とする。$f \in \mathcal{D}(M)$ に対して $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$ となる x, y は s 同値であるという。x を含む s <u>同値類</u>（$W^s(x)$ を x の安定集合という。これは流れにも同様に定義される。不安定集合 $W^u(x)$ も同様に定義する。$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$ をスペクトル分解とすれば $W^s(\Omega_i) = \bigcup_{x \in \Omega_i} W^s(x)$ である。W^u についても同様である。$f \in \mathcal{D}^r(M)$ が Axiom A をみたせば，$\forall x \in M$ に対して，$W^s(x)$，$W^u(x)$ は 1-1 immersed disk である [10]。

Axiom A をみたす $f \in \mathcal{D}(M)$ が <u>強横断性</u>（ST）をみたすとは，任意の $x \in M$ に対して，$W^s(x)$ と $W^u(x)$ が横断的に交わることである。

Peixoto [31] の結果に関連して Smale は構造安定な力学系は一般には dense でないことを示した [48]．又 Axiom A と ST をみたす力学系は open であることもわかった [25, 23]．closing lemma（Pugh [32]）により

Axiom A (b) は $Dyn^1(M)$ において生成的である。又 Newhouse [21] により Axiom A (a) は $\mathcal{D}^r(M)$, $r \geqq 2$ において一般的には生成的でない。

Palis-Smale は Morse-Smale 力学系が構造安定であることを示して [29], $f \in \mathcal{D}^r(M)$ が構造安定であるための必要十分条件は f が Axiom A と ST をみたすことであるという予想をした。これに関して次の定理がある。

<u>定理</u> (Robbin[34], Robinson [35]) C^2 級力学系が Axiom A と ST をみたせば これは $Dyn^1(M)$ の中で構造安定である。

<u>定理</u> (Shub [37]) $f \in \mathcal{D}^r(M)$ は $\mathcal{D}^r(M)$ において構造安定な g に isotopic である。しかも g は C^0 位相で f にいくらでも近くとれる。即ち C^r 構造安定なものは C^0 位相で dense に存在する。$(1 \leqq r \leqq \infty)$.

<u>§5 最近の動向</u>

(A) 単に $Dyn^r(M)$ のある部分集合が open か dense か等を論ずるより もっと詳しい $Dyn(M)$ の位相的性質を研究する傾向が最近現われた。

<u>定理</u> (Smale [52]) $f \in \mathcal{D}^r(M)$ は Axiom A と no-cycle condition をみたす g (即ち g は Ω-安定) に isotopic である。(i. e. f から g への道が $\mathcal{D}^r(M)$ に存在する) この頃以来 isotopy を扱う結果が多くなった。

又 (Shub-Sullivan [40] により $f \in \mathcal{D}^r(M)$ が Morse-Smale 微分同相写像に isotopic であるための条件が求められている。

$\mathcal{S}^r(M) \subset Dyn^r(M)$ を構造安定な力学系の集合とするとき, $Dyn^r(M) - \mathcal{S}^r(M)$ を <u>bifurcation set</u> という。Thom の Catastorophe の研究の影響もあって, 最近は積極的に安定でない部分, 即ち bifurcation set へ 目を向

ける傾向が出て来た。これは今後期待できる方向と思われる。Sotomayor は [43] で簡単に記述できる bifurcation で同時に bifurcation set の dense なものを探すことを提唱している。これに関する研究としては [42], [43], [44], [24], [25], [26], [23] 等がある。又川上氏の仕事 [14] も興味深い。次の Newhouse Palis の結果は特にきれいである。$\Phi^{k,r}(M)$ を $I=[0,1]$ から $\mathfrak{X}^r(M)$ への C^k 級の道の作る集合に C^k 位相を入れた空間とする。$\xi\in\Phi^{k,r}(M)$ が <u>simple</u> であるとは次のような $\Phi^{r,k}$ における ξ の近傍 N が存在することである。$\eta_1, \eta_2\in N$ に対し $\#B(\eta_1)=\#B(\eta_2)<\infty$.（但し $B(\eta)=\eta^{-1}(\mathfrak{X}^r(M)-\mathcal{S}^r(M))$、$\#$ は点の個数）。$X, Y\in\mathfrak{X}^r(M)$ が <u>Simply related</u> であるとは $\xi(0)=X$, $\xi(1)=Y$ となる simple asc ξ が存在することである。

<u>定理</u>（Newhouse-Palis [26]）. 任意の2つの Morse Smale の流れは simply related である。

<u>定理</u>（Newhouse [23]）. $\dim M=3$ ならば Axiom A と ST をみたす任意の2つの MΣ の流れは simply related である。

(B). Sinai は [41] で Anosov 微分同相写像が Markov partition をもつことを証明した。これはその後 Bowen [5] によって Axiom A をみたす力学系に対して拡張された。即ち $f:M\to M$ が Axiom A をみたす微分同相写像とし、Ω をその<u>非遊走集合</u>とする。いま Ω のスペクトル分解を $\Omega=\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_k$ とする。

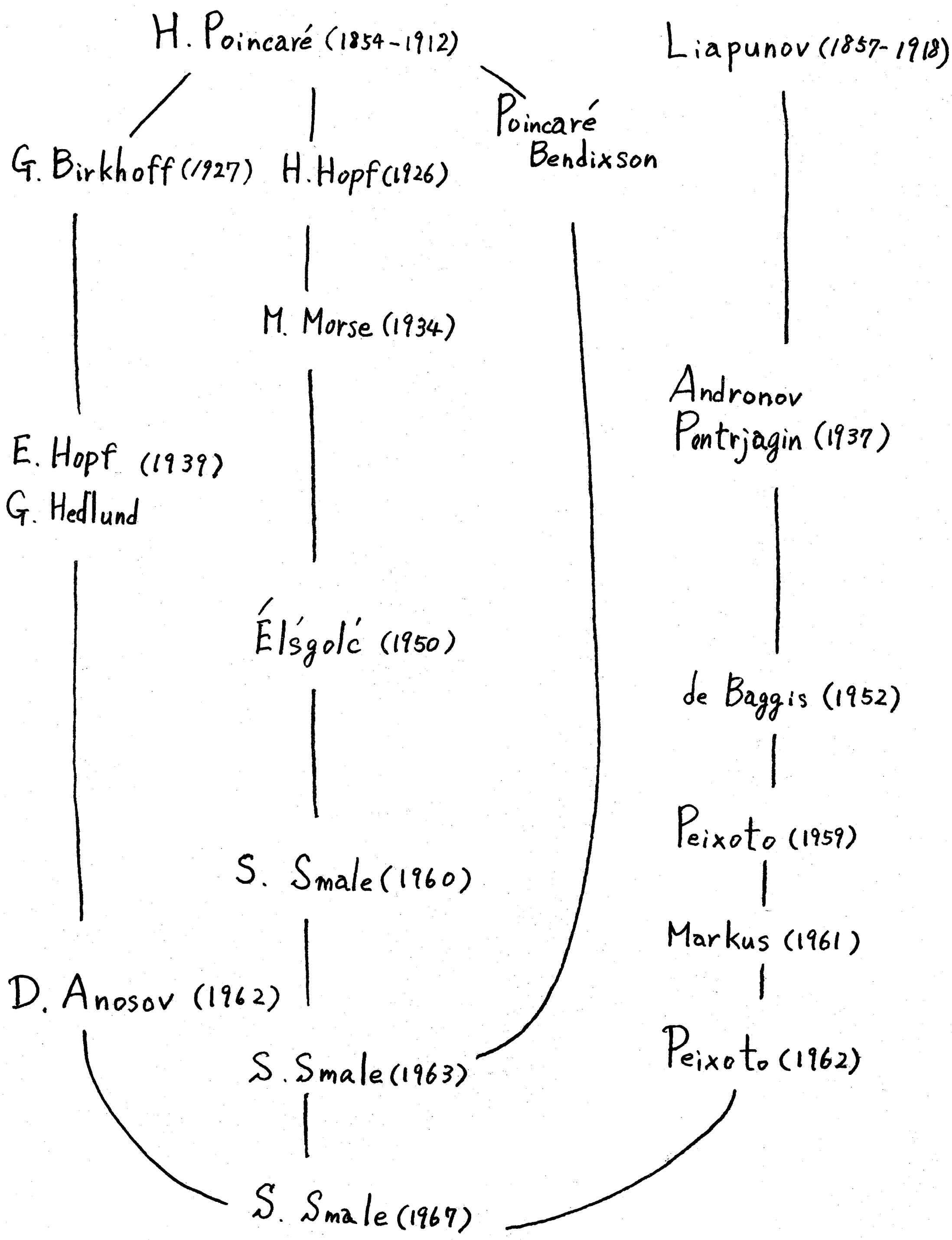
<u>定理</u> [5]. $f|\Omega_i:\Omega_i\to\Omega_i$ は Markov partition を持つ.

定理[5]. $f|\Omega_i$ はfinite typeのsubshiftのquotientである。

この定理はAxiom Aをみたす力学系の研究に大きな手段を提供する。例えばAxiom Aをみたす微分同相写像のzeta関数が有理関数であるというManningの定理[16]やinfranil manifold上のAnosov力学系は今まで知られているものに限るというManningの定理[17]の証明にも用いられた。

またfinite typeのsubshiftの位相共役による分類に関してはWilliamsの仕事[54]が重要である。

またAxiom Aをみたす微分同相写像のtopological entropyに関してBowenの仕事[4], [6]は興味深い。


H. Poincaré (1854-1912)
Liapunov (1857-1918)
G. Birkhoff (1927)
H. Hopf (1926)
Poincaré
Bendixson
M. Morse (1934)
Andronov
Pontrjagin (1937)
E. Hopf (1939)
G. Hedlund
Élsgolć (1950)
de Baggis (1952)
Peixoto (1959)
S. Smale (1960)
Markus (1961)
D. Anosov (1962)
S. Smale (1963)
Peixoto (1962)
S. Smale (1967)

文 献

[1] Andronov-Pontrjagin : Systèmes Grossiers, Dokl. Akad. Nauk, 14 (1937), 247-250

[2] D. Anosov : Roughness of geodesic flows on compact Riemann-ian manifolds of nagative curvature, Dokl. Akad. Nauk, 145 (1962) 707-709

[3] D. Anosov : Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature, Proc. Steklov Inst. Math. 90 (1967), 1-235

[4] R. Bowen : Topological entropy and Axiom A, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970), 23-42

[5] R. Bowen : Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms, Amer. J. Math. 92 (1970), 725-747

[6] R. Bowen : Entropy versus homology for certain diffeomorphisms, Topology 13 (1974), 61-67

[7] Élsgolć : An estimate for the number of Singular points of a dynamical system defined on a manifold, Math. Sb. 26 (68) (1950), 215-223

[8] de Baggis : Dynamical systems with stable structures Contributions to the theory of non-linear equations II (1952) 37-59

[9] G. Hedlund : The dynamics of geodesic flows, Bull. A.M.S. 45 (1939), 241–246

[10] M. Hirsch - C. Pugh : Stable manifolds and hyperbolic Sets, Proc. Symp. Pure Math. 14. A.M.S. (1970), 133–165

[11] E. Hopf : Statistik der geodetischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmerung, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leibzig 91 (1939) 261–304

[12] H. Hopf : Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigk-eiten, Math. Ann. 96 (1926), 225–250

[13] 池上宜弘 : 力学系における Stability と Genericity について, 数理解析研究所講究録 173 (1973)

[14] 川上博 : ある電気回路の力学系

[15] I. Kupka : Contribution á la théorié des champ génériques, Contributions to Differential Equations 2 (1963) 457–484, 3 (1964) 411–420

[16] A. Manning : Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions, Bull. London Math. Soc. 3, (1971) 215–220

[17] A. Manning : There are no new Anosov diffeomorphisms on tori, to appear

[18] L. Markus : Structurally stable differential systems, Ann. Math. 73 (1961), 1–17.

[19] M. Morse : The calculus of variations in the large, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. No. 18 (1934)

[20] J. Moser : On a theorem of D. Anosov, Jour. of Diff. Eq. 5 (1969), 411-440

[21] S. Newhouse : Non-density of Axiom A(a) on S^2, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970). 191-202

[22] S. Newhouse : Hyperbolic limit sets, Trans. AMS. 167 (1972), 125-150.

[23] S. Newhouse : On simple arcs between structurally stable flows, to appear.

[24] S. Newhouse and J. Palis : Bifurcations of Morse - Smale dynamical systems, International Conf. on Dynamical Systems, Salvadon (1973).

[25] S. Newhouse and J. Palis : Cycles and bifurcation theory, to appear.

[26] S. Newhouse and J. Palis : There is a simple arc joining any two Morse - Smale flows, to appear.

[27] J. Palis : A note on Ω - stability, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970), 221-222.

[28] J. Palis M. Shub and D. Sullivan : Genericity theorems in topological dynamics, to appear.

[29] J. Palis and S. Smale : Structural stability theorems, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970). 223-232.

[30] M. Peixoto : On Structural stability, Ann. Math. 69 (1959), 199-222.

[31] M. Peixoto : Structural stability on two-dimensinal manifolds, Topology 1 (1962), 101-120

[32] C. Pugh : The closing lemma, Amer. J. Math. 89 (1967), 957-1009.

[33] C. Pugh and M. Shub : The Ω-stability theorem for flows, Invent. Math. 11 (1970), 150-158.

[34] J. Robbin : A Structural stability theorem, Ann. of Math. 94 (1971), 447-493.

[35] C. Robinson : Structural stability of vector fields. Ann. of Math. 99 (1974), 154-175.

[36] 白岩謙一 : Anosov 微分同相写像について. 数学 26 (1974), 97-108

[37] M. Shub. : Structurally stable diffeomorphisms are dense, Bull. AMS 78 (1972), 817-818.

[38] M. Shub : Stability and genericity for diffeomorphisms, International Conf. on Dynamical Systems, Salvador (1973), 493-514.

[39] M. Shub and S. Smale : Beyond hyperblicity. Ann. of Math. (1972), 587-591.

[40] M. Shub. and D. Sullivan : Homology theory and dynamical systems, to appear.

[41] Ja. Sinai : Markov partitions and C-diffeomorphisms, Functional Analysis and its Applications 2 (1968), 61–82

[42] J. Sotomayor : Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds, Bull. A.M.S. 74 (1968), 722–726.

[43] J. Sotomayor : Generic bifurcations of dynamical systems, Int. Conf. on Dynamical Systems, Salvador (1973) 561–582.

[44] J. Sotomayor : Structural stability and bifurcation theory, Int. Conf. Salvador (1973) 549–560

[45] S. Smale. : Morse inequalities for a dynamical systems, Bull. A.M.S. 66 (1960), 43–49

[46] S. Smale : Stable manifolds for differential equations, Ann. Scuola Normale 18 (1963), 97 ~ 116

[47] S. Smale : Diffeomorphisms with many periodic points, Diff. and Comb. Topology, Princeton Univ. Press. (1965), 63–80.

[48] S. Smale : Structurally stable systems are not dense, Amer. J. Math. 88 (1966). 491–116

[49] S. Smale : Differentiable dynamical systems, Bull. A.M.S. 73 (1967), 747–817

[50] S. Smale : Stability and genericity in dynamical systems, Séminaire Bourbaki 22e 1969/70. n° 374

[51] S. Smale : The Ω-stability theorem. Proc. Symp. Pure Math. 14 A.M.S. (1970), 289-298

[52] S. Smale : Stability and isotopy in discrete dynamical systems, Proc. Salbador. Symposium (1973), 529-530

[53] R. Thom : Quelque propriete globales des variétés differentiables, Commentarii Math. Helvet. 28 (1954), 17-86.

[54] R. Williams : Classification of subshifts of finite type, Ann. of Math. 98 (1973), 120-153.