数理解析研究所講究録
第 245 巻 1975 年 117-126

Equicontinuous Flow と Distal Flow との関連について

神戸大 教養部
江川治朗

§1. はじめに

コンパクトな minimal set に対しては，種々の概念があるが，これ等が同型写像によって不変な概念であるかどうかを確かめることは重要であるように思われる。ここでは，それぞれの軌道を保存するような相空間の間の位相写像が存在するとき，2つの力学系は同型であるということにする（[10]の意味で NS-同型）。よく知られたように equicontinuity とか distallity（[5]，[6]）等は parameter を変えない同型写像（[10] の意味で GH(0)-同型）では　　　不変であるが，上記の同型写像では不変な概念ではない。本講演では，上の2つの概念の関係について述べる。

§2. 記号，その他

πを相空間X上の力学系とする。すなわち，Xは位相空間でπは$X \times R$（Rは実数）からXの上への連続写像で，つぎの条件(1)，(2)を満たす。

(1) $\pi(x, 0) = x$, $x \in X$,

(2) $\pi(x, t+s) = \pi(\pi(x, t), s)$, $x \in X$, $t, s \in R$.

これから考える相空間は<u>コンパクトな距離空間で</u>，<u>πは特異点を持たないものとする</u>。$x \in X$を通る軌道を$C_\pi(x)$と記す。M ($\neq \phi, M \subset X$) は任意の$x \in M$に対して$\overline{C_\pi(x)} = M$が成り立つとき，minimal set であるといわれる。

$\boxed{定義\ 1}$. π : <u>minimal flow (M-flow)</u>

$\Leftrightarrow$ Xがπの minimal set.

$\boxed{定義\ 2}$. π : <u>equicontinuous flow (E-flow)</u>

$\Leftrightarrow$ $\{\pi_t\}_{t \in R}$ が equicontinuous な位相写像の族をなす。

こゝで，π_tは$\pi_t(x) = \pi(x, t)$ ($x \in X$) で定義されるXからXへの写像を示し，これはよく知られているように位相写像になる。上のことは，πが uniformly Liapunov stable であることと同値である。すなわち，

$$^\forall \varepsilon > 0,\ ^\exists \delta > 0\ ;\ d_X(x, y) < \delta,\ t \in R \Rightarrow d_X(\pi(x, t), \pi(y, t)) < \varepsilon$$

が成り立つ。

$\boxed{定義\ 3}$. ([5]). π ; <u>distal flow (D-flow)</u>

$$\Leftrightarrow\ ^\forall x, y \in X\ (x \neq y),\ \inf_{t \in R} \{d_X(\pi(x, t), \pi(y, t))\} > 0 .$$

$\boxed{\text{定義 4}}$. π, ρ を相空間 X, Y 上の力学系とする。このとき，位相同型写像 $h: X \to Y$ は任意の $x \in X$ に対して $h(C_\pi(x)) = C_\rho(h(x))$ が成り立つとき，π から ρ への同型写像といわれる。

$\boxed{\text{命題 1}}$ ([2],[10]). π, ρ を X, Y 上の力学系，h を π から ρ への同型写像とするとき，つぎの条件を満たす連続写像 $\varphi: X \times R \to R$ が存在する。

(1) $\varphi_x(t) = \varphi(x, t)$ で定義される R から R への写像は $\varphi_x(0) = 0$ を満たす位相写像である。

(2) $\forall (x, t) \in X \times R$, $h(\pi(x,t)) = \rho(h(x), \varphi(x,t))$.

$\boxed{\text{系 1-1}}$ ([2], [10]). 命題1における φ はつぎの性質(A)を持つ。

(A) $\forall x \in X$, $\forall t, s \in R$, $\varphi(x, t+s) = \varphi(\pi(x,t), s) + \varphi(x,t)$.

命題1で存在が保証される φ を h から誘導された reparametrization という。

$\boxed{\text{注意 1}}$. 定義4における同型写像は [10] では，NS－同型写像と呼ばれる。又 h と h より誘導される reparametrization φ との pair (h, φ) は GH(3)－同型と呼ばれる。さらに，$\varphi(x,t) = t$ ($x \in X$, $t \in R$) のとき GH(0)-, $\varphi(x,t) = ct$ ($c \neq 0$, $x \in X$, $t \in R$) のとき GH(1)－同型と呼ばれる。

よく知られているように，equicontinuity は同型写像で不

変な概念ではない。これに注意して，つぎのような概念が A.A. Markov によって導入された（[9]）。

$\boxed{\text{定義 5}}$. π : <u>harmonizable flow（H-flow）</u>

$\Leftrightarrow$ π はある equicontinuous flow と同型.

$\boxed{\text{注意 2}}$. M-flow かつ E-flow（D-flow, H-flow）のとき，ME-flow（MD-flow, MH-flow）とかくことにする。

§3. D-flow について

D-flow に関する若干の性質を列挙しておく。

$\boxed{\text{命題 2}}$. E-flow は D-flow である。

$\boxed{\text{注意 3}}$. ME-flow でないMD-flow の存在は3次元トーラス上で知られている（[3]）。又一般に有限次元の manifold 上の ME-flow は T^n 上の ME-flow と同型であるが，T^n 上の flow に同型でないMD-flow の存在は知られている（[6]）。

$\boxed{\text{命題 3}}$（[5]）. つぎの (1)，(2) は同値である。

(1) π は D-flow

(2) $\pi^*((x,y),t) = (\pi(x,t), \pi(y,t))$ $(x, y \in X,\ t \in R)$ で定義される $X \times X$ 上の力学系は，つぎの性質を持つ。

$\forall (x,y) \in X \times X$, $\overline{C_{\pi^*}((x,y))}$ は minimal set.

$\boxed{\text{系 3-1}}$ π が D-flow ならば，$\forall x \in X$, $\overline{C_\pi(x)}$ は minimal set である。

$\boxed{\text{注意 4}}$ 系3-1の結論を満たすflowは他にもある。chaacteristic 0 のflow[1]はその例である。

$\boxed{\text{命題 4}}$ ([7]). π をMD-flowとする。このとき、E-flow ρ (相空間 Y とする) と $h(\pi(x,t)) = \rho(h(x), t)$ $(x \in X,\ t \in R)$ を満たす<u>連続写像</u> $h: X \to Y$ が存在する。

$\boxed{\text{注意 5}}$. [7]ではMD-flowの構造がもっと詳しく調べられている。

§4. E-flowに対する*reparametrization*

$\boxed{\text{定理 1}}$. π, ρ を X, Y 上のE-flowとする。$h: \pi \to \rho$ が同型写像であるとき、h から誘導されるreparametrization φ は $X \times R$ で一様連続である。

$\boxed{\text{定理 2}}$. π, ρ を X, Y 上の力学系で $h: \pi \to \rho$ を同型写像とする。このとき、π がE-flowで h から誘導されるreparametrization φ が $X \times R$ 上で一様連続であるならば、ρ もE-flowである。

定理1の仮定はつぎのように弱めることができる。

$\boxed{\text{定理 3}}$. π, ρ を X, Y 上のE-flowとする。h は X から Y への<u>連続写像</u>で、φ は命題1の条件を満たす。このとき、φ は $X \times R$ 上で一様連続である。

又定理1から、つぎの系を得る。

系 1-1. 定理1において, X, Y が連結ならば, 任意の $(x,t)\in X\times R$ に対して $h'(\pi(x,t)) = P(h'(x), ct)$ を満たす位相写像 $h' : X\to Y$ と定数 $c\,(\neq 0)$ が存在する。
([10] のことばを使うと, NS-同型 $\Rightarrow$ GH(1)-同型).

注意 6. 定理3における pair (h, φ) は [8] では GH(3) homomorphism と呼ばれる。

§5. E-flow, D-flow, H-flow の関係について.

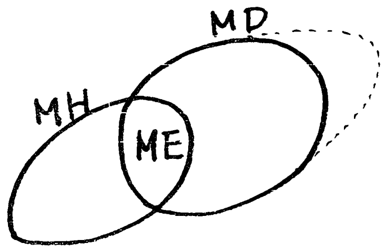
命題4, 定理2, 3からつぎの定理がただちに得られる。

定理 4 π を M-flow とする。π が E-flow でない D-flow ならば, π は H-flow でない。

定理4を言い換えると,

系 4-1. π が E-flow でない H-flow ならば, π は D-flow でない。

上の関係を図示すると, つぎのようになる。



§6. 例

微分方程式 (C^0, Lipschitz) で定義される T^2 (2次元トーラス)

上のM-flowはMH-flowである。したがって，T^2上のM-flowに対しては E-flowとD-flowは同じ概念になる([3]，[4]参照)。一般に$T^n(n \geqq 3)$では上の事実は成り立たない。そのため，つぎのようなskew product(加藤：予稿集参照)を考察する。

πをX上のE-flow，φを$X \times R$からRへの連続写像で系1-1の条件(A)を満たすとする。$S^1 = \{\zeta = e^{2\pi i \theta} \mid 0 \leq \theta < 1\}$とする。$X \times S^1$上のflow ρを

$$\rho((x,\zeta),t) = (\pi(x,t), \zeta e^{2\pi i \varphi(x,t)}),\quad (x,\zeta) \in X \times S^1,\ t \in R$$

で定義する。このρに対して，つぎの定理が成り立つ。

$\boxed{定理\ 5}$ ρはD-flowである。

$\boxed{定理\ 6}$ ρがE-flowであるための必要十分条件はφが$X \times R$で一様連続であることである。さらに，Xが連結で，ρがE-flowならば，ある定数cが存在して，ρはつぎの力学系ρ'に同型である。

$$\rho'((x,\zeta),t) = (\pi(x,t), \zeta e^{2\pi i c t}),\quad (x,\zeta) \in X \times S^1,$$

$t \in R$。ここで $c = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t}\varphi(x,t)$ として求まる。

$\boxed{定理\ 7}$ ρがE-flowでないならば，ρはMD-flowである。したがってMH-flowではない。

一般に$T^n\ (n \geqq 3)$上でMH-flowでないMD-flowが存在する。

$\boxed{例\ 1}$. つぎのT^n上の微分方程式(E)を考える。

$$
(\mathrm{E}) \quad \begin{cases} x_1' = 1 \\ x_2' = \phi_1(x_1) \\ \vdots \\ x_n' = \phi_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}). \end{cases}
$$

こゝで，ϕ_i $(i=1, 2, \cdots, n-1)$ は連続で $\phi_i(x_1+m_1, \cdots, x_i+m_i) = \phi_i(x_1, \cdots\cdots, x_i)$ $(m_1, \cdots, m_i \in \mathbb{Z}$：整数$)$．もし (E) で定義される flow ρ が E-flow ならば，定理 6 を繰返し使うことにより，つぎの (E′) で定義される力学系 ρ' に同型である。

$$
(\mathrm{E}') \quad \begin{cases} x_1' = 1 \\ x_2' = \alpha_1 \\ \vdots \\ x_n' = \alpha_{n-1} \end{cases}
$$

こゝで $\alpha_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \phi_i(\rho_{i-1}(x_1, \cdots x_{i-1}), s)\, ds$。

$\boxed{\text{例 2}}$ 例 1 において，つぎの (E″) で定義される力学系を ρ'' とする。

$$
(\mathrm{E}'') \quad \begin{cases} x_1' = 1 \\ x_2' = \phi_1(x_1) \\ \vdots \\ x_{n-1}' = \phi_{n-2}(x_1, \cdots, x_{n-2}) \end{cases}
$$

もし ρ'' が ME-flow, ρ が E-flow でなければ, ρ は MH-flow でない MD-flow である。

$\boxed{\text{例 3}}$ 例2において $\phi_{n-1}(x_1, \cdots x_{n-1}) > 0$ と仮定する。このとき, つぎの (E''') で定義される力学系を ρ''' とする。

$$
(E''') \quad \begin{cases}
x_1' = \dfrac{1}{\phi_{n-1}(x_1, \cdots x_{n-1})} \\
x_2' = \dfrac{\phi_1(x_1)}{\phi_{n-1}(x_1, \cdots x_{n-1})} \\
\vdots \\
x_{n-1}' = \dfrac{\phi_{n-2}(x_1, \cdots x_{n-2})}{\phi_{n-1}(x_1, \cdots x_{n-1})} \\
x_n' = 1
\end{cases}
$$

このとき, ρ''' は MH-でも MD-flow でもない M-flow である。

$\boxed{\text{注意 7}}$ 上の例で考察した微分方程式は [3] で議論されている。[3] では例1の (E) において, ある実数の pair $(r_1, \cdots, r_n)$ が存在して, つぎの $(\bar{E})$ の定める力学系が MD-flow になることが示されている。

$$
(\bar{E}) \quad \begin{cases}
x_1' = 1 + r_1 \\
\vdots \\
x_n' = \phi_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) + r_n
\end{cases}
$$

REFERENCES

[1] S.Ahamad, Dynamical Systems of Characteristic 0^+, Pacific. J. Math., 32 (1970), 561-574.

[2] M.Bebutov et V.V.Stepanov, Sur la measure invariante dans les systèmes dynamiques qui ne different qui par le temps, Mat. Sbornik (1949), 143-166.

[3] I.U.Bronstein, A contribution to the theory of distal minimal sets and distal functions, Soviet Math. Dokl., 8 (1967), 59-61.

[4] J.Egawa, Isomorphisms and Local Dynamical Systems Admitting Invariant Positive Measures (to appear).

[5] R.Ellis, Distal Transformation Groups, Pacific J. Math., 8 (1958), 401-405.

[6] R.Ellis, Lectures on Topological Dynamics, W.A. Benjamin, 1969.

[7] H.Furstenberg, The structure of distal flows, Amer. J. Math., 85 (1963), 477-515.

[8] I.Kimura, Categories of Local Dynamical Systems, Funkcial. Ekvac., 16 (1973), 29-52.

[9] V.V.Nemytskii and V.V.Stepanov, Qualitative Theory of Differential Equations, Princeton Univ. Press, Princeton.

[10] T.Ura, Isomorphism and Local Characterization of Local Dynamical Systems, Funkcial Ekvac., 12 (1969), 99-122.