数理解析研究所講究録
第 246 巻 1975 年 39-50

Free $\mathbb{Z}_m$-actions on homotopy spheres

東工大 理　　北田泰彦

§.0. Introduction

いかなる homotopy sphere Σ が free $\mathbb{Z}_m$-action を許すかという問題についての解決を与える。$\mathbb{C}^{n+1}$ の単位球面 S^{2n+1} 上に $\mathbb{Z}_m$-action : $(z_0, z_1, \cdots, z_n) \mapsto (\alpha z_0, \alpha^{p_1} z_1, \cdots, \alpha^{p_n} z_n)$ (但し $\alpha = \exp(2\pi i/m)$) を考えその商空間を $L^{2n+1}(m; p_1, \cdots, p_n)$ で表わすことにする。各 p_i が m と互に素であるときこの商空間は lens space と呼ばれる。2つの lens spaces $L^{2n+1}(m; p_1, \cdots, p_n)$ と $L^{2n+1}(m; q_1, \cdots, q_n)$ は $p_1 \cdots p_n \equiv q_1 \cdots q_n \pmod{m}$ の成り立つとき homotopy 同値であることが知れている。一方、homotopy sphere Σ^{2n+1} が free $\mathbb{Z}_m$-action をもったとき、その商空間 $\Sigma^{2n+1}/\mathbb{Z}_m$ はある lens space $L^{2n+1}(m; p_1, \cdots, p_n)$ に homotopy 同値となることが知れている。従って、いま $L_p^{2n+1} = L^{2n+1}(m; p, 1, \cdots, 1)$ という記号を用いると、適当

なpに対し、$\Sigma^{2n+1}/\mathbb{Z}_m \simeq L_p^{2n+1}$（homotopy 同値）となる。このような時、この free $\mathbb{Z}_m$-action on Σ を type p の action と呼ぶことにする。我々の目標は homotopy sphere Σ が type p の free $\mathbb{Z}_m$-action をもつための必要十分条件を与えることである。これまでに知られていた結果は次のとおりである：

i) $m=2$ (free involution) の場合は必要十分条件が Lopez de Medrano [3] (p.67) に与えられている。その証明は Browder の Kervaire invariant に関する結果 [1] によっているが、この方法は m が 8 の倍数である時には使えないことがわかる。従って m が一般の時には全く別な手段を用いねばならない。

ii) $m=r^k$ (r: odd prime) の場合、任意の $\Sigma^{2n-1} \in bP_{2n}$（すなわち、parallelizable manifold を bound する homotopy sphere）は free $\mathbb{Z}_m$-action を許すということが Orlik [5] によって示された。彼はその例を具体的に Brieskorn sphere を用いて与えた。彼は同じ論文で任意の $\Sigma^{2n-1} \in bP_{2n}$ は任意の m に対し free $\mathbb{Z}_m$-action をもつであろうという予想を述べているが、我々はその肯定的解決を含む結果を得た。

我々の結果を述べるため、多少の notations を定めよう。

$$\pi_p : S^{2n+1} \longrightarrow L_p^{2n+1} (= L^{2n+1}(m; p, 1, \cdots, 1))$$

を自然な射影とする。そのとき次の可換図式(A)を得る.

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{array}{ccc} hS^{\varepsilon}(L_p^{2n+1}) & \xrightarrow{\eta} & [L_p^{2n+1}, G/O] \\ \downarrow u & \circlearrowleft & \downarrow \pi_p^* \\ \Theta_{2n+1} & \xrightarrow{\eta} & \pi_{2n+1}(G/O) \end{array} \qquad (\varepsilon = h, s)$$

ここに上段は Wall([6]) の完全系列、下段は Kervaire - Milnor - Levine の完全系列であり、u は homotopy smoothing $M^{2n+1} \longrightarrow L_p^{2n+1}$ に対し、その universal cover $\tilde{M}^{2n+1}$ $(\in \Theta_{2n+1})$ を対応させる写像である。図式(A) から直ちに、$\Sigma^{2n+1} \in \Theta_{2n+1}$ が type p の free $\mathbb{Z}_m$-action をもてば

$$\eta(\Sigma^{2n+1}) \in \mathrm{Image}\,(\pi_p^* : [L_p^{2n+1}, G/O] \to \pi_{2n+1}(G/O))$$

が成り立つことがわかる.

Main Theorem : Homotopy sphere Σ^{2n+1} $(n \geq 3)$ が type p の free $\mathbb{Z}_m$-action をもつための必要十分条件は $\eta(\Sigma^{2n+1}) \in \mathrm{Image}\,\pi_p^*$ が成り立つことである。

上の条件が必要条件であることは既に述べた. 以下、十分性の証明の概略を述べる。なお Orlik の予想(前述) については $\eta(bP_{2n+2}) = 0$ なることから容易に "Yes" と言える.

§.1. An important example.

Polynomial function $f : \mathbb{C}^{2k+2} \to \mathbb{C}$ を

$$f(z_0, z_1, \cdots, z_{2k+1}) = z_0^s + z_1^2 + \cdots + z_{2k+1}^2$$

但し, $s \equiv \pm 3 \pmod{8}$, $(s, m) = 1$, で定義する. $\Sigma_s^{4k+1} = f^{-1}(0) \cap S^{4k+3}$ が bP_{4k+2} の generator であることはよく知られている. いま, $\mathbb{C}^{2k+2}$ 上に $\mathbb{Z}_m$-action を $(z_0, z_1, \cdots, z_{2k+1}) \mapsto (\alpha^{2t} z_0, \alpha z_1, \cdots, \alpha z_{2k+1})$ で定義する; ここに $\alpha = \exp(2\pi i/m)$, $s \cdot t \equiv 1 \pmod{m}$ とする. この作用は Σ_s^{4k+1} 上に free $\mathbb{Z}_m$-action を induce することが容易に確められる. この action を (Σ_s^{4k+1}, T_s) で表わす.

命題 1. (Σ_s^{4k+1}, T_s) は type t の free $\mathbb{Z}_m$-action である. (証明略) ■

命題 2. m が偶数のとき $\mathbb{Z}_m$-action (Σ_s^{4k+1}, T_s) ~~の~~ を $\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}_m$ に制限した $\mathbb{Z}_2$-action $(\Sigma_s^{4k+1}, T_s|\mathbb{Z}_2)$ は non-zero Browder-Livesay invariant をもつ.

[略証] $(\Sigma_s, T_s|\mathbb{Z}_2)$ はいわゆる Brieskorn-Hirzebruch involution でありその desuspendability については [1] または [2] を見よ. ■

§.2. Surgeries with $\pi_1 = \mathbb{Z}_m$.

この§の main reference は Wall の本[6]である。ここでは奇数次元の $\pi_1 = \mathbb{Z}_m$ の surgery について考える。Category は $\varepsilon = h, s$ のいずれでもよく、manifold は Diff. でも PL でもよいが Diff で述べることにする。m が偶数の時自然な epimorphism $\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_2$ は Wall 群の homomorphism $d' : L_{4k+3}(\mathbb{Z}_m) \longrightarrow L_{4k+3}(\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ を induce する。

定理 3. X^{2n+1} を oriented closed manifold で $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_m$, $\varphi : X \longrightarrow G/O$ を normal map とする。
もし、n が偶数もしくは m が奇数であれば surgery obstruction $\theta(\varphi) \in L_{2n+1}(\mathbb{Z}_m)$ は常に zero であり、n が奇数かつ、m が偶数ならば, $\theta(\varphi) = 0 \Leftrightarrow d'\theta(\varphi) = 0$ が成り立つ。

[証明の概要] いくつかの step に別ける。

1) $\Omega_3(K(\mathbb{Z}_m, 1) \times G/O) \xrightarrow{\theta} L_3(\mathbb{Z}_m) \xrightarrow{p} L_5(\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m)$ は zero. p の定義については Wall [6] p.127 を参照.

2) Lens space について $\theta : [L^5(m; p_1, p_2), G/O] \to L_5(\mathbb{Z}_m)$ が 0 になることを示す。

3) $\theta : \Omega_5(K(\mathbb{Z}_m, 1) \times G/O) \longrightarrow L_5(\mathbb{Z}_m)$ が 0 になることを示す。この時に§1の例についての命題2を用いる。

4) 3) を帰納法の first step として Wall [6] 14E.4 に類

似の論法で結果を導く。なお Wall の論法は inductive な obstruction が image $\{L_{2n-1}(\mathbb{Z}) \to L_{2n-1}(\mathbb{Z}_m)\}$ に入っていることを示していないので 1-st step と 2-nd step（即ち 3次元 → 5次元）のつながりが完全ではない。我々は従って帰納法の第1段を5次元にもって来た。■

§3. $\tilde{\mathbb{Z}}_m$-manifolds.

X^n を oriented manifold とし，その boundary ∂X の中の submanifold $V^{n-1} \subset \partial X$ 上に orientation preserving な free $\mathbb{Z}_m$-action T が与えられているとき、この object を $(X^n, V; T)$ で表わす．$(X^n, V; T)$ に付随した $\tilde{\mathbb{Z}}_m$-manifold $\hat{X}^n$ を $X^n/\sim$ で定義する。ここに $x \sim y \Longleftrightarrow x, y \in V$ かつ $T^k(x) = y$ とする。$\hat{X}^n$ の subset $V^{n-1}/\sim$ を $\delta\hat{X}^n$ で表わし、$\hat{X}^n$ の boundary $\partial\hat{X}^n$ は $(\partial X - \mathrm{Int}\, V)/\sim$ で定義する。$V = \partial X$ であるとき（すなわち $\partial\hat{X} = \phi$ となるとき）、$\hat{X}^n$ を closed $\tilde{\mathbb{Z}}_m$-manifold と呼ぶことにする。

例 1. $(D^{2n}, S^{2n-1}; T)$, $T(z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}) = (\alpha z_0, \alpha^{p_1} z_1, \cdots, \alpha^{p_{n-1}} z_{n-1})$（但し，$\alpha = \exp(2\pi i/m)$, $(p_i, m) = 1$）に付随した closed $\tilde{\mathbb{Z}}_m$-manifold を $\hat{L}^{2n}(m; p_1, \cdots, p_{n-1})$

で表わす．これは lens space $L^{2n+1}(m;p_1,\cdots,p_{n-1},p_n)$ の $2n$-skeleton と同一視でき、$\delta \hat{L}^{2n}(m;p_1,\cdots,p_{n-1})$ は $L^{2n-1}(m;p_1,\cdots,p_{n-1})$ と一致する。

例2. T_0 を oriented manifold M^n 上の free $\mathbb{Z}_m$-action で向きを保つものとする．そのとき $(W^{n+1},V;T)=(M^n\times I,M^n\times\{0\};T_0\times id)$ に付随した $\tilde{\mathbb{Z}}_m$-manifold $\hat{W}^{n+1}$ は orbit map $M\to M/T_0$ の mapping cylinder に同相であり $\delta\hat{W}=M/T_0$，$\partial\hat{W}=M$ である．

通常の cobordism theories と同様にして closed $\tilde{\mathbb{Z}}_m$-manifolds の cobordism theory が作れる．Cobordism group を $\Omega_*(\tilde{\mathbb{Z}}_m)$，(空間 Y に対する) bordism group を $\Omega_*(Y;\tilde{\mathbb{Z}}_m)$ で表わすとき次の表示が得られる．

定理 4. $\Omega_n(\tilde{\mathbb{Z}}_m)\cong\tilde{\Omega}_{n+1}(K(\mathbb{Z}_m,1))$

$$\Omega_n(Y;\tilde{\mathbb{Z}}_m)\cong\tilde{\Omega}_{n+1}(Y^+\wedge K(\mathbb{Z}_m,1)).$$

[証明の概要] Morgan & Sullivan [4] 参照．■

Remark： $K(\mathbb{Z}_m,1)=L^\infty$ (無限次元 lens space) の標準的な 2-skeleton $\hat{L}^2$ を考えると，inclusion map $\hat{L}^2\subset L^\infty$ は Sullivan の $\mathbb{Z}_m$-manifold cobordism theory から我々の $\tilde{\mathbb{Z}}_m$-manifold cobordism theory への natural transformation を引きおこす．

§.4 単連結 $\tilde{\mathbb{Z}}_m$-manifold の surgery.

Object $(X^n, \partial X\,;\,T)$ が $\tilde{\mathbb{Z}}_m$-manifold $\hat{X}^n$ を定義するとする。$\hat{X}^n$ が単連結であるとは $\pi_1(X)=\pi_1(\partial X)=\{1\}$ を意味するものとする。この§では単連結な closed $\tilde{\mathbb{Z}}_m$-manifold のみをあつかう。Surgery theory を構成するにはおよそ次のような step を踏む：

1) $\tilde{\mathbb{Z}}_m$-manifold 間の map 及びその degree の定義：
$(X_i^n, \partial X_i\,;\,T_i)$ $(i=0,1)$ に付随した $\tilde{\mathbb{Z}}_m$-manifold を $\hat{X}_i^n$ とする。$f: X_0^n \to X_1^n$ が $f(\partial X_0)\subset \partial X_1$ をみたし、$f|\partial X_0$ が $\mathbb{Z}_m$-equivariant な時 $\tilde{\mathbb{Z}}_m$-map $\hat{f}: \hat{X}_0^n \to \hat{X}_1^n$ を induce するといい、degree $\hat{f}$ を degree $f: (X_0, \partial X_0)\to(X_1,\partial X_1)$ で定義する。

2) Homotopy smoothing (又は homotopy triangulation) 及びその concordance class の定義： $\tilde{\mathbb{Z}}_m$-map $\hat{f}: \hat{X}_0^n \to \hat{X}_1^n$ が homotopy smoothing であるとは、$\hat{f}$ 及び $\hat{f}|\delta\hat{X}_0 : \delta\hat{X}_0 \to \delta\hat{X}_1$ が homotopy equivalence のときをいう。Concordance については通常と同様。

3) (Stable) normal bundle の定義と normal map 及びその normal cobordism classes： $\tilde{\mathbb{Z}}_m$-manifold $\hat{X}^n$ に対し canonical な方法で $(n+1)$-次元の manifold $\overline{\overline{X}}^{n+1}$ をそれが $\hat{X}^n$ を含むように作ることができる。$\overline{\overline{X}}^{n+1}$ の stable

normal bundle の $\hat{X}^n$ 上への制限を $\hat{X}^n$ の stable normal bundle とする.（$\bar{\bar{X}}^{n+1}$ の作り方は略する）. Normal map はこの normal bundle の定義と 1) より定義できる. その normal cobordism class は集合 $[\hat{X}^n, G/O]$ と同一視できることが証明できる.

定理 5. $\hat{X}^{2n}$ を単連結 $\tilde{\mathbb{Z}}_m$-manifold ($n \geq 3$) とする。そのとき次の完全系列が成り立つ

$$h\mathcal{S}^{\varepsilon}(\hat{X}^{2n}) \xrightarrow{\eta} [\hat{X}^{2n}, G/O] \xrightarrow{\theta} Q_{2n} \qquad (\varepsilon = h, s)$$

但し $Q_{2n} = \mathbb{Z}_2$ (m: 偶数), 0 (m: 奇数) とする.

[証明略] ■

Remark: m が偶数の時、$Q_{2n} = \mathbb{Z}_2$ は本質的には Kervaire invariant で与えられる.

$\hat{L}^{4k} = \hat{L}^{4k}(m; p_1, \cdots, p_{2k-1}) \supset L^{4k-1} = L^{4k-1}(m; p_1, \cdots, p_{2k-1}) \supset \hat{L}^{4k-2}(m; p_1, \cdots, p_{2k-2})$ とするとき、次の命題が §1 の命題 2 を用いて証明される.

命題 6. m が偶数ならば図式

$$\begin{tikzcd}
{[\hat{L}^{4k}, G/O]} \arrow[d] \arrow[dr, "\theta"] & \\
{[L^{4k-1}, G/O]} \arrow[d] \arrow[r, "d'\theta"] & \mathbb{Z}_2 \\
{[\hat{L}^{4k-2}, G/O]} \arrow[ur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

は可換で $\mathbb{Z}_2$ への 3 つの map はいずれも surjective である. ■

§5. Main Theorem の証明.

§0 の図式(A)は次のように拡大される：

$$
\text{(B)}\quad
\begin{tikzcd}
L_{2n+2}(\mathbb{Z}_m) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & hS(L_p^{2n+1}) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & {[L_p^{2n+1}, G/O]} \arrow[r, "\theta'"] \arrow[d, "\pi_p^*"] & \mathbb{Z}_2 \text{ or } 0 \\
L_{2n+2}(1) \arrow[r, "\omega"] & \Theta_{2n+1} \arrow[r, "\eta"] & \pi_{2n+1}(G/O) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

ここに τ は transfer map (cf. Wall [6] 13A), 代数的には $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_m]$ 上の2次形式を $\mathbb{Z}$ 上の2次形式と見なす写像であり、幾何的には m-fold の universal covering を考える(もしくは $\mathbb{Z}_m$-action を忘れる)写像である。θ' については、m が偶数かつ n が奇数の場合に $\theta' = d'\theta$ で定義し、その他の場合は $\theta' = 0$ とする.

m が奇数の場合は $\theta' = 0$ 及び τ が surjective であることから Main Theorem は容易に得られる. 従って以下ではもっぱら <u>m が偶数</u>の場合のみを扱う. 図式(B)及び transfer map $L_{4k}(\mathbb{Z}_m) \xrightarrow{\tau} L_{4k}(1)$ の surjectivity (Wall) により、我々は次の2つの補題を証明すればよいことを知る.

補題7. $\eta_0 \in \operatorname{Image} \pi_p^*$ のとき、$\eta_1 \in [L_p^{2n+1}, G/O]$ で
$\pi_p^*(\eta_1) = \eta_0$, $\theta'(\eta_1) = 0$ をみたすものが存在する.

補題8. Σ_0^{2n+1} が type p の free $\mathbb{Z}_m$-action をもてば、任意の $\Sigma^{2n+1} \in bP_{2n+2}$ に対し $\Sigma_0 \# \Sigma$ もまた type p の free $\mathbb{Z}_m$-action をもつ.

[補題 7. の略証] n が偶数の場合は自明. n が奇数 $(n=2k-1)$ の場合、$\eta_2 \in [L_p^{2n+1}, G/O]$ で $\pi_p^*(\eta_2)=0$, $\theta'(\eta_2) \neq 0$ をみたすものがとれることを示せばよい. このことは命題 6 から示される. ■

[補題 8. の略証] n が奇数なら (B) において τ が全射故明らか. n を偶数とする. そのとき自然な orbit map $\pi : \Sigma_0^{4k+1} \longrightarrow \Sigma_0/\mathbb{Z}_m$ の mapping cylinder $\hat{X}^{4k+2}$ は $\tilde{\mathbb{Z}}_m$-manifold で $\delta\hat{X} = \Sigma_0/\mathbb{Z}_m$, $\partial\hat{X} = \Sigma_0$ と見なせる. (cf. § 3. 例 2). このとき次の可換図式 (横線は完全) が得られる:

(C)
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & hS(\hat{X}\ \mathrm{rel}.\partial\hat{X}) & \xrightarrow{\eta} & [\hat{X}/\partial\hat{X}, G/O] & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{Z}_2 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
L_{4k+2}(\mathbb{Z}_m) & \xrightarrow{\omega} & hS(\Sigma_0/\mathbb{Z}_m) & \xrightarrow{\eta} & [\Sigma_0/\mathbb{Z}_m, G/O] & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow\tau & & \downarrow u & & \downarrow\pi^* & & \\
L_{4k+2}(1) & \xrightarrow{\omega} & hS(\Sigma_0) & \xrightarrow{\eta} & [\Sigma_0, G/O] & \longrightarrow & 0
\end{array}$$
.

命題 6 より、$\varphi \in [\hat{X}/\partial\hat{X}, G/O]$ で $\theta(\varphi) \neq 0$ のものがとれる. 定理 3 より $\varphi|\delta\hat{X}$ は surgery できるから、φ は geometric には normal map $\hat{f} : \hat{M}^{4k+2} \longrightarrow \hat{X}^{4k+2}$ で $\hat{f}|\delta\hat{M}$ は homotopy 同値なもので表わされる. ($\hat{f}|\partial\hat{M}$ は diffeo.). $\hat{M}^{4k+2}$ を定める object $(M, V; T)$ を考えると、V は $\delta\hat{M}$ の universal cover, $\partial M = \Sigma_0 \cup V$ (disjoint) でかつ $\theta(\varphi) \neq 0$ なることより M の Kervaire invariant は non-zero. 従って V^{4k+1} は $\Sigma_0 \# \Sigma$ と diffeo (但し Σ は bP_{4k+2} の generator) である. ■

REFERENCES

[1] W. Browder; Cobordism invariants, the Kervaire invariant and fixed point free involutions, Trans. A.M.S., 178 (1973), 193-225.

[2] C. H. Giffen; Desuspendability of free involutions on Brieskorn spheres, Bull. A.M.S., 75 (1969), 426-429.

[3] S. Lopez de Medrano; Involutions on manifolds, Springer, 1971.

[4] J. W. Morgan & D. P. Sullivan; The transversality characteristic class and linking cycles in surgery theory, Ann. of Math., 99 (1974), 463-544.

[5] P. Orlik; Smooth homotopy lens spaces, Mich. Math. J., 16 (1969), 245-255.

[6] C. T. C. Wall; Surgery on compact manifolds, Academic Press, 1970.