数理解析研究所講究録
第 246 巻 1975 年 76-81

Semicharacteristic classes と 群 $O(48,k,l)$ について

北大理　神島芳宣

§1

球面に free に act する finite group を決定する問題において，Milnor は[1]の中で3次元球面 S^3 上に free に act するか否かの finite group を次のように分類した．

a)　群 $Q(8n,k,l)$　n even　$n\geq 2$　$k>l\geq 1$

b)　群 $Q(8n,k,l)$　n odd　$n>k\geq l$

c)　群 $O(48,k,l)$　$l\not\equiv 0 \pmod 2$　$l\not\equiv 0 \pmod 3$

d)　群 $A\times Z_l$　（Aは上の任意の群で $(\mathrm{ord}A,l)=1$ をみたす）

このうち Milnor は c) の $l\neq 1$ の場合，S^3 に free に act しないことを示したが，その他については決定していない．　その後 R. Lee は[2]において a) と c) について，S^3（もっと一般に $8t+3$ 次元の mod 2 homology sphere）に free に act しないことを示したが，c) の場合の証明は $l=1$ の時は正しくない。(See[3])
従って，ここで $O(48,k,l)$ のある subgroup を選ぶことに

より，Lee の bordism invariant を使って $O(48,k,l)$ が $8t+3$ 次元の mod 2 homology sphere に free に act しないことを示す。なお，中岡氏は，彼の定義した Equivariant Point Theorem の応用として，$O(48,k,l)$ が free に act しないことを示している（[4]）

Lee の bordism invariant $\chi_{\frac{1}{2}}$ とは，finite group G の un-oriented bordism group $\mathcal{N}_{2n+1}(G)$ から標数 2 の有限体 K 上の G-representation のつくる Relative Grothendieck group $\widetilde{R}_{GL,ev}(G)$ への homomorphism ；$\chi_{\frac{1}{2}}$; $[G,M] \longmapsto \chi_{\frac{1}{2}}(M;K)$ である。この時，Lee は次のことを示した（[2]，Th. 4.13）

$Z_{2,p}$ (p: odd) を dihedral group とする時，$\mathcal{N}_{2n+1}(Z_{2,p})$ の元 $[M]$ に対して，$\chi_{\frac{1}{2}}(M;K)=\hat{\chi}([K]+[V_1]+\cdots+[V_{\frac{p-1}{2}}])$．

ここで，$Z_{2,p}$ は，x,y で generate され，$x^2=y^p=(xy)^2=1$ をみたすもの．$[K]$，$[V_i]$ は $Z_{2,p}$ の irreducible representation で，$\widetilde{R}_{GL,ev}(Z_{2,p})$ において，Z_2-basis をなす．($i=1,\cdots,\frac{p-1}{2}$)

$\hat{\chi}$ は，Kervaire semi-characteristic ；$\hat{\chi}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim H_i(M;Z_2)$ (mod 2).

（Note，K は，Z_2 に primitive p-th root of unity を付加した体で $Z_{2,p}$ の splitting field となっている）.

群 $O(48,k,l)$ ($l\not\equiv 0 \pmod 2$, $l\not\equiv 0 \pmod 3$) は，generator X,P,Q,R,A と次の生成関係をもつものである； $X^{3^k}=P^4=A^l=1$

$P^2=Q^2=R^2$，$PQP^{-1}=Q^{-1}$，$XPX^{-1}=Q$，$XQX^{-1}=PQ$，$RXR^{-1}=X^{-1}$

$RPR^{-1}=QP$, $RQR^{-1}=Q^{-1}$, $AP=PA$, $AQ=QA$, $RAR^{-1}=A^{-1}$

$AX=XA$.

§2.

定理　　群 $O(48,k,l)$ ($l\not\equiv 0 \pmod 2$, $l\not\equiv 0 \pmod 3$) は $8t+3$ 次元の mod 2-homology sphere に free に act しない。([2] の Cor. 4.17)

証明

イ) $l\neq 1$ の場合　$\{X,P,Q\}$ によって generate される subgroup は，$T(8,3^k)$ に isomorphic な $O(48,k,l)$ の normal subgroup であり その quotient group $O(48,k,l)/T(8,3^k)$ は，dihedral group $Z_{2,l}$ に isomorphic である．ここで $T(8,3^k)$ とは，x,y,z によって generate され，relation $x^2=(xy)^2=y^2$, $zxz^{-1}=y$, $zyz^{-1}=xy$, $z^{3^k}=1$ $(k\geq 1)$ をもつものである。(see [2] or [1])　また，$T(8,3^k)$ の cohomology に関して，次のことが知られている。$H^i(T(8,3^k);Z_2)=\begin{cases} Z_2 & (i\equiv 0,3) \\ 0 & (i\equiv 1,2) \end{cases}$ (4を法として)。

今，M を $8t+3$ 次元の mod 2-homology sphere とし，$O(48,k,l)$ が free に act するとすれば，quotient manifold $M/T(8,3^k)$ には natural に $Z_{2,l}$ が free に act する．$H_i(M;K)=H_i(M;Z_2)\otimes_{Z_2}K=0$ $(i<8t+3)$ より，vector space として，$H_i(M/T(8,3^k);K)\cong H_i(T(8,3^k);K)$ $(i<8t+3)$.

従って，$$H_i(M/T(8,3k);K)=\begin{cases}K & i\equiv 0,3\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ 0 & i\equiv 1,2\ (\mathrm{mod}\ 4)\end{cases}\quad (0\leq i\leq 8t+3)$$

$H_i(M/T(8,3k);K)$ には，$Z_{2,\ell}$ が act しているが（homology への induce action に関して），上のことより trivial であるから，

Semi-characteristic $\chi_{\frac{1}{2}}(M/T(8,3k);K)=\sum_{i=0}^{4t+1}(-1)^i[H_i(M/T(8,3k);K)]$
$$=[K]$$

$\hat{\chi}=\sum_{i=0}^{4t+1}\dim H_i(M/T(8,3k);K)\ (\mathrm{mod}\ 2)=1$ よって，[2] の Th.4.13 に反する．よって矛盾．

ロ）$\ell=1$ の場合　即ち $A=1$ の時．この時 $k\geq 2$ である（$O(48,1,1)$ は，binary octahedral group でこれは free に act する．(see, [1])）　$\bar{X}=X^{3^{k-1}}$ とおくと，$\bar{X}^3=1$，$\bar{X}P=P\bar{X}$　$\bar{X}Q=Q\bar{X}$ をみたす．$O(48,k,1)$ において $\{\bar{X},P,Q,R\}$ によって generate される subgroup O' を考える．O' において $\{P,Q\}$ によって generate される subgroup は $Q(8)$ に isomorphic な O' の normal subgroup である．ここで $Q(8)$ は，binary dihedral group；$\{x,y\mid x^2=(xy)^2=y^2\}$ となるものである．

また，quotient group $O'/Q(8)$ は $Z_{2,3}$ に isomorphic である．今，$O(48,k,1)$ が $8t+3$ 次元の mod 2-homology sphere M に free に act するとすれば，その subgroup O' は M に free に act し，quotient mani

-fold $M/Q(8)$ には，natural に $Z_{2,3}$ が free に act する．前と同様に，$H_i(M/Q(8);K) \cong H_i(Q(8);K) = \begin{cases} K & i\equiv 0,3 \pmod 4 \\ K\oplus K & i\equiv 1,2 \pmod 4 \end{cases}$ $(i<8t+3)$

(see [5]).

一方，$H_i(M/Q(8);K)$ は，$KZ_{2,3}$-module であるから，$Z_{2,3}=\{[\bar{x}]=S, [R]=T\}$ とおくと，$H_i(M/Q(8);K)$ には，$S_*: H_i(M/Q(8)) \longmapsto H_i(M/Q(8))$ が act しているが，$\delta: Q(8) \longmapsto Q(8)$ を $\delta(U)=\bar{x}U\bar{x}^{-1}$, $U\in Q(8)$ なる automorphism とすると，δ は classifying space への map $\delta: B_{Q(8)} \longmapsto B_{Q(8)}$ を induce し，上の同型対応で S_* に対応するものは，$\delta_*: H_i(Q(8);K) \longmapsto H_i(Q(8);K)$ である．ところが $\delta(P)=P$, $\delta(Q)=Q$, $Q(8)=\{P,Q\}$ であるから，$\delta=id$ 即ち，対応する $S_*=id$ となる．よって $KZ_{2,3}$-module $H_i(M/Q(8);K)$ において，S の作用は，trivial．involution T に対しては，$H_i(M/Q(8);K)$ の元 $x(\neq 0)$ で $T_*x=x$ なるものがあるから，

$$0 \longmapsto Kx \longmapsto H_i(M/Q(8);K) \longrightarrow H_i(M/Q(8);K)/Kx \longrightarrow 0$$ より

Grothendieck group $R_K(Z_{2,3})$ で，$[H_i(M/Q(8);K)] = [K] + [H_i(M/Q(8);K)/Kx]$

inductively に $[H_i(M/Q(8);K)] = \dim H_i(M/Q(8);K)[K]$

よって，Relative grothendieck group $\widetilde{R}_{GL,ev}(Z_{2,3})$ において，

$$[H_i(M/Q(8);K)] = \dim H_i(M/Q(8);K)[K] \pmod 2.$$ 従って，

semi-characteristic $\chi_{\frac{1}{2}}(M/Q(8);K) = \sum_{i=0}^{4t+1}(-1)^i[H_i(M/Q(8);K)]$

$$= \hat{\chi}[K]$$

$\hat{\chi} = \sum_{i=0}^{4t+1} \dim H_i(M/Q(8))(K) = 1$ より，矛盾である．

証明終り．

References

[1] J. Milnor : Groups which act on S^n without fixed points Amer. J. Math. 79(1957) pp623-630

[2] R. Lee : Semicharacteristic classes, Topology 12 (1973) pp183-199

[3] 中岡稔 : 群作用をもつ多様体のトポロジー 数理研講究録(1974) pp56.

[4] 中岡稔 : Groups which act freely on Manifolds. (to appear)

[5] Cartan-Eilenberg : Homological Algebra. Princeton press. pp.253.