数理解析研究所講究録
第 246 巻 1975 年 82-91

同変コボルディズム論における特性類

九大理　　菅原 民生

有限 abel 群 G について，同変コボルディズム論 $\tilde{U}_G^*(X)$ を局所化したところで，G-ベクトル束 ξ の Chern 類 $C(\xi)$ の定義を与え，その性質を考察する．

§1 分類空間

G ベクトル束の分類空間と同変コボルディズム論についての解説が F. Uchida [7] §§5, 6 にあるので，記号などはそれに従う．

Gを有限 abel 群，$I(G)=\{V_\alpha\ ;\ \alpha\in A\}$ を G の既約なユニタリー表現の完全系とする．Gを有限 abel 群としているので，Aは有限集合で $\dim V_\alpha=1$ である．$k: A\to\mathbb{Z}$ を非負整数値関数とし，それらの全体を K_A で表わす．$k\in K_A$ に対して $\|k\|=\sum_\alpha k(\alpha)$ とし，$k, l\in K_A$ に対して $k+l$ を $(k+l)(\alpha)=k(\alpha)+l(\alpha)$，$k\leqq l$ を任意の $\alpha\in A$ について

$k(\alpha) \leqq l(\alpha)$, $k < l$ を $k \leqq l$ かつ $k \neq l$ で定義する。

$k \in K_A$ に対して V_α の $k(\alpha)$ 個の直和を $V_\alpha^{k(\alpha)}$ と書き、$V(k) = \bigoplus_\alpha V_\alpha^{k(\alpha)}$ とすると $V(k)$ は G の表現空間であり、逆に任意の有限次元表現空間はある $k \in K_A$ について $V(k)$ と同値になる。

$V(k)$ 内の n 次元部分空間全体のなす Grassmann 多様体 $B_n(V(k))$ は自然に G-多様体となり、その上の標準的なベクトル束 $E_n(V(k)) \longrightarrow B_n(V(k))$ は G ベクトル束となる。その Thom 空間 $M_n(V(k))$ は G-空間で、それらのなす同変 Thom スペクトラムから同変コボルディズム論 $\widetilde{U}_G^*(X)$ が定義される。ここではコンパクト Hausdorff G 空間で、基点をもち、基点は不動点であるようなカテゴリーの中で考える。

$\widetilde{U}_G^*(S^0)$ の中の Euler 類よりなる積について閉じた部分集合 $S = \{e(V(k))\ ;\ k \in K_{A_1}\}$ による局所化を $S^{-1}\widetilde{U}_G^*(X)$ と書くとき、次の T. tom Dieck の定理が Chern 類を定義するとき大切である。[3]。

定理 1.1

$X \supset A \supset X^G$ で A は G 不変な閉集合とする。$i : A \subset X$ を包含写像とすると、$S^{-1}i^* : S^{-1}\widetilde{U}_G^*(X) \longrightarrow S^{-1}\widetilde{U}_G^*(A)$ は同型写像である。

$B_n(V(k))$ の不動点集合については $B_n(V(k))^G = \bigcup_{\|m\|=n} \prod_\alpha B_{m(\alpha)}(V_\alpha^{k(\alpha)})^G$ であり，各 α について $B_{m(\alpha)}(V_\alpha^{k(\alpha)})^G \cong B_{m(\alpha)}(\mathbb{C}^{k(\alpha)})$，(ここに $\mathbb{C}^{k(\alpha)}$ は G が trivial に作用している表現空間) となっていることを想起しよう.

§2 普遍 Chern 類

まずはじめに G-射影空間 $CP(V(k)) = B_1(V(k))$ について考察する. 1次元 G ベクトル束 $E_1(V(k)) \longrightarrow B_1(V(k))$ の Euler 類を $x_k \in \tilde{U}_G^*(B_1(V(k)))$ とする. 定理 1.1 より

$$S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_1(V(k))) \cong \sum_\alpha S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_1(V_\alpha^{k(\alpha)}))$$

であるから，各 α について $x_{\alpha,k} \in S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_1(V(k)))$ が存在して，$x_k = \sum_\alpha x_{\alpha,k}$ となる. このとき次の定理を得る.

定理 2.1

任意の $k \in K_A$ と任意の $\alpha \in A$ に対して $x_{\alpha,k} \in S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_1(V(k)))$ が存在して次の (a), (b) を満す:

(a) $S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_1(V(k)))$ は $\bigcup_\alpha \{1_\alpha, x_{\alpha,k}, x_{\alpha,k}^2 \cdots x_{\alpha,k}^{k(\alpha)-1}\}$ を基底とする自由 $S^{-1}\tilde{U}_G^*(S^0)$-加群を部分環として含む.

(b) $k < l$ のとき 包含写像 $i: V(k) \subset V(l)$ について $i^*: S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_1(V(l))) \longrightarrow S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_1(V(k)))$ は $i^*(x_{\alpha,l}) = x_{\alpha,k}$ を満す.

次に一般の n について，n 次元 G-ベクトル束 $E_n(V(k)) \rightarrow$

$\longrightarrow B_n(V(k))$ の Euler 類を $c_{n,k} \in \tilde{U}_G^*(B_n(V(k)))$ とする。再び定理 1.1 によって

$$S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_n(V(k))) \cong \sum_{\|m\|=n} S^{-1}\tilde{U}_G^*\left(\prod_\alpha B_{m(\alpha)}(V_\alpha^{k(\alpha)})\right)$$

であるから、$\|m\| = n$ となる各 m に対して $c_{m,k} \in$
$\in S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_n(V(k)))$ が存在して $c_{n,k} = \sum_{\|m\|=n} c_{m,k}$ を満す。再び $i : V(k) \subset V(\ell)$ に対して $i^*(c_{m,\ell}) = c_{m,k}$ となるので k は省略してよく、与えられた n に対して $\|m\| < n$ となる各 m に対して $c_m \in S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_n(V(k)))$ が定義できて $S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_n(V(k)))$ は $S^{-1}\tilde{U}_G^*[c_m ; \|m\| \leqq n]/\sim$ の形の部分環を含むのであるが、それは次の § の定理 3.1 の系として示される。

§3 G-ベクトル束の Chern 類

X をコンパクトな G-空間, $\xi : E \to X$ を n 次元 G-ベクトル束とする。$P(\xi) : P(E) \xrightarrow{\pi} X$ を ξ に伴なう射影束とすると $P(E)$ にも自然に G が作用して π は G-map である。$P(E)$ 上の標準直線束 η はまた G-直線束で、$\pi^*(\xi) \cong \xi' \oplus \eta$ は G-ベクトル束としての分解を与える。(Atiyah [1]　　従って Conner-Floyd [2] §7 と同様に Leray-Hirsch, Dold の定理が使えて次の定理をうる。

定理 3.1

任意の n と任意の n 次元 G-ベクトル束 $\xi: E \to X$ に対して $C(\xi) = \sum_{\|m\| \leqq n} C_m(\xi)$, $C_m(\xi) \in S^{-1}\tilde{U}_G^{2\|m\|}(X)$ なる元が一意的に存在して次の条件 (a), (b), (c) を満す：

(a) 自然性　$f: X \longrightarrow Y$ を G-map とすると

$$C(f^*\xi) = f^* C(\xi)$$

(b) 乗法性　ξ, η を X 上の二つの G-ベクトル束とすると

$$C(\xi \oplus \eta) = C(\xi) \cdot C(\eta)$$

(c) 正規性　η を $B_1(V(k))$ 上の標準的直線束とすると

$$C(\eta) = 1 + \sum_\alpha y_\alpha$$

証明　一意的であることは，通常のコボルディズム論の場合とまったく同様であるから省略する．存在については $n=1$ の場合は定理2.1である．$n>1$ の場合 $P(E)$ 上では splitting principle によって $\pi^*(\xi) \cong \eta \oplus \xi'$,（ここで ξ' は $n-1$ 次元）となるから $\pi^*(C(\xi)) = (1+\sum_\alpha y_\alpha)\cdot(C(\xi'))$ とならなければならない．$C(\xi')$ は帰納法の仮定によって一意的に存在が決っている．

さて n 次元 G ベクトル束 $\xi: E \to X$ を旗束 $F(\xi): F(E) \to X$ の $F(E)$ 上へ引きもどした束 $\pi^*(\xi)$ は G 直線束に分解されて $\pi^*(C(\xi)) = \prod_{i=1}^{n}(1+\sum_{\alpha\in A} x_{\alpha,i})$ と表わされる．

各 $m \in K_A$ について $C_m(\xi)$ を $\{x_{\alpha,i}\}$ できちんと記述す

るために次のように準備をする．

A に適当に全順序を入れて $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$ とする．$m \in K_A$ を一つ固定し，$s = \|m\|$ とする．α_1 を $m(\alpha_1)$ 個，α_2 を $m(\alpha_2)$ 個 $\cdots\cdots$ と並べたものを $\{\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_s\}$ と書く．他方 $\{1, 2 \cdots \|k\|\}$ から s 個とり出して並べた順列 $l' = \{j_1\ j_2 \cdots j_s\}$ 全体の集合 $\{\{(\beta_1\ j_1), (\beta_2\ j_2), \cdots (\beta_s\ j_s)\}\ ;\ l' \in L'\}$ の中には順序を除いて同じものがあるかも知れない。同じそれらを与える l' を同一視した L' の商集合を L とする．このとき

$$\pi^* C(\xi) = \sum_{l \in L} x_{\beta_1 j_1} x_{\beta_2 j_2} \cdots x_{\beta_s j_s}$$

と表わされる。右辺は象徴的に $\sum_{Sym} \prod_{\alpha} (x_{\alpha,1} \cdots x_{\alpha, m(\alpha)})$ と表わせば（厳密ではないが）わかりよい．

$k \in K_A$ に対して $\omega = (i_1\ i_2 \cdots i_r)$，$r \geqq 1$ $i_j \in K_A$，$\sum_{j=1}^{r} i_j = k$ となる ω を k の分割という。この ω に対して $r_i = \#\{j\ ;\ i_j = i\}$ の列 $R = (r_i,\ i \in K_A)$ を対応させる．r_i は有限個の i を除いて 0 である．

さて一つの $k \in K_A$ を十分大きくとって固定し，不定元の族 $\{x_{\alpha,j}\ ;\ j = 1, 2, \cdots k(\alpha),\ \alpha \in A\}$ ともう一つの不定元の族 $\{C_m\ ;\ m \in K_A,\ m \leqq k\}$ を考える．両者の $\mathbb{Z}$ 上の多項式環は $C_m = \sum_{Sym} \prod_{\alpha} (x_{\alpha,1}\, x_{\alpha 2} \cdots x_{\alpha, m(\alpha)})$ で関係づけられているとする。

分割 ω に対して $s = \#\{(\alpha, j)\ ;\ i_j(\alpha) \neq 0\ \ j = 1, 2 \cdots\ \ \alpha \in A\}$

とし，先ほどと同様に $\{1, 2, \cdots \|k\|\}$ から S 個とり出して並べた順列 $l' = \{j_1 j_2 \cdots j_s\}$ 全体の集合を L' とする。整数値の族 $\{i_j(\alpha) ; j = 1, 2 \cdots \alpha \in A\}$ から 0 でないものだけを全順序集合 A を添数集合とみて辞書式に並べた全順序集合を $\{t_1 t_2 \cdots t_s\}$ とする。このとき $l' \in L'$ に対して単項式 $x_{\beta_1 j_1}^{t_1} x_{\beta_2 j_2}^{t_2} \cdots x_{\beta_s j_s}^{t_s}$ を考え，同一の単項式を与える l' を同一視した L' の商集合を L とする。このとき多項式 $\sum_{l \in L} x_{\beta_1 j_1}^{t_1} x_{\beta_2 j_2}^{t_2} \cdots x_{\beta_s j_s}^{t_s}$ は $\{c_m ; m \in K_A, m \leqq k\}$ の多項式 $f_R(c_m)$ で表わされる。今回も（やや厳密さを欠くが）

$$f_R(c_m) = \sum_{Sym} \prod_{\alpha} \left(x_{\alpha.1}^{i_1(\alpha)} x_{\alpha.2}^{i_2(\alpha)} \cdots x_{\alpha.r_\alpha}^{i_{r_\alpha}(\alpha)} \right)$$

と表わせばわかりよい。

n 次元 G ベクトル空間 ξ に対して，R を一つの分割 ω に対応するものとすると $C^R(\xi) = f_R(c_m(\xi))$ によって Chern 類 $C^R(\xi) \in S^{-1} \tilde{U}_G^{2t}(X)$ が定義される。

§4. Landweber-Novikov 作用素

$\mathcal{S}^*$ を $\tilde{U}_G^*(\ )$ theory における安定コボルディズム作用素の algebra とする。また $\mathcal{C}^*$ を $\tilde{U}_G^*(\ )$ theory における安定特性類の algebra とする。Landweber [4] の類似として同型写像 $\psi : \mathcal{S}^* \to \mathcal{C}^*$ とその逆 $\varphi : \mathcal{C}^* \to \mathcal{S}^*$ とが次のようにして与えられる。

まずψは$\tau\in\mathcal{S}^*$に対して$\psi(\tau)\in\mathcal{C}^*$をGベクトル束$\xi: E\to X$に対して$\psi(\tau)(\xi)=\phi_\xi^{-1}\tau\,\phi_\xi(1)\in\tilde{U}_G^*(X)$とすることで定まる。逆に$\varphi$は普遍Chern類$\gamma\in\tilde{U}_G^*(B_n(V(k)))$に対して$\varphi(\gamma):\tilde{U}_G^{2n}(X)\longrightarrow\tilde{U}_G^{2m+2n}(X)$を次のように定める。任意の元$\alpha\in\tilde{U}_G^{2n}(X)$が$f:V(\ell)^c\wedge X\longrightarrow M_{n+\|\ell\|}(V(k))$で代表されているとき，$\varphi(\gamma)$を$\varphi(\gamma)(\alpha)=\sigma(V(\ell))^{-1}f^*\phi(\gamma)$とするのである。

§3で現われたKAの元の分割ωに対応するRに対して$S^R=\varphi(C^R)$を同変Landweber-Novikov作用素ということにする。このとき定理3.1によってM. Nakaoka [6] §2と同様に次が成り立つ。

$$C^R(\xi\oplus\eta)=\sum_{I+J=R}C^I(\xi)\,C^J(\eta)$$
$$S^R(\alpha\beta)=\sum_{I+J=R}S^I(\alpha)\,S^J(\beta)$$

$\mathcal{S}^*\supset S^*$を$\{S^R\}$によって生成される部分環とするとS^*はHopf algebraになる。従ってMilnor-Moore [5]によってS^Rのconjugation $\bar{S}^R$が定義される。そして

$$\sum_{I+J=R}S^I\bar{S}^J=\sum_{I+J=R}\bar{S}^I S^J=\begin{cases}0 & R\neq 0\\ 1 & R=0\end{cases}$$

がなりたつ。

$\bar{C}^R$をC^Rのdual classとする。$\bar{u}^R=\psi(\bar{S}^R)$とする

Wu class u^Rを$u^R(\xi)=\sum_{I+J=R}\bar{S}^I C^J(\xi)$で，dual Chern類を$\bar{C}^R(\xi)=\sum_{I+J=R}S^I\bar{u}^J(\xi)$でそれぞれ定義するとやはり

M. Nakaoka [6] §3 の類似で次のことがらが成り立つ.

f : X→Y を G の作用する弱複素多様体の G-map とするときその Gysin 準同型が定義されて, Riemann-Roch-Grothendieck 型の定理

$$\sum_{I+J=R} s^I f_!(\alpha)\, c^J(N) = \sum_{I+J=R} f_!\left(s^I\alpha \cdot \bar{c}^J(M)\right)$$

またその系として N を一点としたとき, Riemann-Roch 型の定理

$$\left\langle s^R\alpha,\ [M] \right\rangle = \sum_{I+J=R} s^I \left\langle \alpha \cdot u^I(M),\ [M] \right\rangle$$

等が成立する.

参考文献

[1] Atiyah : K theory, Benjamin (1967)

[2] Conner-Floyd : The relation of cobordism to K-theories, Lecture notes in mathematics 28. 1966, Springer

[3] T. tom Dieck : Lokalisierung äquivarianter Kohomologie Theorien, Math. Zeit 121 (1971) 253-262

[4] Landweber : Cobordism operations and Hopf algebras; Trans. A. M. S. 129 (1967) 94-110.

[5] J. Milnor - J. C. Moore., On the structure of

Hopf algebras Ann. of Math. 81 (1965) 211-264

[6] M. Nakaoka; Characteristic classes with values in complex cobordism, Osaka J. of Math. 10. (1973) 521-543

[7] F. Uchida 変換群とコボルディズム論. 紀伊国屋 1974.