数理解析研究所講究録
第 247 巻 1975 年 31-40

ある Random matrix の固有ベクトルの漸近分布について

広島大 理　小西 貞則

§1. 序

多変量解析において摂動論を用いた研究は古くは，Girshic [4], Lawley [5, 6] によって，また最近では Fujikoshi [2] が多変量解析におけるいくつかの統計量の漸近展開を求めており，さらに母集団固有根に重根がある場合の Wishart 行列，多変量 F 行列 (Fujikoshi [3])，正準相関係数 (Sugiura [1975・4・数学会報告]) の固有根の漸近展開がえられている。固有ベクトルに関しては Sugiura [7] が，母集団固有根が単根の時，1つ又は2つの Wishart 行列の固有ベクトルの摂動展開を与えそれを基に分布の漸近展開を求めた。ここでは，はじめに §2 において，p 次対称行列 S の一つの摂動系を考え，その固有ベクトルの摂動展開を導き，同時に固有根の摂動公式 (Fujikoshi [3]) も導びかれることを示す。§3 において，母集団固有根に重根がある場合の Wishart 行列の固有ベクトルの分布について，§2 で

求めた結果から考察する。

§2. 対称行列の固有ベクトルの摂動展開

一般に p 次対称行列 S が十分小なる ε に対して

$$S = \Gamma + \varepsilon V^{(1)} + \varepsilon^2 V^{(2)} + \varepsilon^3 V^{(3)} + \cdots , \tag{2.1}$$

と表わされるとする。ここに $\Gamma = \mathrm{diag}[\gamma_1 I_{g_1}, \gamma_2 I_{g_2}, \cdots, \gamma_k I_{g_k}]$, $\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_k > 0$, $\sum_{i=1}^{k} g_i = p$, $V^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, \cdots)$: p次対称行列とする。このとき S の固有ベクトルの摂動展開公式を与える。いま S の第 i 番目の固有値 l_i $(i = 1, \cdots, p)$ に対応する固有ベクトル c_i は $c_i' c_j = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \cdots, p)$ をみたすようにとり, $C = [c_1, c_2, \cdots, c_p]$, $L = \mathrm{diag}[l_1, l_2, \cdots, l_p]$ とおく。また Γ の第 i 番目の固有ベクトルを第 i 列にもつ p 次行列 E は

$$E = [e_1, e_2, \cdots, e_p] = \begin{bmatrix} E_1 & & 0 \\ & E_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & E_k \end{bmatrix} \quad E_i : g_i \times g_i \text{ 直交行列} \tag{2.2}$$

と表わすことができる。ここで ε が小さいという仮定のもとで, 摂動系(2.1)の固有値, 固有ベクトルを ε の巾級数に展開する。すなわち

$$\begin{aligned} C = [C_{ij}] &= \begin{bmatrix} E_1 & & 0 \\ & E_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & E_k \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} E_1 & & 0 \\ & E_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & E_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} & \cdots & A_{1k}^{(1)} \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} & \cdots & A_{2k}^{(1)} \\ & \cdots & & \\ A_{k1}^{(1)} & A_{k2}^{(1)} & \cdots & A_{kk}^{(1)} \end{bmatrix} \\ &+ \varepsilon^2 \begin{bmatrix} E_1 & & 0 \\ & E_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & E_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} & \cdots & A_{1k}^{(2)} \\ A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)} & \cdots & A_{2k}^{(2)} \\ & \cdots & & \\ A_{k1}^{(2)} & A_{k2}^{(2)} & \cdots & A_{kk}^{(2)} \end{bmatrix} + \varepsilon^3 \begin{bmatrix} E_1 & & 0 \\ & E_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & E_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{(3)} & A_{12}^{(3)} & \cdots & A_{1k}^{(3)} \\ A_{21}^{(3)} & A_{22}^{(3)} & \cdots & A_{2k}^{(3)} \\ & \cdots & & \\ A_{k1}^{(3)} & A_{k2}^{(3)} & \cdots & A_{kk}^{(3)} \end{bmatrix} + \cdots , \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$(2.4)\quad L=\begin{bmatrix} L_1 & & 0\\ & L_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & L_k\end{bmatrix} = \Gamma+\varepsilon L^{(1)}+\varepsilon^2 L^{(2)}+\varepsilon^3 L^{(3)}+\cdots,$$

ここに　C_{ij}, $A_{ij}^{(\alpha)}$ $(i,j=1,2,\cdots,k,\ \alpha=1,2,\cdots)$; $g_i\times g_j$ 行列

$$L^{(\alpha)}=\begin{bmatrix} L_1^{(\alpha)} & & 0\\ & L_2^{(\alpha)} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & L_k^{(\alpha)}\end{bmatrix}\qquad L_i^{(\alpha)}\ ;\ g_i\times g_i \text{ 行列 とする。}$$

(注) Γ が *simple* の場合 $L_i^{(\alpha)}$ は対角行列にとれるが，Γ が重根を含む場合にはこの段階では対角行列にはとれない。

(2.3), (2.4) の係数 $A_{ij}^{(\alpha)}$, $L_i^{(\alpha)}$ を，$SC=CL$, $C'C=I$ なる関係から決定することによって，固有値，固有ベクトルの摂動展開公式として次の補助定理をえる。

<u>補助定理</u>

P 次対称行列 S が，摂動系 (2.1) で表わされるとき，S の固有ベクトル，固有値の摂動展開は

$$\begin{aligned}(2.5)\quad C_{ij}=\frac{1}{\gamma_j-\gamma_i}\Big[&\varepsilon V_{ij}^{(1)}+\varepsilon^2\Big(\sum_{\alpha\neq j}\frac{1}{\gamma_j-\gamma_\alpha}V_{i\alpha}^{(1)}V_{\alpha j}^{(1)}-\frac{1}{\gamma_j-\gamma_i}V_{ij}^{(1)}V_{jj}^{(1)}\\
&+V_{ij}^{(2)}\Big)+\varepsilon^3\Big\{\sum_{\alpha\neq j}\sum_{\beta\neq j}\frac{1}{(\gamma_j-\gamma_\alpha)(\gamma_j-\gamma_\beta)}V_{i\alpha}^{(1)}V_{\alpha\beta}^{(1)}V_{\beta j}^{(1)}\\
&-\sum_{\alpha\neq j}\frac{1}{(\gamma_j-\gamma_\alpha)^2}\Big(V_{i\alpha}^{(1)}V_{\alpha j}^{(1)}V_{jj}^{(1)}+\frac{1}{2}V_{ij}^{(1)}V_{j\alpha}^{(1)}V_{\alpha j}^{(1)}\Big)\\
&-\frac{1}{\gamma_j-\gamma_i}\sum_{\alpha\neq j}\frac{1}{\gamma_j-\gamma_\alpha}\Big(V_{ij}^{(1)}V_{j\alpha}^{(1)}V_{\alpha j}^{(1)}+V_{i\alpha}^{(1)}V_{\alpha j}^{(1)}V_{jj}^{(1)}\Big)\\
&+\frac{1}{(\gamma_j-\gamma_i)^2}V_{ij}^{(1)}V_{jj}^{(1)2}+\sum_{\alpha\neq j}\frac{1}{\gamma_j-\gamma_\alpha}\Big(V_{i\alpha}^{(1)}V_{\alpha j}^{(2)}+V_{i\alpha}^{(2)}V_{\alpha j}^{(1)}\Big)\\
&-\frac{1}{\gamma_j-\gamma_i}\Big(V_{ij}^{(1)}V_{jj}^{(2)}+V_{ij}^{(2)}V_{jj}^{(1)}\Big)+V_{ij}^{(3)}\Big\}\Big]E_j+O(\varepsilon^4),\end{aligned}$$

$(i\neq j)$

$$(2.6)\quad C_{ii} = E_i + \varepsilon^2\Big(-\frac{1}{2}\sum_{\alpha\neq i}\frac{1}{(\gamma_i-\gamma_\alpha)^2}V_{i\alpha}^{(1)}V_{\alpha i}^{(1)}\Big)E_i$$
$$+\varepsilon^3\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{\alpha\neq i}\sum_{\beta\neq i}\frac{1}{(\gamma_i-\gamma_\alpha)^2(\gamma_i-\gamma_\beta)}\big(V_{i\alpha}^{(1)}V_{\alpha\beta}^{(1)}V_{\beta i}^{(1)}+V_{i\beta}^{(1)}V_{\beta\alpha}^{(1)}V_{\alpha i}^{(1)}\big)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha\neq i}\frac{1}{(\gamma_i-\gamma_\alpha)^3}\big(V_{i\alpha}^{(1)}V_{\alpha i}^{(1)}V_{ii}^{(1)}+V_{ii}^{(1)}V_{i\alpha}^{(1)}V_{\alpha i}^{(1)}\big)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{\alpha\neq i}\frac{1}{(\gamma_i-\gamma_\alpha)^2}\big(V_{i\alpha}^{(1)}V_{\alpha i}^{(2)}+V_{i\alpha}^{(2)}V_{\alpha i}^{(1)}\big)\Big\}E_i+O(\varepsilon^4)$$

$$(2.7)\quad E_iL_iE_i' = \gamma_iI_{q_i}+\varepsilon V_{ii}^{(1)}+\varepsilon^2\Big(V_{ii}^{(2)}+\sum_{\alpha\neq i}\frac{1}{\gamma_i-\gamma_\alpha}V_{i\alpha}^{(1)}V_{\alpha i}^{(1)}\Big)$$
$$+\varepsilon^3\Big\{V_{ii}^{(3)}+\sum_{\alpha\neq i}\frac{1}{\gamma_i-\gamma_\alpha}\big(V_{i\alpha}^{(1)}V_{\alpha i}^{(2)}+V_{i\alpha}^{(2)}V_{\alpha i}^{(1)}\big)$$
$$-\frac{1}{2}V_{ii}^{(1)}\sum_{\alpha\neq i}\frac{1}{(\gamma_i-\gamma_\alpha)^2}V_{i\alpha}^{(1)}V_{\alpha i}^{(1)}-\frac{1}{2}\sum_{\alpha\neq i}\frac{1}{(\gamma_i-\gamma_\alpha)^2}V_{i\alpha}^{(1)}V_{\alpha i}^{(1)}V_{ii}^{(1)}$$
$$+\sum_{\alpha\neq i}\sum_{\beta\neq i}\frac{1}{(\gamma_i-\gamma_\alpha)(\gamma_i-\gamma_\beta)}V_{i\alpha}^{(1)}V_{\alpha\beta}^{(1)}V_{\beta i}^{(1)}\Big\}+O(\varepsilon^4),$$

と表わすことができる。

(Remark)

i) Γが *simple* の場合(2.2)におけるΓの固有ベクトルe_iは$e_i'=(0,\cdots,\overset{i}{1},\cdots,0)$，すなわち$E=I$にとることができ，(2.5)，(2.6)は$V_{ij}^{(2)}=V_{ij}^{(3)}=0$とおくと *Sugiura* [7]の結果と一致する。

ii) 固有値の摂動公式のみを考えるならば(2.2)におけるEは任意の直交行列でよいのであるから$E=I$とすることができる。このときSの第$q_1+\cdots+q_{i-1}+\alpha$番目の固有値は(2.7)の第$\alpha$番目の固有値であり，これは *Fujikoshi* [3]の固有値の摂動公式と一致する。

iii) (2.7)においてE_iは，右辺の対称行列を対角化する直交行列とすればL_iは対角行列となる。

§ 3. Wishart行列の固有ベクトルについて

nS を Wishart 分布 $W_p(n, \Gamma)$, $\Gamma = \mathrm{diag}[\gamma_1 I_{q_1}, \gamma_2 I_{q_2}, \cdots, \gamma_k I_{q_k}]$ $\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_k > 0$ に従う正値対称行列とする。S の第 i 番目の固有値に対応する固有ベクトル c_i は，$c_i' c_j = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, p)$ をみたすようにとり $C_n = [c_1, c_2, \cdots, c_p] = [C_{ij}]$，$C_{ij} : q_i \times q_j$ 行列とおく。さらに

$$(3.1) \qquad S = \Gamma + \frac{1}{\sqrt{n}} V \qquad V : p\text{次対称行列}$$

とおくことによって，補助定理より固有ベクトルの摂動展開

$$
\begin{aligned}
(3.2) \quad C_{ij} = \frac{1}{\gamma_j - \gamma_i} \Big[& \frac{1}{\sqrt{n}} V_{ij} + \frac{1}{n} \Big(\sum_{\alpha \neq j} \frac{1}{\gamma_j - \gamma_\alpha} V_{i\alpha} V_{\alpha j} - \frac{1}{\gamma_j - \gamma_i} V_{ij} V_{jj} \Big) \\
& + \frac{1}{n\sqrt{n}} \Big\{ \sum_{\alpha \neq j} \sum_{\beta \neq j} \frac{1}{(\gamma_j - \gamma_\alpha)(\gamma_j - \gamma_\beta)} V_{i\alpha} V_{\alpha\beta} V_{\beta j} - \sum_{\alpha \neq j} \frac{1}{(\gamma_j - \gamma_\alpha)^2} \big(V_{i\alpha} V_{\alpha j} V_{jj} + \frac{1}{2} V_{ij} V_{j\alpha} V_{\alpha j} \big) \\
& - \frac{1}{\gamma_j - \gamma_i} \sum_{\alpha \neq j} \frac{1}{\gamma_j - \gamma_\alpha} \big(V_{ij} V_{j\alpha} V_{\alpha j} + V_{i\alpha} V_{\alpha j} V_{jj} \big) + \frac{1}{(\gamma_j - \gamma_i)^2} V_{ij} V_{jj}^2 \Big\} \Big] E_j + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3.3) \quad C_{ii} = E_i & + \frac{1}{n} \Big(-\frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq i} \frac{1}{(\gamma_i - \gamma_\alpha)^2} V_{i\alpha} V_{\alpha i} \Big) E_i \\
& + \frac{1}{n\sqrt{n}} \Big\{ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq i} \sum_{\beta \neq i} \frac{1}{(\gamma_i - \gamma_\alpha)^2 (\gamma_i - \gamma_\beta)} \big(V_{i\alpha} V_{\alpha\beta} V_{\beta i} + V_{i\beta} V_{\beta\alpha} V_{\alpha i} \big) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq i} \frac{1}{(\gamma_i - \gamma_\alpha)^3} \big(V_{i\alpha} V_{\alpha i} V_{ii} + V_{ii} V_{i\alpha} V_{\alpha i} \big) \Big\} E_i + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)
\end{aligned}
$$

および固有値の摂動公式

$$
\begin{aligned}
(3.4) \quad E_i L_i E_i' = \gamma_i I & + \frac{1}{\sqrt{n}} V_{ii} + \frac{1}{n} \Big(\sum_{\alpha \neq i} \frac{1}{\gamma_i - \gamma_\alpha} V_{i\alpha} V_{\alpha i} \Big) \\
& + \frac{1}{n\sqrt{n}} \Big\{ -\frac{1}{2} V_{ii} \sum_{\alpha \neq i} \frac{1}{(\gamma_i - \gamma_\alpha)^2} V_{i\alpha} V_{\alpha i} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq i} \frac{1}{(\gamma_i - \gamma_\alpha)^2} V_{i\alpha} V_{\alpha i} V_{ii} \\
& + \sum_{\alpha \neq i} \sum_{\beta \neq i} \frac{1}{(\gamma_i - \gamma_\alpha)(\gamma_i - \gamma_\beta)} V_{i\alpha} V_{\alpha\beta} V_{\beta i} \Big\} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)
\end{aligned}
$$

をえる。

ここで E_i を (3.4) の右辺の対称行列を対角化する直交行

列と考えれば，L_iには対角行列したがってL_i，E_iには各々(3.4)の右辺の固有値，固有ベクトルと考えることができる。さらに(3.4)の右辺の分布の漸近展開は，Fujikoshi [3]によってえられており，その結果から，任意の直交行列Q_iに対して，E_iQ_iの分布はE_iの分布と等しくしたがってE_iは，Haar distributionであることがわかる。実際固有ベクトルの漸近展開をえるためには，(3.2)，(3.3)の結果よりcharacteristic functionを求めて反転する必要がある。しかし上記結果からわかるように各項がHaar distribution E_iにdependしていることから，E_iを与えた条件付でないと困難であると思われる。そこで，ここでは(3.2)(3.3)の結果から漸近分布の形で定理を述べることにする。

定理 1.

nSはWishart分布$W_p(n,\Gamma)$に従い，共分散行列Γは，重根をもつものとする。Sの固有ベクトルC_iは，$C_i'C_j=\delta_{ij}$をみたすとする。このとき(3.2)(3.3)より

$\sqrt{n}C_{ij}$ $(i\neq j)$の極限分布はE_jを与えたとき，平均0の正規分布でその(a,b)-elementの分散は$\frac{\lambda_i\lambda_j}{(\lambda_i-\lambda_j)^2}$で共分散は0．また$\sqrt{n}C_{ij}$の$(a,b)$-elementと$\sqrt{n}C_{ji}$の$(a',b')$ elementの間の条件付共分散は，

$\frac{-\lambda_i\lambda_j}{(\lambda_i-\lambda_j)^2}e^{(i)}_{ab'}e^{(j)}_{a'b}$，$E_i=(e^{(i)}_{ab})$となりそれ以外の条件付共分散はすべて0．

$-2n(C_{ii}-E_i)$の極限分布は条件付分布で与えられ互いに独立な singular を含めた Wishart 行列の一次結合

$$(3.5)\qquad \sum_{\alpha\neq i}^{k}\left[\gamma_\alpha\gamma_i/(\gamma_\alpha-\gamma_i)^2\right] S_\alpha^{(i)} E_i,\quad S_\alpha^{(i)} : W_{q_i}(q_\alpha, I)$$

と表わすことができる。Γが simple の場合 Sugiura [7] の結果と一致する。

次に Wishart 行列nSに対してSの固有ベクトルc_iが対応する固有値l_iによって　$c_i'c_i = l_i$ $(i=1,\cdots,p)$と正規化される場合を考える。この場合にも固有ベクトル　$C_n=[C_{ij}]$の摂動展開は可能でそれは，

$$(3.6)\qquad C_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{\gamma_j}}{\gamma_j-\gamma_i}V_{ij}E_j + \frac{1}{n}\left\{\frac{\sqrt{\gamma_j}}{\gamma_j-\gamma_i}\sum_{\alpha\neq j}\frac{1}{\gamma_j-\gamma_\alpha}V_{i\alpha}V_{\alpha j} - \frac{\gamma_i+\gamma_j}{2\sqrt{\gamma_j}(\gamma_j-\gamma_i)^2}V_{ij}V_{jj}\right\}E_j + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

$$(3.7)\qquad C_{ii} = \gamma_i^{\frac{1}{2}}E_i + \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{2\sqrt{\gamma_i}}V_{ii}E_i + \frac{1}{n}\left\{-\frac{1}{8\gamma_i\sqrt{\gamma_i}}V_{ii}^2 - \frac{1}{2}\sum_{\alpha\neq i}\frac{\gamma_\alpha}{\sqrt{\gamma_i}(\gamma_i-\gamma_\alpha)^2}V_{i\alpha}V_{\alpha i}\right\}E_i + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

と表わすことができる。

この場合にも上記結果から各項が Haar distribution E_iに depend しておりE_iを与えたときの条件付でないと漸近展開を求めることはむつかしい。(3.6), (3.7) からすぐに漸近分布に関して次の定理がえられる。

<u>定理 2.</u>

nSを Wishart 分布$W_p(n,\Gamma)$従う正値対称行列とし，

Γは重根を含むとする。Sの第i番目の固有値l_iに対応する固有ベクトルc_iは $c_i' c_i = l_i$ $(i=1,2,\cdots,p)$ と正規化されるものとする。$C_n = [c_1, c_2, \cdots, c_p] = [C_{ij}]$, C_{ij} : $q_i \times q_j$ 行列とするとき，

$\sqrt{n}\, C_{ij}$ の極限分布はE_jを与えたとき平均0の正規分布に従いその条件付分散は $\gamma_i \gamma_j^2 / (\gamma_j - \gamma_i)^2$，共分散は0，$\sqrt{n}\, C_{ij}$の$(a,b)$-element と$\sqrt{n}\, C_{ji}$ $(i \neq j)$の(a',b')-element との間の条件付共分散は $-(\gamma_i \gamma_j)^{3/2} / (\gamma_i - \gamma_j)^2\, e_{ab'}^{(i)}\, e_{a'b}^{(j)}$，$E_i = [e_{ab}^{(i)}]$ となる。さらに

$\sqrt{n}\,(C_{ii} - \gamma_i^{1/2} E_i)$ の極限分布はE_iを与えたとき平均0の正規分布で(a,b)-element，(a',b')-elementの条件付共分散は

$$\frac{1}{4}\gamma_j\, e_{a'b}^{(i)} e_{ab'}^{(i)} \quad (a \neq a'),\quad \frac{1}{2}\gamma_i\, e_{ab}^{(i)} e_{ab'}^{(i)} + \frac{1}{4}\gamma_j \sum_{g \neq a} e_{gb}^{(i)} e_{gb'}^{(i)} \quad (a = a')$$

となる。このように固有ベクトルの正規化の仕方により，漸近分布のorderが変わることがわかる。

次に2つのWishart行列の固有ベクトルについて考えてゆく。S_1, S_2は互いに独立で各々Wishart分布$W_p(n_1, \Gamma)$，$W_p(n_2, I)$に従う正値対称行列とする。ここに $n_1 = n\rho_1$，$n_2 = n\rho_2$，$n_1 + n_2 = n$ $\Gamma = \mathrm{diag}[\gamma_1 I_{q_1}, \gamma_2 I_{q_2}, \cdots, \gamma_k I_{q_k}]$ $(\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_k > 0)$ とする。$S_2^{-1} S_1$ の第i番目の固有値l_iに対応する固有ベクトルc_iは，$c_i' c_i = 1$ とし $C_n = [c_1, c_2, \cdots, c_p] = [C_{ij}]$: C_{ij} : $q_i \times q_j$ 行列とする。この場合，§2で求めた補助定理は $S_2^{-1} S_1$ が対称でないことから適用できない。しかし $\frac{1}{\sqrt{n}}$ の項までは，漸近

分布の形で求めることができる。すなわち diagonal block C_{ii} : $q_i \times q_i$ 行列 $(i=1,\cdots,k)$ の第1項の極限分布は Haar distribution E_i で，次の項は $\frac{1}{\sqrt{n}}$ の項が表われそれは

$$(3.8)\quad -2\rho_2^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}\,(C_{ii}-E_i) = E_i\begin{bmatrix} 0, & e_1^{(i)\prime}U_{ii}e_2^{(i)}, & \cdots, & e_1^{(i)\prime}U_{ii}e_{q_i}^{(i)} \\ e_2^{(i)\prime}U_{ii}e_1^{(i)}, & 0, & \cdots, & e_2^{(i)\prime}U_{ii}e_{q_i}^{(i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{q_i}^{(i)\prime}U_{ii}e_1^{(i)}, & e_{q_i}^{(i)\prime}U_{ii}e_2^{(i)}, & \cdots, & 0 \end{bmatrix}$$

と表わすことができる。

ここに $E_i=[e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \cdots, e_{q_i}^{(i)}]$ $(i=1,\cdots,k)$，U_{ii} は $U=\frac{1}{\sqrt{n_2}}(S_2-n_2 I)$ で定義される random matrix U を $U=[U_{ij}]$，U_{ij} : $q_i \times q_j$ 行列と分割したときの diagonal block とする。また C_{ij} $(i \neq j)$ に対しては

$$(3.9)\quad \sqrt{n}\,C_{ij} = \frac{1}{\gamma_j-\gamma_i}\left(\rho_1^{-\frac{1}{2}}(\gamma_i\gamma_j)^{\frac{1}{2}}V_{ij} - \rho_2^{-\frac{1}{2}}\gamma_j U_{ij}\right)E_j \quad (i \neq j)$$

と表わすことができる。ここに $V=[V_{ij}]_{i,j=1,\cdots,k}=\frac{1}{\sqrt{n_1}}(\Gamma^{-\frac{1}{2}}S_1\Gamma^{-\frac{1}{2}}-n_1 I)$ とする。(3.8)，(3.9) より E_i を与えたときの漸近分布は平均0の正規分布となることがわかる。Γ が simple の場合 Sugiura [7] によって漸近展開および (3.8) に対応する漸近分布が求められているが (3.8) に対応する対角要素 C_{ii} の第1項は1で次に order $\frac{1}{n}$ の項が表われ，Γ が重根をもつと (3.8) より order が変わってくることがわかる。

References

[1] Anderson, T. W. (1963). Asymptotic theory for principal component analysis. Ann. Math. Statist. 34, 122-148.

[2] Fujikoshi, Y. (1975). 多変量解析におけるある種の検定統計量の漸近展開. 数理研講究録 231, 12-25.

[3] Fujikoshi, Y. (1975). Wishart行列および多変量F行列の固有根の分布の漸近展開－重根のある場合. 日本数学会講演要旨. (49-52).

[4] Girshic, M. A. (1939). On the sampling theory of roots of determinantal equations. Ann. Math. Statist. 10 203-224.

[5] Lawley, D. N. (1956). Tests of significance for the latent roots of covariance and correlation matrices. Biometrika 43 128-136.

[6] Lawley, D. N. (1959). Tests of significance in canonical analysis. Biometrika 46 59-66.

[7] Sugiura, N. (1975). Wishart行列の固有ベクトルの漸近展開. 数理研講究録 231. 1-11.

[8] Wigner, E. P. (1959). Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra. Academic Press New York and London.