数理解析研究所講究録
第 247 巻 1975 年 106-114

線型分類方式による誤確率の上限について

静岡大　工　　西　晃央
　　　　　　　　多賀保志
大阪大　養　　石井恵一

§1. 序

多次元母集団Π_1, Π_2に関して平均ベクトルμ_1, μ_2 ($\mu_1 \neq \mu_2$) 及び分散行列Σ_1, Σ_2は知られているとする．Π_iの事前分布をπ_i ($\pi_1+\pi_2=1$, $\pi_i \geq 0$) として観測ベクトルxのΠ_iへの分類を考える．分類方式：$\phi(x)=(\phi_1(x), \phi_2(x))$とは$\phi_i(x) \geq 0$, $\phi_1(x)+\phi_2(x) \equiv 1$なる可測関数であり、$x$を観測して$\phi_i(x)$の確率で$\Pi_i$へ分類する方式である．これらの全体を$\Phi=\{\phi\}$と書く．特に$\phi_i(x)$が標本空間$R^k$の半空間の定義関数であるとき線型分類方式と云い、その全体を$\Phi^l=\{\phi\}$と書く．平均ベクトルμ_i，分散行列Σ_iを持つ分布関数全体を$\mathcal{F}_i=\mathcal{F}(\mu_i, \Sigma_i)$と書く．$F=(F_1, F_2)$，$F_i \in \mathcal{F}_i$；$\mathcal{F}=(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$と略記する．$\Pi_i$の真の分布が$F_i$であるとき、分類方式$\phi$を用いたときの誤確率は容易に、

$$e(\phi, F) = \pi_1 \int \phi_2(x)\, dF_1 + \pi_2 \int \phi_1(x)\, dF_2$$

となる。Becker及びChernoff[4]は1次元で事前分布が等しい場合に於ける、分布に依存する分類方式の誤確率の上限

$$\sup_{F\in\mathcal{F}}\ \inf_{\phi\in\Phi} e(\phi, F) = \left\{2\left[1+\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)^2\right]\right\}^{-1}$$

を求めた。多次元で事前分布が必ずしも等しくないときは、Isii, Taga [1]による詳しい結果がある。本稿では分類方式をΦ^lに制限した場合、分布に依存しない誤確率の上限 $\inf_{\phi^l\in\Phi^l}\sup_{F\in\mathcal{F}} e(\phi^l, F)$ について考察する。$\phi_2(x)$が半空間$\{x\in R^k \mid d'x\geq\varepsilon\}$の定義関数のとき $\phi^{(d,\varepsilon)}=(\phi_1^{(d,\varepsilon)}, \phi_2^{(d,\varepsilon)})$ と表わすことにする。

§2. $\sup_{F\in\mathcal{F}} e(\phi^{(d,\varepsilon)}, F)$ の計算

$F_1\in\mathcal{F}_1, F_2\in\mathcal{F}_2$ は独立に動かしてよいから

$$(2.1)\quad \sup_{F\in\mathcal{F}} e(\phi^{d,\varepsilon}, F) = \pi_1 \sup_{F_1\in\mathcal{F}_1}\int(1-\phi_1^{d,\varepsilon})\,dF_1 + \pi_2\sup_{F_2\in\mathcal{F}_2}\int(1-\phi_2^{d,\varepsilon})\,dF_2$$

分散行列Σ_iが退化しなければ I[illegible] [2] Theorem 3.1 より

$$(2.2)\quad \sup_{F_1}\int(1-\phi_1^{d,\varepsilon})\,dF_1 = \inf\left\{\int g(x)\,dF_1 \;\middle|\; g(x)\geq 1-\phi_1(x),\ g(x)\text{は2次関数}\right\}$$

となる。

<u>補題2.1.</u> A $k\times k$. symmetric. p.s.d のとき

$$x'Ax + b'x + \gamma \geq {}^{\exists}\mathrm{const}\ \text{for}\ {}^{\forall}x\in R^k \rightleftarrows b\in\mathcal{L}[A]$$

<u>補題2.2</u> A $k\times k$. symmetric. p.s.d のとき. $D=\{x\in R^k \mid d'x\geq\varepsilon\}$に対し $g(x)=(x-b)'A(x-b)+\gamma\geq I_D(x)$ for ${}^{\forall}x\in R^k$ ならば $g(x)\geq h(x)\geq I_D(x)$ $({}^{\forall}x\in R^k)$ を満たす適当な放物柱$h(x)$が存在し、主軸にdを選べる。証明はAppendix参照

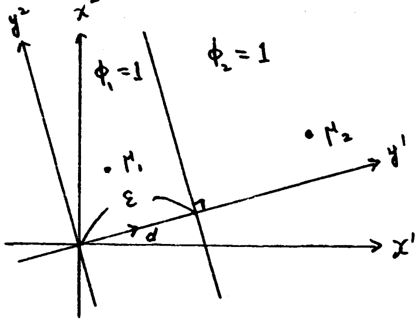
補題2.1より(2.2)の $g(x)$ は一般に $g(x)=(x-b)'A(x-b)+\gamma$ と表わすことが出来て(2.2)は以下のようになる。

$$(2.3)\quad \sup_{F_1\in\mathfrak{F}(\mu_1,\Sigma_1)}\int(1-\phi_1^{d,\varepsilon}(x))\,dF_1(x)=\inf_{(x-b)'A(x-b)+\gamma\geq 1-\phi_1^{d,\varepsilon}(x)=I_D(x)}\left\{\mathrm{tr}\,A\Sigma_1+(\mu_1-b)'A(\mu_1-b)+\gamma\right\}$$

さて $d'd=1$ と正規化しておくと補題2.2より $\exists T=[d,t_2,\cdots t_k]\in O(k)$

$$T'AT=\begin{pmatrix}\lambda & & 0\\ & 0 & \\ 0 & & \ddots\ 0\end{pmatrix}\quad(\lambda>0)$$

なる2次関数 $g(x)=(x-b)'A(x-b)+\gamma$ に制限してよい。



ところで直交変換 $X=TY$ によって $Y\sim\mathfrak{F}(T'\mu_1,T'\Sigma_1T)$. 従って $b=Tc$ とおけば $(x-b)'A(x-b)+\gamma=\lambda(y^1-c^1)^2+\gamma$. 半空間 $\{x\mid d'x\geq\varepsilon\}$ は半空間 $\{y\mid y^1\geq\varepsilon\}$ に変換される。$|\mathrm{Jacobian}|=|\det T|=1$ であるから、

$$\sup_{F_1\in\mathfrak{F}(\mu_1,\Sigma_1)}\int(1-\phi_1^{d,\varepsilon}(x))\,dF_1(x)=\sup_{F_1\in\mathfrak{F}(T'\mu_1,T'\Sigma_1T)}\int I_{\{y\mid y^1\geq\varepsilon\}}(y)\,dF_1(y)$$

となる。(2.3)を右辺に適用して

$$(2.4)\quad \sup_{F_1\in\mathfrak{F}(\mu_1,\Sigma_1)}\int(1-\phi_1^{d,\varepsilon}(x))\,dF_1(x)=\inf_{\lambda(y^1-c^1)^2+\gamma\geq I_{\{y\mid y^1\geq\varepsilon\}}}\left\{\lambda d'\Sigma_1d+\lambda(d'\mu_1-c^1)^2+\gamma\right\}$$

右辺は簡単な計算によって

$$=\begin{cases}\dfrac{d'\Sigma_1d}{d'\Sigma_1d+(d'\mu_1-\varepsilon)^2} & ;\ d'\mu_1<\varepsilon\\ 1 & ;\ d'\mu_1\geq\varepsilon\end{cases}$$

となる。$\mathfrak{F}(\mu_2,\Sigma_2)$ に対しても同様にして

$$(2.5)\quad \sup_{F_2\in\mathfrak{F}(\mu_2,\Sigma_2)}\int(1-\phi_2^{d,\varepsilon}(x))\,dF_2(x)=\begin{cases}\dfrac{d'\Sigma_2d}{d'\Sigma_2d+(\varepsilon-d'\mu_2)^2} & ;\ d'\mu_2<\varepsilon\\ 1 & ;\ d'\mu_2\geq\varepsilon\end{cases}$$

となる。(2.1)，(2.4)，(2.5)から次の定理を得る。

定理2.1　(i) $d'\mu_1 < d'\mu_2$ の場合，

$$\sup_F e(\phi^{d,\varepsilon},F)=\begin{cases}\pi_1+\pi_2\cdot\dfrac{d'\Sigma_2 d}{d'\Sigma_2 d+(d'\mu_2-\varepsilon)^2} & ;\ d'\mu_1\geqq\varepsilon\\ \pi_1\cdot\dfrac{d'\Sigma_1 d}{d'\Sigma_1 d+(d'\mu_1-\varepsilon)^2}+\pi_2\dfrac{d'\Sigma_2 d}{d'\Sigma_2 d+(d'\mu_2-\varepsilon)^2} & ;\ d'\mu_1<\varepsilon<d'\mu_2\\ \pi_1\cdot\dfrac{d'\Sigma_1 d}{d'\Sigma_1 d+(d'\mu_1-\varepsilon)^2}+\pi_2 & ;\ d'\mu_2\leqq\varepsilon\end{cases}$$

(ii) $d'\mu_1 > d'\mu_2$ の場合，

$$\sup_F e(\phi^{d,\varepsilon},F)=\begin{cases}\pi_1+\pi_2\cdot\dfrac{d'\Sigma_2 d}{d'\Sigma_2 d+(d'\mu_2-\varepsilon)^2} & ;\ d'\mu_2\geqq\varepsilon\\ 1 & ;\ d'\mu_1>\varepsilon>d'\mu_2\\ \pi_1\cdot\dfrac{d'\Sigma_1 d}{d'\Sigma_1 d+(d'\mu_1-\varepsilon)^2}+\pi_2 & ;\ d'\mu_1\leqq\varepsilon\end{cases}$$

(iii) $d'\mu_1 = d'\mu_2$ の場合，

$$\sup_F e(\phi^{d,\varepsilon},F)=\begin{cases}\pi_1+\pi_2\cdot\dfrac{d'\Sigma_2 d}{d'\Sigma_2 d+(d'\mu_2-\varepsilon)^2} & ;\ d'\mu_i>\varepsilon\\ \pi_1\cdot\dfrac{d'\Sigma_1 d}{d'\Sigma_1 d+(d'\mu_1-\varepsilon)^2}+\pi_2 & ;\ d'\mu_i\leqq\varepsilon\end{cases}$$

§3. 種々の結果

分類方式 $\phi^{d,\varepsilon}$ にてまずdを固定しεを動かして次式の計算

(3.1)　$\Phi(d)\equiv\inf_{\varepsilon}\sup_F e(\phi^{d,\varepsilon},F)$

を行う。$\pi_1=\pi_2=1/2$ の場合は定理2.1より次式を得る。

(3.2)　$\Phi(d)=\min\left\{\frac{1}{2},\ \inf_{d'\mu_1<\varepsilon<d'\mu_2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{d'\Sigma_1 d}{d'\Sigma_1 d+(d'\mu_1-\varepsilon)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{d'\Sigma_2 d}{d'\Sigma_2 d+(d'\mu_2-\varepsilon)^2}\right)\right\}$

(3.3)　$\psi^d(\varepsilon)\equiv\frac{1}{2}\left\{\frac{d'\Sigma_1 d}{d'\Sigma_1 d+(d'\mu_1-\varepsilon)^2}+\frac{d'\Sigma_2 d}{d'\Sigma_2 d+(d'\mu_2-\varepsilon)^2}\right\}$　: $d'\mu_1<\varepsilon<d'\mu_2$

とおく。Schwarzの不等式から容易に次の補題は得られる。

補題3.1　A: $k\times k$, symmetric, p.d，b: $k\times 1$ の constant vector に対し

$$\sup_{x \neq 0} \frac{x'b}{\sqrt{x'Ax}} = \sqrt{b'A^{-1}b}$$

が成立する。supをattainするベクトルは $x = \alpha A^{-1}b$ $(\forall \alpha > 0)$ のみである。

<u>case 1</u>　$\pi_1 = \pi_2 = 1/2$, $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ の場合

若干の計算により次式が成立する。

$$\Phi(d) = \min\left\{\frac{1}{2}, \inf_{\varepsilon} \phi^{d}(\varepsilon)\right\} = \begin{cases} 1/2 & ; \left(\dfrac{d'(\mu_2-\mu_1)}{\sqrt{d'\Sigma d}}\right)^2 \leqq 4 \\ \dfrac{1}{1+\frac{1}{4}\left(\dfrac{d'(\mu_2-\mu_1)}{\sqrt{d'\Sigma d}}\right)^2} & ; \quad 〃 \quad > 4 \end{cases}$$

補題3.1より次の結果を得る。

<u>定理3.1</u>　$\pi_1 = \pi_2 = 1/2$, $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ のとき、

$$\inf_{\Phi^l} \sup_{\mathcal{F}} e(\phi^l, F) = \begin{cases} 1/2 & ; (\mu_1-\mu_2)'\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2) \leqq 4 \\ \dfrac{1}{1+\frac{1}{4}(\mu_1-\mu_2)'\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2)} & ; \quad 〃 \quad > 4 \end{cases}$$

左辺のinfをattainする ϕ^l は π_i $(i=1,2)$ に多次元正規分布を仮定したときの判別関数 $x'\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2) - \frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)'\Sigma^{-1}(\mu_1+\mu_2)$ に基づく分類方式のみである。更にMahalanobis距離 $(\mu_1-\mu_2)'\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2) > 4$ の場合には次のことがいえる。

$$\inf_{\Phi^l} \sup_{\mathcal{F}} e(\phi^l, F) = 2 \cdot \inf_{\Phi} \sup_{\mathcal{F}} e(\phi, F)$$

<u>case 2</u>　π_i は未知で、一般には $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ の場合

$e_i(\phi^{d,\varepsilon}, F) \equiv \int (1-\phi_i^{d,\varepsilon})\, dF_i$ $(i=1,2)$ とおく。d を固定し ε を動かしたとき、minimax的誤確率 $\inf_{\varepsilon} \max_{i} \sup_{F} e_i(\phi^{d,\varepsilon}, F)$ は $\varepsilon^*(d) = (\delta_1 d'\mu_2 + \delta_2 d'\mu_1)/(\delta_1+\delta_2)$ $(\delta_i^2 \equiv d'\Sigma_i d)$ で達成される。故に次

式が得られる。

$$(3.4)\quad \inf_d \inf_\varepsilon \max_i \sup_F e_i(\phi^{d.\varepsilon}.F) = \inf_d \frac{1}{1+\left(\frac{d'(\mu_2-\mu_1)}{\sqrt{d'\Sigma_1 d}+\sqrt{d'\Sigma_2 d}}\right)^2}$$

他方 $\pi_1=\pi_2=\frac{1}{2}$ のとき Isii, Taga[1] で次式が得られている。

$$(3.5)\quad \inf_\Phi \sup_\mathcal{F} e(\phi.F) = \sup_\mathcal{F} \inf_\Phi e(\phi.F) = \frac{1}{2}\inf_d \frac{1}{1+\left(\frac{d'(\mu_2-\mu_1)}{\sqrt{d'\Sigma_1 d}+\sqrt{d'\Sigma_2 d}}\right)^2}$$

<u>case 3</u>　π_i は未知, $\Sigma_1=\Sigma$, $\Sigma_2=\alpha^2\Sigma$ $(\alpha>0)$ の場合.

$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\phi^d(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=\varepsilon^*}=0 \Longleftrightarrow \alpha=1 \Longleftrightarrow \Sigma_1=\Sigma_2$ であるから $\alpha\neq 1$ のとき $\inf_{\Phi^l}\sup_\mathcal{F}\left(\pi_1\int\phi_2^l dF_1+\pi_2\int\phi_1^l dF_2\right) < \inf_\Phi\sup_\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}\int\phi_2 dF_1+\frac{1}{2}\int\phi_1 dF_2\right)$ であり等号が成立するのは $\inf_{\Phi^l}\sup_\mathcal{F} e(\phi^l.F)\leq\frac{1}{2}$ 且つ $\Sigma_1=\Sigma_2$ の場合に限る。所で(3.5), (3.4)から

$$(3.6)\quad \inf_\Phi \sup_\mathcal{F} e(\phi.F) = \sup_\mathcal{F} \inf_\Phi e(\phi.F) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{(1+\alpha)^2}(\mu_1-\mu_2)'\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2)}$$

$$(3.7)\quad \inf_{\Phi^l} \max_i \sup_\mathcal{F} e_i(\phi^l.F) = \frac{1}{1+\frac{1}{(1+\alpha)^2}(\mu_1-\mu_2)'\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2)}$$

であり,共に α の単調増加関数である。更に(3.7)の inf をattainする ϕ^l は, $x'\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2)-\frac{1}{1+\alpha}(\mu_1-\mu_2)\Sigma^{-1}(\alpha\mu_1+\mu_2)\geq 0 \Longleftrightarrow \phi_2^l(x)=1$ に限る。

<u>case 4</u>　$\pi_1=\pi_2=\frac{1}{2}$, $\Sigma_1=\Sigma_2=\Sigma$, n 個の独立な標本 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$

がすべてΠ_iの一方から得られている場合、

μ_iの代りに$\begin{pmatrix}\mu_i\\ \vdots\\ \mu_i\end{pmatrix}$，$\Sigma$の代りに$\begin{pmatrix}\Sigma & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \Sigma\end{pmatrix}$で置き変えればよい。

定理3.2

$$\inf_{\Phi^l}\sup_{\mathcal{F}} e(\phi^l(x_1,\cdots,x_n),F)=\begin{cases}1/2 & ;(\mu_1-\mu_2)'\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2)\leq 4/n\\ \dfrac{1}{1+\frac{n}{4}(\mu_1-\mu_2)'\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2)} & ;\qquad\qquad " \qquad\quad >4/n\end{cases}$$

左辺の$\inf$をattainするϕ^lはΠ_1,Π_2に多次元正規性を仮定するときの分類方式　$\bar{x}'\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2)-\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)'\Sigma^{-1}(\mu_1+\mu_2)\geq 0\iff\phi_2^l(x_1,\cdots,x_n)=1$

に限る。

case 2, case 3. でも同様の考察が出来る。

Appendix　（補題2.2の証明）Aはsymmetric, p.s.dだから$^\exists T\in O(k)$

$$T'AT=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots\ 0\end{pmatrix}\quad.\ \lambda_i>0\ ,\quad 1\leq r=\mathrm{rank}(A)\leq k$$

とできる。$T=[t_1,\cdots t_k]$とおく。

(I) $d\in\mathcal{L}[t_1,\cdots t_r]$の場合。$d=s_1,s_2,\cdots,s_r$を適当に選んで

$s_i's_j=\delta_{ij}$，$\mathcal{L}[s_1,\cdots s_r]=\mathcal{L}[t_1,\cdots t_r]$とできる。$S=[s_1,\cdots,s_r,t_{r+1},\cdots t_k]$

とおくと。$S'AS=\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Bは$r\times r$. symmetric. p.dである。こ

こで$x=Sy$と変換する。$b=Sp$とおけば。$g(x)=(y-p)'S'AS(y-p)$が

$y=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\begin{matrix}\}r\\ \}k-r\end{matrix}$，$p=\begin{pmatrix}g\\ l\end{pmatrix}\begin{matrix}\}r\\ \}k-r\end{matrix}$　とおくと　$g(x)=(u-g)'B(u-g)+\gamma$となる。

$u=(u^1,u^2,\cdots,u^r)'$で，$u^1=\eta$ (constant)の下で$(u-g)'B(u-g)+\gamma$の最小値

を求める。$u=\begin{pmatrix}\eta\\ u_2\end{pmatrix}\begin{matrix}\}1\\ \}r-1\end{matrix}$，$g=\begin{pmatrix}g^1\\ g_2\end{pmatrix}\begin{matrix}\}1\\ \}r-1\end{matrix}$，$B=\begin{pmatrix}b^{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$とおく。$B_{22}$は$(r-1)\times(r-1)$.

symmetric. p.d であり、$G(u_2|\eta) \equiv (\eta-g^1, (u_2-g_2)')\begin{pmatrix} b'' & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta-g^1\\ u_2-g_2\end{pmatrix} + \gamma$

$= (u_2-g_2)'B_{22}(u_2-g_2) + 2(\eta-g^1)B_{12}(u_2-g_2) + b''(\eta-g^1)^2+\gamma$

$=(u_2-g_2-(\eta-g^1)B_{22}^{-1}B_{21})'B_{22}(u_2-g_2-(\eta-g^1)B_{22}^{-1}B_{21}) - (\eta-g^1)^2B_{12}B_{22}^{-1}B_{21} + b''(\eta-g^1)^2+\gamma$

となる。∴ $G(\eta)\equiv \min_{u_2} G(u_2|\eta) = (b''-B_{12}B_{22}^{-1}B_{21})(\eta-g^1)^2+\gamma \geqq I_D$ となる。ここで $|B| = |B_{22}|\cdot(b''-B_{12}B_{22}^{-1}B_{21})>0$, $|B_{22}|>0$ より、$b''-B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}>0$.

(II) $d \notin \mathcal{L}[t_1,\cdots,t_r]$ の場合、$x=Tz$, $b=Tg$ と変換する。$g(x)\equiv G(z)$ $= (z-g)'\Lambda(z-g)+\gamma = \sum_{i=1}^r \lambda_i(z^i-g^i)^2+\gamma$ となる。$S=[d,*\cdots*]\in O(k)$ を任意に1つ定めると適当な $Q\in O(k)$ により $S=TQ$ となる。さて、$x=Sy$ と変換すると、$Tz=x=Sy=TQy$、従って $z=Qy$、即ち $y=Q'z$ である。∴ $y^1=\sum_{j=1}^k q_{j1}z^j$ $(Q=(q_{ij}))$、ここで $S=TQ$ より、$d\equiv s_1=\sum_{j=1}^k q_{j1}t_j$ である。$d\notin\mathcal{L}[t_1,\cdots,t_r]$ より $\exists j_0\geqq r+1$ に対して $q_{j_0 1}\neq 0$ である。さて $y^1=\eta$ (constant) の下で $G(z)$ の最小値を求める。$\eta=\sum_{j=1}^k q_{j1}z^j(=y^1)$ が z に対する制約条件である。特別な場合として、$z^1=g^1,\cdots z^r=g^r$, $z^{r+1}=\cdots=z^{j_0-1}=z^{j_0+1}=\cdots=z^k=0$ とおけば制約式は、$\eta=\sum_{j=1}^r q_{j1}g^j+q_{j_0 1}z^{j_0}$、即ち $z^{j_0}=\frac{1}{q_{j_0 1}}(\eta-\sum_{j=1}^r q_{j1}g^j)$ である。この z に対して $G(z)=\gamma$ であるから $\min_{y^1=\eta} g(x)=\gamma$ である。所で、$x=Sy$ より $y=S'x$、∴ $y^1=s_1'x=d'x$ である。

(I) の場合、$S'AS=\begin{pmatrix}B&0\\0&0\end{pmatrix}$ より $b''=s_1'As_1=d'Ad$, 他方 $b=Sp$ $=S\binom{g}{\ell}$、よって $\binom{g}{\ell}=S'b$ より $g^1=s_1'b=d'b$ である。以上から、

$$f(x)=\begin{cases}(d'Ad-B_{12}B_{22}^{-1}B_{21})(d'(x-b))^2+\gamma & :\text{(I)の場合}\\ \gamma & :\text{(II)の場合}\end{cases}$$

とおけばよい。(証終)

参考文献

[1] Isii,K., Taga,Y. (1974), "Mathematical programming approach to a minimax theorem of statistical discrimination applicable to pattern recognition". IFIP Conference of Optimization Techniques in Novosibirsk.

[2] Isii,K. (1964), "Inequalities of the types of Chebyshev and Cramér-Rao and mathematical programming". Ann. Inst. Stat. Math., Vol.16.

[3] 多賀.西.石井(1975),"統計的判別法について"数研講究録 231

[4] Chernoff,H. (1971), "A bound on the classification error for discriminating between populations with specified means and variances", Studi di probabilitā, statistica e ricerca operativa in onore di Giuseppe Pompilj.