数理解析研究所講究録
第 247 巻 1975 年 115-125

定常安定過程について

東北大 経済学部 細谷 雄三

1. 序

頑健性の議論或いは局外値の問題を扱う際には、確率モデルとして"すその長い"分布族が用いられる。安定分布（stable distribution）はすその長い分布族のうちでも、Domain of Attraction を持ち、かつ Affine 変換に関して不変であるという性質を持っている。従って正規性の仮定をはずして、より広い分布族を統計的推論の対象とする場合には、安定分布は当然その考察の対象に入れられるべき分布族となるであろう。時系列解析においては、これまで主に広義定常過程或いは定常正規過程が取扱われてきており、推論を問題とする場合は後者の過程（或いはそれと同程度に強い仮定を必要とする過程）に分析が集中していたと言えるであろう。

本論は二次のモーメントの存在の仮定をはずして、その代りに定常安定過程を構成し、その若干の性質を考察すること

を目的としている。なお本論は細谷（1975）の概要であり、諸結果の証明は省略されている。

2. 多変量安定分布の特性関数

確率変数 X が対称な安定分布に従うとき、定数 α（$0<\alpha\leq 2$）が存在してその特性関数 $f(u)$ は

$$\log f(u) = iuc - d|u|^{\alpha} \qquad (d>0)$$

と表現されることが知られている。本節はこの表現を対称な多変量安定分布について拡張する。さて（p 次元）確率ベクトル $\underset{\sim}{X}$ は次の場合安定分布をもつとよぶことにする。すなわち、あらゆる正整数 k と、$\underset{\sim}{X}$ と同じ分布にしたがう独立な確率ベクトル $\underset{\sim}{X}_1, \cdots, \underset{\sim}{X}_k$ に対して、

$$\mathcal{L}(\underset{\sim}{X}_1 + \cdots + \underset{\sim}{X}_k) = \mathcal{L}(a_k \underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{b}_k)$$

となる定数 a_k とベクトル $\underset{\sim}{b}_k$ が存在する。

<u>定理</u>　多変量分布が対称な安定分布である為の必要十分条件は、その特性関数 $f(\underset{\sim}{u})$ が

$$\log f(\underset{\sim}{u}) = i\sum_{j=1}^{p}\beta_j u_j - \int\cdots\int_{R^p} |\Sigma_i u_i x_i|^{\alpha}\,\psi(d\underset{\sim}{X}) \qquad (0<\alpha\leq 2)$$

として与えられることである，ただし ψ は

$$\int\cdots\int |\Sigma X_i^2|^{\frac{\alpha}{2}} \psi(d\underset{\sim}{X}) < \infty$$

を満たす（必ずしも有限でない）$\mathcal{B}(R^p)$ の上の測度である。

（略証）

安定分布は無限分解可能分布でもある。　多変量無限分解可能分布の特性関数 $f(\underset{\sim}{u})$ は、

$$\log f(\underset{\sim}{u}) = i\sum_{j=1}^{p}\beta_j u_j - \frac{1}{2}\Sigma_i\Sigma_j \sigma_{ij} u_i u_j$$
$$+ \int\cdots\int_{R^p}\left(e^{i\Sigma u_i x_i} - 1 - \frac{i\Sigma u_i x_i}{1+\Sigma X_i^2}\right)\frac{1+\Sigma X_i^2}{\Sigma X_i^2}\nu(d\underset{\sim}{X})$$

と一意的に表現される、ただし ν は原点に positive mass を与えない有限測度である。　以下では $\sigma_{ij} = 0$，$i, j = 1, 2, \cdots, p$，を仮定する（もしいずれかの σ_{ij} が非零であれば、$\log f(\underset{\sim}{u})$ は安定分布に対して必ず、

$$\log f(\underset{\sim}{u}) = i\sum_{j=1}^{p}\beta_j u_j - \frac{1}{2}\Sigma_i\Sigma_j \sigma_{ij} u_i u_j$$

という形になることが証明出来る）。　さて $\theta(\underset{\sim}{u})$ をある多変量安定分布の対数特性関数とする。　安定分布の定義から、

$$k\,\theta(\underset{\sim}{u}) = i\,\Sigma_j\, b_{k,j} u_j + \theta(a_k \underset{\sim}{u})$$

が成立する。$\mathcal{B}(R^p)$ の上の測度 μ, μ_k をそれぞれ

$$\mu(B) = \int_B \cdots \int \frac{1+\sum X_i^2}{\sum X_i^2} \nu(d\underset{\sim}{X}), \quad \mu_k(B) = \mu(\underset{\sim}{z}\ ;\ a_k \underset{\sim}{z} \in B)$$

$(B \in \mathcal{B}(R^p))$ によって定義する。この時、μ と μ_k に対して、$k\mu(d\underset{\sim}{X}) = \mu_k(d\underset{\sim}{X})$ が成立する。

次に $T_p = \{\underset{\sim}{X} \in R^p : \sum X_i^2 = 1\}$ とし、変換 $\rho : R^p \cap \{\underset{\sim}{0}\}' \longrightarrow [0, \infty) \times T_p$ を $\rho(\underset{\sim}{X}) = (\sqrt{\sum X_i^2}\ ;\ X_i / \sqrt{\sum X_i^2},\ i = 1, 2, \cdots, p)$ によって定義する。測度 ξ, ξ_k をそれぞれ、μ, μ_k から変換 ρ によって $(0, \infty) \times T_p$ の上に誘導された測度とすれば、この ξ と ξ_k に対して、

(1) $$\xi_k([\alpha, \infty) \times D_p) = \xi([\frac{\alpha}{k^\lambda}, \infty) \times D_p)$$

(2) $$\xi_k([\alpha, \infty) \times D_p) = k\,\xi([\alpha, \infty) \times D_p)$$

が成立する、ただし $\alpha, \lambda > 0$ であり、$D_p \in \mathcal{B}(T_p)$。(1) と (2) から、任意の $x \in R^+$ と D_p に対して

$$\xi([x, \infty) \times D_p) = \frac{1}{x^{1/\lambda}} \xi([1, \infty) \times D_p)$$

が証明出来る。$\eta(D_p) = \xi([1, \infty) \times D_p)$ によって $\mathcal{B}(T_p)$ 上の測度 η を定義し、$\underset{\sim}{z} = (r, \underset{\sim}{y})$, $r = \sqrt{\sum X_i^2}$, $\underset{\sim}{y} = \{X_i / r,\ i = 1, 2, \cdots, p\}$ とすれば、

$$\int\cdots\int\left(e^{i\Sigma u_i x_i}-1-\frac{i\Sigma u_i x_i}{1+\Sigma x_i^2}\right)\mu(d\underset{\sim}{x})=\int\cdots\int\left(e^{ir\Sigma u_i y_i}-1-\frac{ir\Sigma u_i y_i}{1+r^2}\right)\xi(d\underset{\sim}{z})$$

$$=\int\cdots\int\left(e^{ir\Sigma u_i y_i}-1-\frac{ir\Sigma u_i y_i}{1+r^2}\right)\frac{dr}{r^{1+\alpha}}\eta(d\underset{\sim}{y})$$

となる。さて対称測度を次のように定義する。$B\in\mathcal{B}(T_p)$ に対して、$B^*=\{\underset{\sim}{y}\in T_p : -\underset{\sim}{y}\in B\}$ とするとき、すべての B に対して $\mu(B)=\mu^*(B)$ ならば、μ は対称であるという。さて対称な安定分布に対して、

$$\log f(\underset{\sim}{u})=i\Sigma\beta_i u_i+\int\cdots\int_{(0,\infty)\times T_p}\left(e^{ir\Sigma u_i y_i}-1-\frac{ir\Sigma u_i y_i}{1+r^2}\right)\frac{dr}{|r|^{1+\alpha}}\eta(d\underset{\sim}{y})$$

$$=i\Sigma\beta_i u_i+\frac{1}{2}\int_{T_p}\Big[\int_{-\infty}^{0}\left(e^{ir(\Sigma u_i y_i)}-1-\frac{ir(\Sigma u_i y_i)}{1+r^2}\right)\frac{dr}{|r|^{1+\alpha}}$$

$$+\int_0^{\infty}e^{ir(\Sigma u_i y_i)}-1-\frac{ir(\Sigma u_i y_i)}{1+r^2}\Big)\frac{dr}{r^{1+\alpha}}\Big]\eta(d\underset{\sim}{y})$$

となるが、上式のカッコの中は $-|\Sigma u_i y_i|^\alpha$ に等しい。したがって $\xi(d\underset{\sim}{y})=\eta(d\underset{\sim}{y})+\eta(-d\underset{\sim}{y})$ と置けば、対称安定分布の特性関数は、

(3) $$\log f(\underset{\sim}{u})=i\Sigma\beta_i u_i-\int_{T_p}|\Sigma u_i y_i|^\alpha\,\xi(d\underset{\sim}{y})$$

と表わされる。これが安定分布であるための十分条件であることは容易に導ける。表現(3)は単位球上の測度 ξ を用

りているが、応用上便利な形は次で与えられる。すなわち

$$(4)\qquad \log f(\underset{\sim}{u}) = i\sum \beta_i u_i - \int\cdots\int_{R^p} |\sum u_i x_i|^\alpha \psi(d\underset{\sim}{X})$$

ここで ψ は $\int\cdots\int |\sum X_i^2|^{\frac{\alpha}{2}} \psi(d\underset{\sim}{X}) < \infty$ となる $\mathcal{B}(R^p)$ 上の測度である。(3) は (4) の特殊な場合であるから、(4) から (3) が導かれることだけを示せば十分である。(4) の ψ は対称であるとする（さもなければ $\psi^*(B) = \frac{1}{2}\psi(B) + \frac{1}{2}\psi(-B)$ と定義しなおせばよい）。変換 $\rho(\underset{\sim}{X}) = (r, \underset{\sim}{y})$ によって $(0, \infty) \times T_p$ に誘導された測度を ξ とすれば、条件により、

$$\int\cdots\int_{(0,\infty)\times T_p} r^\alpha \xi(dr, d\underset{\sim}{y}) < \infty$$

となる。したがって

$$\xi^*(d\underset{\sim}{y}) = \int_0^\infty r^\alpha \xi(dr, d\underset{\sim}{y})$$

とおけば、ξ^* は $\mathcal{B}(T_p)$ 上で定義された有限測度となる。

3. 定常安定過程

本節は広義定常過程の理論で知られている型の定常過程を安定分布について構成する。まず安定過程を定義する。確率空間 $(R^\infty, \mathcal{B}(R^\infty), \mu)$ が与えられたものとする。$\mu_J(B) = \mu(B \times \prod_{i\in I-J} R_i)$ とおく。ただし $R_i = R\ (i \in I)$ であり、J

はIの有限集合とする。 さてIの任意の有限集合Jに対して、μ_J の特性関数 $f_J(\underset{\sim}{u})$ が

$$\log f_J(\underset{\sim}{u}) = i\sum_{j\in J}\beta_j u_j - \int\cdots\int_{\prod_{j\in J} R_j} \left|\sum_{j\in J} u_j x_j\right|^\alpha \psi_J(d\underset{\sim}{x})$$

と表現されるとき、確率空間 $(R^\infty, \mathcal{B}(R^\infty), \mu)$ を(離散時間)安定過程とよぶ、ただし $0<\alpha\leq 2$, ψ_J は前節の条件を満たすものとする。 さらに任意の整数 k に対して、

$$f_J(\underset{\sim}{u}) = f_{J+k}(\underset{\sim}{u})$$

が成立するとき、(離散時間)定常的安定過程とよぶことにする。

<u>例 1</u>(線型安定過程) $\{X_t,\ t\in I\}$ が独立な安定分布をする確率変数列であるとき、$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i X_{t-i}$ とすれば、Iの任意の有限部分集合 $\{t_1, t_2, \cdots, t_k\}$ に対して $Y_{t_1}, \cdots, Y_{t_k}$ は $\sum|\gamma_i|^d < \infty$ ($d = \inf\{1, \alpha\}$) ならば多変量安定分布にしたがうことが前節の定理を用いて示される。 さらに $\{Y_t : t\in I\}$ が定常的安定過程であることが、Kolmogorov の一致性の条件を吟味することによって分る。 つまり、

$$\log f_{t_1,\cdots,t_k}(u_{t_1},\cdots,u_{t_k}) = i\beta\sum_{i=1}^{k} u_{t_i} - C\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{i=0}^{k}\gamma_{t_i-\ell}u_{t_i}\right|^\alpha$$

から、$f_{t_1,\cdots,t_k}(u_{t_1},\cdots,u_{t_\ell},0,\cdots,0) = f_{t_1,\cdots,t_\ell}(u_{t_1},\cdots,u_{t_\ell})$

（$l<k$）が成り立ち、さらに $f_{t_1,\cdots,t_k}(u_{t_1},\cdots,u_{t_l})$ は $t_1,\cdots,t_k$ の任意の置換に関して不変である。

例2（自己回帰型安定過程） 実数 $\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_p$ に対して、$\sum_{i=0}^{p}\xi_i z^i$ の零点がすべて単位円の外にあると仮定する。このとき、次の展開

(5) $$\frac{1}{\sum \xi_i z^i} = \sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i z^i$$

は単位円周上で一様収束し、

(6) $$\sum_{j=0}^{p}\xi_j\gamma_{i-j} = 1\ ,\quad i=0\ ;\quad \sum_{j=0}^{p}\xi_j\gamma_{i-j}=0\ ,\quad i\neq 0$$

が成立する。さて $\{X_t\}$ が独立で、それぞれの特性関数が $\exp\{i\beta u - c|u|^\alpha\}$ （$c>0$）である安定確率変数列であるとする。(5) で与えられた γ_i を用いて線型安定過程 $Y_t=\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i X_{t-i}$ を構成する。この $\{Y_t\}$ から $Z_t=\sum_{i=0}^{p}\xi_i Y_{t-i}$ を作り、$\{Z_t\}$ の任意の部分集合 $Z_{t_1},\cdots,Z_{t_k}$ に対して特性関数を計算すると、

$$\begin{aligned} f(u_1,\cdots,u_k) &= E\{\exp[i\sum_{j=1}^{k}u_j z_{t_j}]\} \\ &= E[\exp\{i\sum u_j(\sum_{n=0}^{p}\xi_n(\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m X_{t_j-m-n}))\}] \\ &= \prod_j \exp\{i\beta u_j - c|u_j|^\alpha\} \end{aligned}$$

となり、$\{Z_t\}$ は i.i.d. の安定確率変数列となることが分る。したがって、線型安定過程 $\{Y_t\}$ は等式 $\sum_{i=0}^{p}\xi_i Y_{t-i}=X_t$ に

よって生成された確率過程であると見なすことが出来る。

例3（スペクトラム表現をもつ定常安定過程）　I の任意の有限部分集合 $(t_1, \cdots, t_k)$ に対して

(7)　$$f(u_{t_1}, \cdots, u_{t_k}) = \exp\left\{-\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{j=1}^{k} u_{t_j} e^{it_j\omega}\right|^{\alpha} dF(\omega)\right\} \quad (0<\alpha<2)$$

と定義される関数 f を考える。$f(u_{t_1}, \cdots, u_{t_k})$ は多変量安定分布の特性関数になっており、$(t_1, \cdots, t_k)$ が I のすべての有限部分集合の上を動くとき f は一定の定常安定過程を規定することがやはり Kolmogorov の一致性の条件を吟味することから証明される。この安定過程は広義定常過程の理論で知られているスペクトラム表現

(8)　$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} dZ(\omega)$$

（$Z(\omega)$ は直交ランダム測度）に対応する表現をもつ。いま $\mathcal{S}$ によってトーラス $(-\pi, \pi]$ の上の無限微分可能関数の全体を表わすと、汎関数

$$C(u) = \exp\left\{-\int_{-\pi}^{\pi}|u(\omega)|^{\alpha} dF(\omega)\right\}, \quad u \in \mathcal{S}$$

は、F を有限測度とするとき特性汎関数になっており、しかも $\mathcal{S}$ は核空間であるから、$C(u)$ は $\mathcal{S}$ の双対空間 $\mathcal{S}'$ の点を sample path とする一般化確率過程を一意的に規定する。こ

の一般化確率過程を $\underset{\sim}{Z}$ で表わし、トーラス上の関数 $e^{it\omega}$ を e_t で表わすとき、$X_t = \langle e_t, \underset{\sim}{Z} \rangle$, $t \in I$, は安定過程をなし、その特性関数は(7)で表現される。$X_t = \langle e_t, \underset{\sim}{X} \rangle$ はスペクトラム表現(8)をちょうど $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ の上の duality で表現したものと考えることが出来るであろう。広義定常過程に対してはそのスペクトラムを推定するためにピリオドグラムが用いられるが、定常安定過程については次の定理が成立する。

<u>定理</u>　$\{X_t\}$ はスペクトラム表現をもつ定常的安定過程であると仮定する。また $X_{t_1}, \cdots, X_{t_k}$ の多変量特性関数が(7)で与えられ、測度 F は密度関数 f をもち、λ を f のルベーグ点であるとするとき、$1 < \alpha < 2$ ならば、

$$Y_n(\lambda) = \frac{C_n^{1/\alpha}}{(2\pi)^{1/\alpha}(2n+1)^{(\alpha-1)/\alpha}} \sum_{j=-2n}^{2n} X_j e^{i\lambda j}$$

は漸近的に特性関数 $\exp\{-|u|^\alpha f(\lambda)\}$ の安定分布をする，ただし C_n は

$$C_n = \left[\frac{1}{2\pi} \frac{1}{(2n+1)^{\alpha-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin\{(n+\frac{1}{2})\omega\}}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right|^\alpha d\omega \right]^{-1}$$

によって与えられる。

4. 線型安定過程の正則性

$\{Y_t(\omega)\}$ を $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$ の上で定義された確率過程であ

り、$t_1, \cdots, t_k \leq t$, $B_{t_1}, \cdots, B_{t_k}$ をRの任意のボレル集合とするとき $A = \{\omega \in \Omega : Y_{t_1}(\omega) \in B_{t_1}, \cdots, Y_{t_k}(\omega) \in B_{t_k}\}$ という形の集合の全体によって生成されるσ-加法族を $\mathcal{F}_{-\infty}^{t}$ で表わす。$\mathcal{F}_{t}^{\infty}$ と $\mathcal{F}_{-\infty}^{\infty}$ も同様に定義する。この時、もし任意の $A \in \mathcal{F}_{-\infty}^{\infty}$ に対して

$$\lim_{t \to -\infty} \sup_{B \in \mathcal{F}_{-\infty}^{t}} |\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0$$

ならば $\{Y_t(\omega)\}$ を正則であるとよび、また任意のtに対して、

$$\lim_{\tau \to \infty} \sup_{\substack{A \in \mathcal{F}_{-\infty}^{t} \\ B \in \mathcal{F}_{t+\tau}^{\infty}}} |\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0$$

が成立するときは完全正則であるとよぶ。

<u>定理</u>　$\{X_t\}$ はその特性関数が $\exp\{i\beta u - c|u|^{\alpha}\}$ $(1 < \alpha \leq 2)$ である独立な確率変数列であるとする。$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i X_{t-i}$ によって生成される線型安定過程 $\{Y_t\}$ は $\sum_{i=0}^{\infty} i|\gamma_i| < \infty$ ならば正則である。さらに自己回帰型安定過程は完全正則である。

参考文献

細谷雄三（1975）"Stationary Stable Processes and Their Regularities" Discussion Paper No. 18 Dept. of Economics, Tohoku Univ.