数理解析研究所講究録
第 248 巻 1975 年 1-9

特異 Cauchy 問題

京工繊工業短大　浜田雄策

C^{n+1} の点を $x=(x_0, x_1, \cdots, x_n)$, $x'=(x_1, \cdots, x_n)$ とかく。

原点の近傍 Ω で正則な係数をもつ m 階の微分作用素

$$a(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad D=(D_0, \cdots, D_n)$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

を考える。その特性多項式を

$$g(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad \xi = (\xi_0, \cdots, \xi_n)$$

g の既約分解を

$$g(x, \xi) = \prod_{s=1}^{t} g_s(x, \xi)^{m_s}$$

としよう。そのとき，g の reduced polynomial は

$$g_0(x, \xi) = \prod_{s=1}^{t} g_s(x, \xi)$$

である。g_s の次数を d_s とするとき g_0 の次数は $d = \sum_{s=1}^{t} d_s$ となる。

S を超平面 $x_0 = 0$ で $g(x, D)$ にかんして非特性，
T を $(n-1)$-平面 $x_0 = x_1 = 0$ としよう。

$g_0(0;\xi_0,1,0,\cdots,0)=0$ は d 個の相異る根をもつと仮定する。そのとき T を通る d 個の相異る特性曲面 K_i ($k^i(x)=0$, $k^i(0,x')=x_1$) が存在する。

さて Cauchy 問題

$$\begin{cases} a(x,D)\,u(x)=0 \\ D_0^h u(0,x')=w_h(x'), \qquad 0\le h\le m-1 \end{cases}$$

において $w_h(x')$ $(0\le h\le m-1)$ が T に沿って singularity をもつとしよう。

w_h が S 上で uniform で T に沿って pole をもつとき我々は既に考察した。[2]. 又, Lamport [3] もこれと同じような結果を得ている。

Wagschal [6], [7] は simple characteristic をもつ方程式系において, $w_h(x')$ が T に沿って任意の特異性, 分岐も許す 場合について研究した。彼の方法は重複度一定な多重特性根をもつ場合にも有効であることを, Leray, Wagschal は注意した。また Leray [4], [5] は hyperbolicité partielle の概念を導入し Gevrey class でのその Cauchy 問題を論じた。

これらの問題, 即ち多重特性根をもつ方程式系の分岐 Cauchy 問題, 及び systèmes des équations partiellement hyperboliques にかんする Gevrey class での Cauchy 問題

は統一的に integro - differential equation の問題として取り扱われることが出来る。[8]

ここでは [8] の分岐 Cauchy 問題についての結果の紹介をすることにする。簡単のために、単独の方程式について述べよう。

Cauchy 問題

$$(1)\qquad \begin{cases} a(x, D)\, u(x) = v(x) \\ D_0^h u(0, x') = w_h(x'), \quad 0 \le h \le m-1 \end{cases}$$

において

v, $w_h(x')$ はつぎの条件をみたすとしよう。

i) Ω_1 (原点の近傍) $\subset \Omega$ を $\Omega_1 - K^i$ $(1 \le i \le d)$ が connected なるようにとる。

ii) $w_h(x')$ $(0 \le h \le m-1)$ は $\Omega_1 \cap (S - T) \ni y$ の S にかんする近傍で正則で $\mathcal{R}(\Omega_1 \cap (S - T))$ 1) に解析接続される。

iii) v^i $(1 \le i \le d)$ は y の近傍で正則で $\mathcal{R}(\Omega_1 - K^i)$ に解析接続され，$v = \sum_{i=1}^{d} v_i$ とかかれる。

註 1) V が complex analytic variety のとき V の universal covering space に complex analytic structure を入れたものを $\mathcal{R}(V)$ とかく。

定理1 つぎの性質をもつ原点の近傍 Ω_2，および u^i ($1 \leq i \leq d$) が存在する。Ω_2 は y を含み $\Omega_2 - K_i$ は connected である。u^i は y の近傍で正則で $\mathcal{R}(\Omega_2 - K_i)$ に解析接続され，Cauchy 問題 (1) の解 u は

$$u(x) = \sum_{i=1}^{d} u_i(x)$$

と書き表わされる。

さて Cauchy 問題(1) は null Cauchy 問題

$$(2) \qquad \begin{cases} a(x, D)\, u(x) = \sum_{i=1}^{d} v_i(x) \\ D_0^h u(x)\big|_S = 0 \qquad , \quad 0 \leq h \leq m-1 \end{cases}$$

に帰着される。

$$\hat{g}(x, \xi) = \prod_{s=1}^{t} g_s(x, \xi)^{m_0 - m_s}, \qquad m_0 = \max_{1 \leq s \leq t} m_s$$

$$h(x, \xi) = g(x, \xi)\, \hat{g}(x, \xi) = g_0(x, \xi)^{m_0}$$

とおき，$\quad u(x) = \hat{g}(x, D)\, \hat{u}(x)$

とすると，(2) は

$$(3) \qquad \begin{cases} h(x, D)\, \hat{u}(x) + b(x, D)\, \hat{u}(x) = \sum_{i=1}^{d} v_i(x) \\ D_0^h \hat{u}(x)\big|_S = 0 , \qquad 0 \leq h \leq p-1 , \qquad p = m_0 d \end{cases}$$

ここで $b(x, D)$ は次数 p の微分作用素，

となり，$\hat{u}(x)$ を求めればよい。今后 $\hat{u}$ を u とかく。

[2] ではこれをとくのに逐次近似法で

$$\begin{cases} h(x, D)\, U^{(0)} = \sum_{i=1}^{d} v^i(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U^{(0)} = O(x_0^p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x, D)\,U^{(k)} = b(x, D)\,U^{(k-1)} \\ U^{(k)} = O(x_0^p) \end{cases}$$

とおき $v_i(x) = \dfrac{w_i(x)}{[k^i(x)]^q}$ のとき

$$f_0(s) = \frac{(q-p+1)!\,(-1)^{q-p+1}}{s^{q-p+1}}, \qquad \frac{d}{ds} f_j(s) = f_{j-1}(s)$$

なる補助函数を導入して

$$U^{(k)} = \sum_{\lambda=1}^{d} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(k^\lambda(x))\, U_{j,\lambda}^{(k)}$$

とおいて各 $U_{j,\lambda}^{(k)}$ を求め，つぎにその収束を示した。

この Process は非常に煩雑であり，2，3重級数，或いは f_j のとりかえをせねばならない。これらの推論をもっと直接的に一般の分岐する場合もこめて議論するべく Wagschal [7] 流に integro-differential equation の問題に帰着させる。以下そのreduction を述べよう。

$\mathbb{D}_\omega = \{t \in C\,;\ |t| < \omega\}$，$\dot{\mathbb{D}}_\omega = \mathbb{D}_\omega - \{0\} \ni a$ とかき，$\mathcal{R}_\omega = \mathcal{R}(\dot{\mathbb{D}}_\omega)$ とする。

$\mathcal{R}_\omega$ の path $\tilde{\gamma} : I = [0,1] \longrightarrow \mathcal{R}_\omega$，$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{a}$，$\tilde{\gamma}(1) = \tilde{t}$ を考える。その Projection γ は $I = [0,1] \longrightarrow \dot{\mathbb{D}}_\omega$ である。$u(\tilde{t})$ を $\mathcal{R}_\omega$ 上の正則函数とするとき

$D_t^j u(\tilde{t})$ $(j \geqq 0)$ は $u(\tilde{t})$ の j 回導函数，又 $\gamma(\theta)$ が class C^1 のとき

$$D_t^{-1} u(\hat{t}) = \int_0^1 u(\gamma(\theta))\gamma'(\theta)\,d\theta$$ とおく。即ち

$u(\hat{t})$ の原始函数で $u(\tilde{a}) = 0$ なるものである。

$j \geqq 0$ 又は $j, k \leqq 0$ のとき

(4) $$D_t^j \circ D_t^k = D_t^{j+k}$$

が成り立つ。

仮定より $v^i(x)$ は $\mathcal{R}(\Omega, -k^i)$ で正則であるから

$$v^i(x) = v^i(k^i(x), x)\ ,\quad v^i(t, x) \text{ は } (a, y)$$

$(a = k^i(y))$ の近傍で正則で $\mathcal{R}_\omega \times \Omega_3$ に解析接続される，と書ける。

(3) の解 $u(x)$ を $u(x) = \sum_{i=1}^{d} D_t^{s_0} u^i(k^i(x), x)$, $s_0 \geqq m_0 - 1$ の形でもとめよう。ここで $u^i(t, x)$ は $\mathcal{R}_\omega \times \Omega_4$ で正則な函数である。

さて Leibniz の公式

$$g(x, D)\, u(k(x), x) = \sum_{\ell=1}^{d} P_\ell(x, D)\, D_t^{d-\ell} u(t, x)\Big|_{t=k(x)}$$

が成り立つ。d は g の次数，$P_\ell(x, D)$ は order ℓ の微分作用素，特に $P_1(x, D) = \sum_{i=0}^{n} g_{\xi_i}(x, \mathrm{grad}\,k(x))\, D_i + a(x)$.

これを逐次用い，(4) を考慮して

$$D_0^{m_0} u^i(t, x) = \sum_{\ell=m_0}^{p} R_\ell(x, D)\, D_t^{m_0-\ell} u^i(t, x)$$
$$+ \sum_{\ell=0}^{p-1} R_\ell(x, D)\, D_t^{m_0-\ell-1} u^i(t, x) + D_t^{-s_0-p+m_0} v^i(t, x)$$

初期条件にかんしては

$$D_0^h u^i(t,0,x') = \sum_{j=1}^{d}\sum_{l=m_0}^{p-1} Q_l(x,D_0) D_t^{h-l} u^j(t,0,x')$$
$$+ \sum_{j=1}^{d}\sum_{l=1}^{m_0-1} Q_{l-1}(x,D_0) D_t^{h-l} u^j(t,0,x'), \quad 0 \leq h \leq m_0-1.$$

R_l, Q_l は l 次の微分作用素で，第1式の右辺第1項において $R_{m_0}(x,D)$ は D_0 にかんして次数 $< m_0$ である。

これらは，一般的な integro-differential equation の system (u は N-vector) として考えられる。即ち

$$(5)\quad \begin{cases} D_0^m u(t,x) = \sum_{l=m}^{n_0} A_l(x,D) D_t^{m-l} u(t,x) \\ \quad + \sum_{l=n_1}^{m-1} B_{l-n_2}(x,D) D_t^{m-l} u(t,x) + W_m(t,x) \\ D_0^h u(t,x) - \sum_{l=h}^{n_0} A_l(x,D) D_t^{h-l} u(t,x) \\ \quad - \sum_{l=l(h)}^{h-1} B_{l-n_2}(x,D) D_t^{h-l} u(t,x) - W_h(t,x) = O(x_0) \end{cases}$$

ここで $1 \leq n_2 \leq n_1 \leq m \leq n_0$，$l(h) = \mathrm{Max}(n_1+h-m, n_2)$
$h = l(h) \leq m - n_1$.　A_l, B_l は次数 l の matrix diff. op であり，第1式，第2式の右辺における A_m, A_h はそれぞれ D_0 にかんして次数が，m, h より小である。

simple characteristic の場合に対応する (5) においては，$m=1$ であり，従って (5) の第1式の右辺における

$$\sum_{l=n_1}^{m-1} B_{l-n_2}(x,D) D_t^{m-l} u(t,x)$$

の部分は消える。—— この場合については，既に Wagschal [7] で取り扱われている。

さて(5)に対してつぎの結果が成立する。

<u>定理2</u>　$\forall O$(原点の近傍)に対して

$\exists \omega_0 > 0$，$\exists O_1$(原点の近傍)；

$|a| < \omega \leq \omega_0$ なる $\forall \omega$ にかんして

$$w_h \in [\mathcal{H}(\mathcal{R}_\omega \times O)]^N \text{ ならば}$$

(5)は unique solution

$$u \in [\mathcal{H}(\mathcal{R}_\omega \times O_1)]^N \text{ をもつ。}$$

$\mathcal{H}(V)$ は V 上の正則函数が作る空間である。

斯様にして，定理1は定理2に帰着される。定理2の証明は逐次近似法でなされ，その収束は優函数の方法で示される。

文　献

[1] Gårding-Kotake-Leray. Bull. Soc. Math. France, 92, 1964, p. 263-361.

[2] Y. Hamada, C. R. Acad. Sc. Paris, Séries A. t. 276, 1973, p. 1681-1684.

[3] L. Lamport, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 79, 1973, p. 776-779.

[4] J. Leray, C. R. Acad. Sc. Paris, Séries A. t. 276, 1973, p. 1685-1687.

[5] J. Leray, Uspehi U.S.S.R 1974 (原文翻訳)

[6] C. Wagschal, C. R. Acad. Sc. Paris, Séries A. t.276 1973, p. 1677–1680.

[7] C. Wagschal. J. Math. pures et appl. 53, 1974, p. 147–164.

[8] Y. Hamada, J. Leray et C. Wagschal. en préparation.