数理解析研究所講究録
第 248 巻 1975 年 10-18

ある種の線型方程式（2変数）に対する浜田の定理について。

京大理 大学院　浦部治一郎

解析的係数の線型偏微分方程式に対する局所的Cauchy問題は初期平面が非特性的であり、初期値が解析的である時は、Cauchy-Ковалевская の定理として解析的な解の存在と一意性が知られている。初期値　が極などをもつ場合はどうなるのかを答えたのが浜田の定理である。浜田[1][2][3]は方程式の主要部の特性根の多重度が一定の場合に答を与えた。ここでは、その仮定をみたさない"ある種の方程式"に対して、浜田の定理を試みる。ここでの形式解の構成法は溝畑[1]を、形式解の収束性については浜田[3]、C. Wagschal[1], J-C. De Paris[1]を各々参照して下さい。以後$\mathbb{C}^2$の原点の近傍での話であり、微分作用素の係数はそこで解析的とする。

$$\begin{cases} P_m(t,x,\partial_t, x\partial_x) \equiv \sum_{\alpha+\beta=m} a_{\alpha,\beta}(t,x)\, x^\beta \partial_t^\alpha \partial_x^\beta \\ Q_n(t,x,\partial_t,\partial_x) \equiv \sum_{\alpha+\beta=n} b_{\alpha,\beta}(t,x)\, \partial_t^\alpha \partial_x^\beta \end{cases}$$ とおく。

[仮定 I]. $a_{m,0} \equiv 1$,　$b_{n,0} \equiv 1$.

[仮定II] $Q(0,0,\lambda,1)=0$ は　　　　　0と異なる、互いに相異なる n 根をもつ。

$$\begin{cases} L(t,x,\partial_t,\partial_x) \equiv P_m(t,x,\partial_t,x\partial_x)\,Q_n(t,x,\partial_t,\partial_x) \\ K(t,x,\partial_t,\partial_x) \equiv L(t,x,\partial_t,\partial_x) - M(t,x,\partial_t,\partial_x) \end{cases}$$ とおく。

(但し　Mは $n+m-1$ 次の任意の微分作用素。)

問題
$$\begin{cases} Ku=0. \\ \partial_t^{h} u(0,x) = \dfrac{(l_h-1)!}{x^{l_h}}(-1)^{l_h-1} \qquad (h=0,\cdots,m+n-1\ ,\ l_h>0) \end{cases}$$

[定理]「このCauchy問題は次の形の一意的な解をもつ。

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{V_j(t,x)}{x^j} + \sum_{h=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{U_j^{h}(t,x)}{[\varphi_h(t,x)]^j} + U_0^{h}(t,x)\log\varphi_h(t,x)\right)$$
$$+ V_0(t,x)\log x \quad + H(t,x)$$

(V_j, U_j^h, H は、原点の近傍で解析的)

$u(t,x)$は、$x=0$, $\varphi_h(t,x)=0$ $(h=1,\cdots,n)$ を除いた原点の近傍で解析的である。

$\varphi_h(t,x)$ は、$Q(t,x,\varphi_t,\varphi_x)=0$　$\varphi(0,x)=x$ の解。」

証明は (i) 形式解の構成、(ii) 形式解の収束性の証明；より成る。そのためにまず準備をする。

* (wave form)

$$f_\beta(\tau) = \begin{cases} (-1)^{-\beta-1}(-\beta-1)!\,\tau^\beta & (\beta<0) \\ \dfrac{\tau^\beta}{\beta!}\log\tau - \dfrac{A_\beta}{\beta!}\tau^\beta & (\beta\geq 0) \end{cases} \quad \begin{cases} A_\beta = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\beta} \\ A_0 = 0 \end{cases}$$

$$g_\beta(\tau) = \begin{cases} 0 & (\beta<0) \\ \dfrac{\tau^\beta}{\beta!} & (\beta\geq 0) \end{cases}$$

$$\frac{d}{d\tau} f_\beta = f_{\beta-1}, \qquad \frac{d}{d\tau} g_\beta = g_{\beta-1}$$

次の関係式が成立つ。

$$\begin{cases} x^\alpha f_\beta(\tau) = \mathcal{A}^\alpha(\beta) f_{\alpha+\beta}(\tau) + \mathcal{B}^\alpha(\beta)\, g_{\alpha+\beta}(\tau) & (\alpha=0,1,2,3,\cdots) \\ x^\alpha g_\beta(\tau) = \mathcal{A}^\alpha(\beta)\, g_{\alpha+\beta}(\tau) & (\alpha=0,1,2,3\cdots) \end{cases}$$

($\mathcal{A}^\alpha(\beta) = (\beta+1)\cdots(\beta+\alpha)$
$\mathcal{B}^\alpha(\beta)$ は $\mathbb{Z}$係数$\alpha-1$次のβの多項式.) $\mathcal{A}^0(\beta)\equiv 1$, $\mathcal{B}^0(\beta)\equiv 0$

*
$$\begin{cases} P_m[u f_j(x)] \equiv \sum_{i=0}^{m} p_i[u] f_{j-m+i}(x) \\ Q_n[u f_j(x)] \equiv \sum_{l=0}^{n} q_l[u] f_{j-n+l}(x) \end{cases}$$

(ここで p_i, q_l は各々 i次, l次の微分作用素.)

「lemma. $p_i = x^{m-i}\tilde{p}_i$ とかける. $\tilde{p}_i$: i次の微分作用素.」

* $$L[w f_j(x)] \equiv \sum_{k=0}^{m+n} \mathcal{L}_k[w] f_{j-(m+n)+k}(x)$$

$\mathcal{L}_k$ は k次の微分作用素で次のものである。

$$\mathcal{L}_k = \sum_{\substack{i+l=k \\ 0\leq i\leq m \\ 0\leq l\leq n}} p_i q_l$$

lemma ① $\mathcal{L}_k = x^{[m-k]_+}\hat{\mathcal{L}}_k$ とかける。

ここで $\hat{\mathcal{L}}_k$ は k 次の微分作用素、$[m-k]_+ = \begin{cases} m-k & (m-k \geq 0) \\ 0 & (m-k \leq 0) \end{cases}$

② $\mathcal{L}_m = \hat{\mathcal{L}}_m$ は $\mathcal{L}_m = p_m g_0 + x \hat{p}_{m-1} g_1 + \cdots + x^m \hat{p}_0 g_m$

で $p_m = P_m$, $g_0 = Q(t, x, 0, 1) \neq 0$ (仮定 II) に注意すると、

「$t=0$ は $\mathcal{L}_m$ に対して non-characteristic である。」事がわかる。

(i) 形式解の構成。

以後かんたんのため初期値を $u(0,x) = (l-1)!(-1)^{l-1}x^{-l}$,

$\partial_t^h u(0,x) = 0$ $(h = 1, \cdots, m+n-1)$ として話をすすめる。

次の如くしてとく。 $u = \sum_{s=0}^{\infty} u_s$

$$L u_0 = 0 \qquad ; \qquad L u_{s+1} = M u_s$$

$$\begin{cases} u(0,x) = (l-1)!(-1)^{l-1}x^{-l} \\ \partial_t^h u(0,x) = 0 \quad (h = 1, \cdots, m+n-1) \end{cases} \qquad ; \qquad \begin{cases} u(0,x) = 0 \\ \partial_t^h u(0,x) = 0 \quad (h = 1, \cdots, m+n-1) \end{cases}$$

$$u_s \equiv \sum_{p=-l-s(m-1)}^{\infty} \left(v_{p,s} f_p(x) + w_{p,s} g_p(x) \right) + \sum_{h=1}^{n} \sum_{p=-l-(s+1)(m-1)}^{\infty} u_{p,s}^h f_p(\varphi_h)$$

$s=0$ の場合 $v_{p,0}, w_{p,0}, u_{p,0}^h$ のみたすべき方程式と初期値を導く。

$$L u_0 = \sum_{p=-l}^{\infty} \Big\{ \sum_{i=0}^{m} \mathcal{L}_i[v_{p,0}] f_{p-n-m+i}(x) + \sum_{i=m+1}^{m+n} \mathcal{L}_i[v_{p,0}] f_{p-n-m+i}(x) +$$
$$\sum_{i=0}^{m} \mathcal{L}_i[w_{p,0}] g_{p-n-m+i}(x) + \sum_{i=m+1}^{m+n} \mathcal{L}_i[w_{p,0}] g_{p-n-m+i}(x) \Big\} + ※$$
$$= \sum_{p=-l}^{\infty} \Big\{ \sum_{i=0}^{m} x^{m-i} \hat{\mathcal{L}}_i[v_{p,0}] f_{p-n-m+i}(x) + \sum_{i=m+1}^{m+n} \mathcal{L}_i[v_{p,0}] f_{p-n-m+i}(x) +$$
$$\sum_{i=0}^{m} x^{m-i} \hat{\mathcal{L}}_i[w_{p,0}] g_{p-n-m+i}(x) + \sum_{i=m+1}^{m+n} \mathcal{L}_i[w_{p,0}] g_{p-n-m+i}(x) \Big\} + ※$$
$$= \sum_{p=-l}^{\infty} \Big\{ \sum_{i=0}^{m} \mathcal{F}^{m-i}(p-n-m+i) \hat{\mathcal{L}}_i[v_{p,0}] f_{p-n}(x) + \sum_{i=0}^{m} \mathcal{G}^{m-i}(p-n-m+i) \hat{\mathcal{L}}_i[v_{p,0}] g_{p-n}(x) +$$

$$+\sum_{i=m+1}^{m+n}\mathcal{L}_i[v_{p,0}]f_{p-n-m+i}(x)+\sum_{i=0}^{m}\mathcal{F}^{m-i}(p-n-m+i)\hat{\mathcal{L}}_i[w_{p,0}]g_{p-n}(x)$$

$$+\sum_{i=m+1}^{m+n}\mathcal{L}_i[w_{p,0}]g_{p-n-m+i}\Big\}+*$$

$$\left[\left\{\begin{array}{l}\sum_{i=0}^{m}\mathcal{F}^{m-i}(p-n+i-m)\hat{\mathcal{L}}_i\equiv\tilde{\mathcal{L}}_m(p)\\ \sum_{i=0}^{m}\mathcal{G}^{m-i}(p-n-m+i)\hat{\mathcal{L}}_i\equiv\tilde{\tilde{\mathcal{L}}}_m(p)\\ \quad\mathcal{L}_i\equiv\tilde{\mathcal{L}}_i(p)\quad(i=m+1,\cdots,m+n)\end{array}\right\}\text{とおく}\right]$$

$$=\sum_{p=-l}^{\infty}\Big\{\sum_{i=m}^{m+n}\tilde{\mathcal{L}}_i(p)[v_{p,0}]f_{p-n-m-i}(x)+\sum_{i=m}^{m+n}\tilde{\mathcal{L}}_i(p)[w_{p,0}]g_{p-n-m+i}+\tilde{\tilde{\mathcal{L}}}_m(p)[v_{p,0}]g_{p-n}(x)\Big\}+*$$

$$=\sum_{r=-l-n}^{\infty}\Big\{\sum_{i=m}^{m+n}\tilde{\mathcal{L}}_i(r+n+m-i)[v_{r+n+m-i,0}]f_r(x)+\sum_{i=m}^{m+n}\tilde{\mathcal{L}}_i(r+n+m-i)[w_{r+n+m-i,0}]g_r(x)$$
$$+\tilde{\tilde{\mathcal{L}}}_m(r+n)[v_{n+r,0}]g_r(x)\Big\}+*=0.$$

ここで $*=\sum_{h=1}^{n}\sum_{p=-l+m}^{\infty}\sum_{i=0}^{m+n}\mathcal{L}_i^h[u^h_{p,0}]f_{p-n-m+i}(\varphi_h)$

以上より、$v_{p,0}$ $w_{p,0}$ $u^h_{p,0}$ のみたす方程式は、次の如くである。

$$\left\{\begin{array}{l}\tilde{\mathcal{L}}_m(r+n)[v_{r+n,0}]=-\sum_{i=m+1}^{m+n}\mathcal{L}_i[v_{r+n+m-i,0}]\\ \tilde{\mathcal{L}}_m(r+n)[w_{r+n,0}]=-\sum_{i=m+1}^{m+n}\mathcal{L}_i[w_{r+n+m-i}]-\tilde{\tilde{\mathcal{L}}}_m[r+n][v_{n+r,0}]\\ \mathcal{L}_1^h[u^h_{r+n+m-1,0}]=-\sum_{i=2}^{m+n}\mathcal{L}_i^h[u^h_{r+n+m-i,0}]\end{array}\right.$$

(まず、$v_{r+n,0}$ を求めて、$w_{r+n,0}$ を求める。

次に、初期値 $v_{r,0}(0,x)\cdots\partial_t^{m-1}v_{r,0}(0,x)$, $u^h_{r,0}(0,x)$ は次の如くとする。

$$\left\{\begin{array}{l}v_{r,0}(0,x)=\sum_{i=m}^{m+n-1}N^0_{i,0}v_{r-i,0}+\sum_{i=1}^{m+n-1}M^0_{i,0}u^h_{r-i,0}\big|_{t=0}\\ \partial_t v_{r,0}(0,x)=\sum_{i=m}^{m+n-1}N^1_{i,0}v_{r-i,0}+\sum_{i=1}^{m+n-1}M^1_{i,0}u^h_{r-i,0}\big|_{t=0}\\ \vdots\\ \partial_t^{m-1}v_r(0,x)=\sum_{i=m}^{m+n-1}N^{m-1}_{i,0}v_{r-i,0}+\sum_{i=1}^{m+n-1}M^{m-1}_{i,0}u^h_{r-i,0}\big|_{t=0}\\ u^h_{r,0}(0,x)=\sum_{i=m}^{m+n-1}N^{m-1+h}_{i,0}[v_{r-i,0}]+\sum_{i=1}^{m+n-1}M^{m-1+h}_{i,0}u^h_{r-i,0}\big|_{t=0}\end{array}\right.$$

ここで $N_{i,0}^{k}$, $M_{i,0}^{k}$ は ∂_t のみの i 次の常微分作用素である。

次に一般の $s \geq 1$ の場合

$$Mu_s = \sum_{r=-l-(s+1)(m-1)-n}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{m+n-1} M_i [v_{r+m+n-1-i,s}] f_r(x) + \sum_{i=0}^{m+n-1} M_i [w_{r+m+n-1-i,s}] g_r(x) \right)$$
$$+ \sum_{h=1}^{n} \sum_{r=-l-s(m-1)-n}^{\infty} \sum_{i=0}^{m+n-1} M_i^h [u^h_{r+m+n-1-i,s}] f_r(\varphi_h)$$

次の方程式を得る。

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{\mathcal{L}}}_m(n+r)[v_{n+r,s+1}] = -\sum_{i=n+1}^{m+n} \mathcal{L}_i [v_{m+n+r-i,s+1}] + \sum_{i=0}^{m+n-1} M_i [v_{r+m+n-1-i,s}] \\ \tilde{\mathcal{L}}_m(n+r)[w_{n+r,s+1}] = -\sum_{i=m+1}^{m+n} \mathcal{L}_i [w_{m+n+r-i,s+1}] - \tilde{\tilde{\mathcal{L}}}_m(n+r)[v_{n+r,s+1}] + \sum_{i=0}^{m+n-1} M_i [w_{r+m+n-1-i,s}] \\ \mathcal{L}_1^h [u^h_{n+m+r-1,s+1}] = -\sum_{i=2}^{m+n} \mathcal{L}_i^h [u^h_{n+m+r-i,s+1}] + \sum_{i=0}^{n+m-1} M_i^h [u^h_{r+m+n-1-i,s}] \end{cases}$$

次に初期値 $v_{r,s}(0,x) \cdots \partial_t^{m-1} v_{r,s}(0,x)$, $u^h_{r,s}(0,x)$ は次の如くである。

$$\begin{cases} v_{r,s}(0,x) = \sum_{i=m}^{m+n-1} N_{i,s}^{0} v_{r-i,s} + \sum_{i=1}^{m+n} M_{i,s}^{0} u^h_{r-i,s} \Big|_{t=0} \\ \quad\vdots \\ \partial_t^{m-1} v_{r,s}(0,x) = \sum_{i=m}^{m+n-1} N_{i,s}^{m-1} v_{r-i,s} + \sum_{i=1}^{m+n} M_{i,s}^{m-1} u^h_{r-i,s} \Big|_{t=0} \\ u^h_{r,s}(0,x) = \sum_{i=m}^{m+n-1} N_{i,s}^{m-1+h} [v_{r-i,s}] + \sum_{i=1}^{m+n} M_{i,s}^{m-1+h} u^h_{r-i,s} \Big|_{t=0} \end{cases}$$

又初期値 $w_{r,s}(0,x) \cdots \partial_t^{m-1} w_{r,s}(0,x)$ は全て 0 である。

$N_{i,s}^{k}$ $M_{i,s}^{k}$ は ∂_t のみの i 次の常微分作用素である。

ii) 形式解の収束性 (浜田[3], C. Wagschal[1], による。)

(定義) $k \geq 0$

$$\begin{cases} \theta_k(r,z) \equiv k!/(r-z)^{k+1} \\ \theta_{-k}(r,z) \equiv \dfrac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!}{(k+n)!} \dfrac{z^{n+k}}{r^n} \end{cases} \quad \text{for } |z|<r.$$

$$\eta_{j,k}(R,r,z) \equiv \left(\frac{d}{dz}\right)^j [\theta_0(R,z)\theta_k(r,z)] \quad (R>r>|z|)$$

(定義) a, b を $n+1$ 変数 $z=(z_0,z_1,\cdots,z_n)$ の形式的巾級数とする

bがaの優級数である時（つまり $a \equiv \sum a_\alpha z^\alpha$, $b \equiv \sum b_\alpha z^\alpha$ で $|a_\alpha| \le b_\alpha$ が成立つ時）$a \ll b$ とかく。

Lemma1 ① $\frac{d}{d\zeta}\theta_k(r,\zeta) = \theta_{k+1}(r,\zeta)$

② $\theta_k(r,\zeta) \ll r\,\theta_{k+1}(r,\zeta)$

③ $\frac{1}{R-\zeta}\theta_k(r,\zeta) \ll \frac{1}{R-r}\theta_k(r,\zeta)$ $(k \geqq 0)$ $R>r$

④ $\frac{1}{R-\zeta}\theta_{-k}(r,\zeta) \ll \frac{T^{k+1}}{R}\theta_{-k}(r,\zeta)$ $(k \geqq 0)$

（但し、ここで $R \geqq 4r$ とする，T は R, r, k は無関係な定数 $\geqq 2$）

⑤ $\frac{d}{d\zeta}\eta_{j,k}(R,r,\zeta) = \eta_{j+1,k}(R,r,\zeta)$ $R>r$

⑥ $\eta_{j,k}(R,r,\zeta) \ll r\,\eta_{j+1,k}(R,r,\zeta)$ $R>r$

⑦ $\eta_{j,k}(R,r,\zeta) \ll \eta_{j+1,k-1}(R,r,\zeta)$ $R>r$

⑧ $\frac{1}{R'-\zeta}\eta_{j,k}(R,r,\zeta) \ll \frac{1}{R'-R}\eta_{j,k}(R,r,\zeta)$ $(R'>R>r)$

⑨ $\sigma\,\eta_{j,-s}(R,r,\zeta) \ll 4R\,\eta_{j,-s+1}(R,r,\zeta) \ll 4R\,\eta_{j+1,-s}(R,r,\zeta)$

（但し，$s \geqq 0$，$\sigma = 0,1,2,\cdots,s$ ） $R>r$.

Lemma2 $A \equiv \sum_{\substack{j \le m-1 \\ |\nu|+j \le m}} a_{\nu,j}(t,x)\left(\partial_x\right)^\nu \partial_t^j$ とする．

ここで $a_{\nu,j}(t,x)$ は (t,x) の形式的巾級数．

* $\tilde{A} \equiv \sum_{\substack{j \le m-1 \\ |\nu|+j \le m}} \tilde{a}_{\nu,j}(t,x)\,\partial_x^\nu \partial_t^j$

$\tilde{a}_{\nu,j}(t,x)$ は (t,x) の形式的巾級数で $\tilde{a}_{\nu,j} \gg a_{\nu,j}$

*, $f(t,x)$, $F(t,x)$ を共に (t,x) の形式的巾級数で $F \gg f$ とする．

* $y_k(x)$ $(k=0,\cdots,m-1)$ を x のみの形式的巾級数とする。

⇒ この時次の Cauchy 問題に対し一意的な形式的巾級数の解 $y(x)$ が存在する。

$$\begin{cases} \partial_t^m y = A[y] + f \\ \partial_t^k y(0,x) = y_k(x) \qquad (k=0,\cdots,m-1) \end{cases}$$

更に Y を次をみたす (t,x) の形式的巾級数とする

$$\begin{cases} \partial_t^m Y \gg \tilde{A}[Y] + F \\ \partial_t^k Y(0,x) \gg y_k(x) \end{cases}$$

この時 $Y(t,x) \gg y(t,x)$ である。

Lemma3 $A(t,x,\partial_t,\partial_x)$; $|x|+t|\leq R'$ で解析的な係数をもつ m 次の微分作用素で ∂_t に関しては m_t 次とする。この時次が成立つ。

$u \ll \eta_{j,k}(R,r,\xi)$ $\quad \xi = \rho t + x$. $\quad R' > R > r > |\xi|$. $\quad \rho \geq 1$

$\Rightarrow {}^{\exists}B$ (A と, R, R', r にのみよる定数) $\quad Au \ll B\rho^{m_t}\eta_{j+m,k}(R,K,\xi)$

以上の Lemma を使うと s と p による帰納法により次が成立つ。

Proposition

$$v_{p,s}(t,x),\ w_{p,s}(t,x),\ u_{p,s}^{h}(t,x) \ll B(l)\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{2p+ms} \eta_{n+2l+2p+2(n-1)s,\,-2ms-p-n-2l}(R,r,\xi)$$

(ここで, $\xi = \rho t + x$. で $R > r$ は充分小なる定数

$\rho(\geq 1)$ は充分大なる定数で, l と共に大きくなる。

$B(l)$; R, r, l, K にのみよる定数,

ε ($0 \lneqq \varepsilon < 1$) は, R, r, K にのみよる定数.)

この Proposition により $v_{p,s}, w_{p,s}, u_{p,s}^{h}$ が共通の存在領域を

もつ事が云えた。定理は Lemma 1 の㈢ と㈠に注意する事により云える。

参考文献

* Y. 浜田

[1] The. Singularities of the Solutions of the Cauchy Problem
Publ. RIMS. Kyoto University Vol 5. (1969) pp21–40

[2] On the Propagation of Singularities of the Solutions of the Cauchy Problem
Publ. RIMS. Kyoto University Vol 6 (1970) pp357～384

[3] Problème analytique de Cauchy à Caractéristiques multiple dont les Données de Cauchy Ont des Singularités Polaires. C.R. Acad. Sc. Paris. t276. 1973. Serie A. pp1681–3

* S. 溝畑

[1] Solutions nulles et Solutions non analytiques
J. Math. Kyoto. Univ. 1–2 (1962) pp271～302.

* J-C. De Paris

[1] Problème de Cauchy Analytique a Données Singulières pour Un Opérateur⋯
J. Math pures et appl. 51 (1972) p.p 465–488.

* C- Wagschal

[1] Problème de Cauchy Analytiques a Données Méromorphes
J. Math. pure et appl. 51 (1972) p.p 375～397.