数理解析研究所講究録
第 248 巻 1975 年 19-59

Fuchs双曲型方程式

東大 理　田原秀敏

19世紀後半に証明されたCauchy-Kowalevskyの定理は、その後の偏微分方程式論の中で一つの出発点としての意義をもっている。特に初期値問題という側面に着目すれば、それは双曲型方程式の理論として膨大な体系に発展してきた。従って、この定理を拡張する事は新しい数学の局面の可能性を示唆する。特に双曲型の理論の拡張を可能にするであろう。最近Baouendi-Goulaouic[1]はcharacteristic initial hypersurfaceをもつ作用素に迄Cauchy-Kowalevskyの定理を一般化した。彼等はそれを「Fuchs型」と呼んだが、それはnon-characteristicの場合のかなり自然な拡張を与えている。(Hasegawa[2][3]も参照)。そこで、もしFuchs型作用素についてC^∞, $\mathcal{D}'$, 又は$\mathcal{B}$等の函数の中で議論を展開しようとすれば、当然"双曲型"の条件が必要になってくるだろう。かくして、我々はここに"Fuchs双曲型"なる概念に到達する。それは当然双曲型のかなり自然な拡張を与えるはず

である．我々は本稿で、まずFuchs双曲型なるものを定義し、それについてhyperfunction solutionの構造をしらべてゆくことにしたい．その結果．従来双曲型方程式に関して得られた結果の多くが．我々のFuchs双曲型方程式の場合に迄一般化される事になるだろう．

（なお、この仕事をするに当たり．小松，佐藤．大島，三輪の各先生方から多くのsuggestionを受けました．ここに感謝の意を込めて表記しておきます．）

目示：

§1；Fuchs系．

最初にBaouendi−Goulaouic [1] の結果を思い出しておこう．m 階の微分作用素 $P(t,x,D_t,D_x)$ が次の (i) (ii) を満たす時．彼等は P を t に関し weight $(m-k)$ のFuchs型と呼んだ．（ここで $(t,x)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$）．

(i) $0\leqslant k\leqslant m$ で． $P=t^kD_t^m+P_1(t,x,D_t)t^{k-1}D_t^{m-1}+\cdots+P_k(t,x,D_x)D_t^{m-k}+\cdots+P_m(t,x,D_x)$ なる形に書ける．

(ii) $1\leqslant j\leqslant k$ に対し．$\mathrm{ord}\,P_j(0,x,D_x)\leqslant 0$ （$P_j(0,x,D_x)=a_j(x)$ とおく．）．

この時 $e(\lambda, x) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1) + a_1(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+2) + \cdots + a_k(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+k+1)$

とおく時次の結果が成り立つ.

<u>定理</u> (Baouendi-Goulaouic [1]. Hasegawa [2] [3]).

P を weight $(m-k)$ の Fuchs型とする. 任意の正則函数 $f(t,x)$, $u_0(x), \cdots, u_{m-k+1}(x)$

に対し. $Pu = f$, $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu} u|_{t=0} = u_\nu$ $0 \leqq \nu \leqq m-k-1$ なる Cauchy 問題は正則解

が唯一つ存在する. ($e(\lambda, 0) \neq 0$ for $\lambda \geqq m-k$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ の時)

上の場合 $\tilde{P} = t^{m-k} P$ を考える事により. weight 0 に reduction できる.

$t^l D_t^l = tD_t(tD_t - 1)\cdots(tD_t - l + 1)$ に注目すると. 上の Fuchs型は. Volevič タイプの matrix 表示できる. そこで一般に次の様に定義しよう.

<u>定義</u> $P(t, x, D_t, D_x) = tD_t - A(t, x, D_x)$; $A(t, x, D_x) = (A_{ij}(t, x, D_x))_{1 \leqq i,j \leqq m}$ の matrix が次の i) ii) を満す時. Volevič の意味で t に関し Fuchs系という.

i) $\exists (n_1, \cdots, n_m) \in \mathbb{Z}^m$ s.t. $\operatorname{ord} A_{ij}(t, x, D_x) \leqq n_i - n_j + 1$.

ii) $t = 0$ とおいた時 $\operatorname{ord} A_{ij}(0, x, D_x) \leqq 0$.

本節では. この Fuchs系について複素解析的な議論を行なう. 後の応用の為. $A_{ij}(t, x, D_x)$ は必ずしも微分作用素とせず. 一般に. $(t_0, x_0, \langle \xi_0, dx \rangle) = (0, 0; dx_n) \in \mathbb{C} \times P^*\mathbb{C}^n$ の近傍で定義された Ψ.D.O_p と理解する. $A(t, x, \xi) = \sum_j A^{(j)}(t, x, \xi)$ と斉次部分に分ける. この時 $A^{(0)}(0, 0; \xi_0)$ の固有値を特性固有値, $(\lambda - A(0, x, D_x))^{-1} = (S_{ij}(\lambda; x, D_x))$ ($\lambda \gg 1$ なら存在) と書く時 $s = \max\limits_{S_{ij} \neq 0} |n_i - n_j| + 1$ を P の F-order と呼ぶことにする. §1.1では.

Fuchs系に対するCauchy問題の形式的な基本解を構成し、応用として Fuchs系のCauchy-Kowalevskyの定理を導びく. §1.2は §1.1の少々面倒な評価の部分の証明についやす.

§1.1. Fuchs系の形式的基本解.

<u>定義 (1.1.1)</u>　正整数 m に対し形式和 $R(t,x,D_x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} R_j(t,x,D_x)$ で次の (i) (ii) (iii) を満たすものを $\frac{1}{m}$ 次の形式的 ΨD.Op と呼ぶ.

(i) $\exists\, \varepsilon>0$ が存在して, $R_j(t,x,\xi)$ は $\{(t,x,\xi)\,;\,|t|<\varepsilon,\ |x|<\varepsilon,\ |\xi-\xi^0|<\varepsilon\}$ で定義された正則函数で ξ に関し j 次斉次式である.

(ii) $\exists\, M>0$ が存在して, $0<\delta<\varepsilon$ なる $\forall\delta$ に対して,

$$\sup_{|t|<\delta,\ |x|<\varepsilon,\ |\xi-\xi^0|<\varepsilon,\ |\xi|=1} |R_j(t,x,\xi)| \leqslant C_\delta \left(M\delta^{\frac{1}{m}}\right)^j \Big/ j! \qquad \text{for } j\geqslant 0,$$

(iii) $\exists\, A>0$ s.t. $\sup_{|t|<\varepsilon,\ |x|<\varepsilon,\ |\xi-\xi^0|<\varepsilon,\ |\xi|=1} |R_j(t,x,\xi)| \leqslant (-j)!\, A^{(-j)}$ for $j<0$,

特に R_j が ξ の j 次斉次多項式で, (ii) (iii) の評価を $|\xi|=1$ 全体で満す時形式的 diff op と呼ぶ. 各々の全体を $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$, $\hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{m})$ と書く.

<u>注意 (1.1.2)</u>　1). $m=1$ の時は柏原河合[4]で finite velocity をもつ ΨD.Op として導入されている. $m>1$ではいわば infinite velocity となる.

2). $P(t,x,D_x)$ を t に正則な無限階の ΨD.Op とする時 $P\in\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ である.

<u>命題 (1.1.3)</u>　$\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$, $\hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{m})$ は, 次の性質をもつ.

1). $P=\sum P_j$, $Q=\sum Q_j\in\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ に対し. $S_\ell=\sum_{\ell=j+k-|\alpha|}\frac{1}{\alpha!}D_\xi^\alpha P_j(t,x,\xi)\,D_x^\alpha Q_k(t,x,\xi)$ と

おく．この時 $S=\sum_{\ell} S_{\ell}(t,x,D_x)\in\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$．従って $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ は環構造をもつ．

2) $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ はもに正則な無限階亜D.Op のなす環の拡大環である．

3) $\hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{m})$ は．部分環として $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ の中で閉じている

4). $P=\sum P_j\in\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ の時．$D_tP\equiv\sum\frac{\partial}{\partial t}P_j$ とおくと．$D_tP\in\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$．

(証明). Cauchy の不等式を使えばよい．（柏原・河合[4] Lemma 2.1 参照）．

命題より、$\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ の中で $(tD_t-A(t,x,D_x))\cdot E(t,x,D_x)=F(t,x,D_x)$ なる微分方程式を考える事が出来る．今 $P=tD_t-A(t,x,D_x)$ を $(0,dx_n)\in\mathbb{C}\times P^*\mathbb{C}^n$ の近傍で定義された亜D.Op の Fuchs 系，$F(t,x,D_x)$ を無限階亜D.Op とした時．$P(t,x,D_t,D_x)\cdot E(t,x,D_x)=F(t,x,D_x)$ の解 $E(t,x,D_x)$ を $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ の中で考える事にしよう．（但し行列の size を $\tilde{m}\times\tilde{m}$ とする．）．両辺を t の巾に展開すると次の漸化式を得る．

$$(\ell-A_0)E_\ell=\sum_{i=1}^{\ell}A_iE_{\ell-i}+F_\ell \quad (\text{但し．} A=\sum t^nA_n,\ F=\sum t^nF_n,\ E=\sum t^nE_n)$$

もし．P の特性固有値 $\in\{n\in\mathbb{Z};\ n>n_0\geq 0\}$ ならば．Fuchs 系の定義より $\ell>n_0$，$(\ell-A_0)$ は可逆．従って順次 $(\ell-A_0)^{-1}$ を掛けてゆくと．E_ℓ は $\{E_0,\cdots,E_{n_0}\}$ と $\{F_\ell\}$ の一次結合で書けてしまう．故に

$$\sum_{\ell=n_0+1}^{\infty}t^\ell E_\ell(x,D_x)=W_0(t,x,D_x)E_0(x,D_x)+\cdots+W_{n_0}(t,x,D_x)E_{n_0}(x,D_x)+R_F(t,x,D_x)$$

なる形に一意的に書ける．この時次の定理が成り立つ．

<u>定理(1.1.4)</u> P を Fuchs 系．$\Delta=P$ の F-order，$F(t,x,D_x)$ を無限階亜D.Op この時，$W_0(t,x,D_x),\cdots,W_{n_0}(t,x,D_x),R_F(t,x,D_x)\in\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{\Delta})$ となる．

(証明は§1.2に於て行なう.)

(α_i は特性固有値)

<u>系(1.1.5)</u>, $\mathcal{P}$: Fuchs系, $\alpha_i \notin \{n \in \mathbb{Z};\ n > n_0 \geq 0\}$ とする. 無限階亜D. Ops $U_0(xD_x), \cdots, U_{n_0}(xD_x)$. $F(txD_x)$ に対し次のCauchy問題$(\mathcal{C})$を考える.

$(\mathcal{C})$ $t\frac{\partial}{\partial t}E - A(txD_x)E = F$. $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu}E\big|_{t=0} = U_\nu(xD_x)$ $0 \leq \nu \leq n_0$

$(\mathcal{C})$が$\hat{\mathcal{P}}$の中に解をもつ必要十分条件は次をみたす事である.

(*) $0 \leq l \leq n_0$ に対し, $(l - A_0)U_l/l! = \sum_{i=1}^{l} A_i U_{l-i}/(l-i)! + F_l$ を満たす.

この時解 $E(txD_x) \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{s})$ (s= F-order) で, 一意的であり. 定理の基本解 $W_\nu(txD_x)$ を使って, $E = R_F + \sum_{j=0}^{n_0}(t^{n_0+1}W_j(txD_x) + t^j)\,U_j(xD)/j!$ と書ける.

系より, わかる様に. $W_\nu(txD_x)$ がFuchs系の形式的基本解を与えている. $\mathcal{P}$の各成分が微分Opから成る時は. $|\xi|=1$ の各点で $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{s})$ の評価をもつ事と. $|\xi|=1$ がCompactなる事より, ただちに基本解 $W_\nu(txD_x) \in \hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{s})$ が理解される. $\hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{s})$ の定義より. $\mathcal{O}_0$ (正則函数の芽のなす環) の作用素環 ie. $\hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{s}) \times \mathcal{O}_0 \longrightarrow \mathcal{O}_0$ である. 従って. 次のFuchs系のCauchy-Kowalevskyの定理を得る.

<u>定理(1.1.6)</u> $\mathcal{P} = tD_t - A(txD_x)$ を微分作用素のFuchs系, 特性固有値 $\notin \{n \in \mathbb{Z};\ n > n_0 \geq 0\}$, $s = \mathcal{P}$のFi-order とする. Cauchy問題$(\mathcal{C})$.

$(\mathcal{C})$ $\mathcal{P}(tx\partial_t\partial_x)u(tx) = f(tx)$, $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu}u\big|_{t=0} = u_\nu(x)$. $0 \leq \nu \leq n_0$ $f, u_\nu \in \mathcal{O}$.

$(\mathcal{C})$が$\mathcal{O}$の中に正則解をもつ必要十分条件は(*)をみたす事である.

(*) $0 \leq l \leq n_0$, $(l - A_0)u_l/l! = \sum_{i=1}^{n_0} A_i u_{l-i}/(l-i)! + f_l$. $f = \sum t^l f_l(x)$;

更にもし data が $\{x\in\mathbb{C}^n\ |x|\leq r\ll 1\}$ で与えられたならば、解は $\{(t,x)\ |t|\leq (r-|x|/M)^{\sigma}\}$ で存在する．（M は P のみに依存する定数）．

（証明）．$f(t,x)$, $u_j(x)$ を 0 階微分作用素として基本解 $W_\nu(t,x,D_x)$, $R_F(t,x,D_x)\in\hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{\sigma})$．故に解は $u(t,x)=R_F(t,x,D_x)\cdot 1+\sum_{j=0}^{n_0}(t^{\nu+1}E_j(t,x,D_x)+t^j)u_j(x)/j!$ と書ける．定理の後半は次の補題を示せば十分であろう．

（補題）．$P(t,x,D_x)\in\hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{\sigma})$．$f(t,x)$ は $\{(t,x)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n;\ |x|\leq r$, t は十分広い領域 $\}$ で正則とする．この時 $P(t,x,D_x)\cdot f(t,x)$ は $\{(t,x);\ |x|\leq r, |t|\leq (r-|x|/M)^{\sigma}\}$ なる領域で正則となる．

（証明）．$|f(t,x)|\leq B$ とする．Cauchy 不等式より．$|D_x^\alpha f|_{|x|\leq s}\leq \alpha!\frac{1}{(r-s)^{|\alpha|}}B$
一方 $P\in\hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{\sigma})$ 故．$|P_j|_{|t|<\delta}\leq C_\delta(M\delta^{\frac{1}{\sigma}})^j/j!$ を得る．$P_j(t,x,\xi)=\sum P_{j\alpha}(t,x)\xi^\alpha$ とおくと $|P_{j\alpha}(t,x)|_{|t|<\delta}\leq C_\delta(M\delta^{\frac{1}{\sigma}})^j/j!$ を得る．両評価式より，

$$
\begin{aligned}
|P(t,x,\partial_t,\partial_x)f(t,x)|_{|t|<\delta\ |x|\leq s} &\leq \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=j}C_\delta\frac{(M\delta^{\frac{1}{\sigma}})^j}{j!}\cdot\alpha!\frac{1}{(r-s)^{|\alpha|}}\cdot B\\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty}C_\delta B\cdot 2^{n-1}\left(\frac{2M\delta^{\frac{1}{\sigma}}}{r-s}\right)^j
\end{aligned}
$$

故に $2M\delta^{\frac{1}{\sigma}}<r-s$ で収束 i.e. $\delta<(r-s/M)^{\sigma}$ で収束する．$|x|\leq s$ で考えたが，この s を動かすと補題の領域を得る．　q.e.d.

この Cauchy-Kowalensky の定理は Volevič の意味の Kowalensky 系や Baouendi-Goulaouic [1] の結果を含んでしまう．実際 $P=D_t-A(t,x,D_x)$ を Kowalensky 系とする時 $\tilde{P}=tD_t-tA(t,x,D_x)$ は Fuchs 系 $\tilde{P}$ の F-order $=1$．故に Cauchy 解の存在及びその領域についての結果はただちに得る．P.3 で説明した様に matrix 表示すれば Fuchs 型に対する

結果を含む事は明らか．領域についての陳述を合わせると

定理 (1.1.7)　P を weight $(m-k)$ の Fuchs 型，$e(\lambda,0)\neq 0$ for $\lambda \geq m-k$，$\lambda\in\mathbb{Z}$，任意の正則函数 $f(t,x)$，$u_0(x)$，…，$u_{m-k-1}(x)$ に対し，Cauchy 問題 (E)

$$(E)\quad P(t,x,D_t,D_x)u(t,x)=f(t,x)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu}u(t,x)\Big|_{t=0}=u_\nu(x)\qquad 0\leq \nu\leq m-k-1$$

は唯一つの正則解をもつ．更にもし data を $\{x\in\mathbb{C}^n;\ |x|\leq r\ll 1\}$ で与えたならば解 u は $\{(t,x);\ |t|\leq\left(\frac{r-|x|}{M}\right)^{\Delta}\}$ $\Delta=\min\{m,k+1\}$ で存在する．(ここで M は P のみに依存する定数)．

(証明)　$m=k$ の時は P3 の方法で matrix 表示すれば良い．$m\neq k$ の時 $\hat{P}=tP$ とおき $\hat{P}$ を次の様にして matrix 表示してゆく．$u_0=u$，$u_1=D_tu_0$，…，$u_{m-k-1}=D_tu_{m-k-2}$，$u_{m-k}=tD_tu_{m-k-1}$，…，$u_{m-1}=(tD_t-k+1)u_{m-2}$ とおく．$D_tu=v \Leftrightarrow tD_tu=t\cdot v$ により Fuchs 系にもってゆく．F-order $\leq k+1$ 故定理の領域を得る．　q.e.d.

§1.2. FCK 級数の評価．

本節では，§1.1 の定理 (1.1.4) の証明の実行を目標とする．最初に評価実行の武器となる Monvel-Kree [5] の形式 norm の説明をしておく．$P(x,D_x)=\sum_{k=0}^{\infty}P_{j-k}(x,D)$ を j 階 ΨD.Op とする時，

$$N_j^{\omega}(P;T)=\sum_{k,\alpha,\beta}\frac{2(2n)^{-k}\,k!}{(|\alpha|+k)!\,(|\beta|+k)!}\sup_{\omega}|D_x^{\alpha}D_{\xi}^{\beta}P_{j-k}(x,\xi)|\,T^{2k+|\alpha+\beta|}$$

とおく．主な性質は次の通りである．

(イ) $P(x,D)$ が巫.D.Op の増大条件を満す $\Longleftrightarrow$ $N_j^{\omega}(P;T)$ が収束巾級数.

(ロ) $P_\nu(x,D)$ を j_ν 次巫.D.Op $(\nu=1,2)$ ならば $N^{\omega}_{j_1+j_2}(P_1P_2;T) \ll N^{\omega}_{j_1}(P_1;T)\cdot N^{\omega}_{j_2}(P_2;T)$.

定義(1.2.1) 次の形の級数を形式的FCK級数と呼ぶ.

$$R(t)=\sum_{\ell=1}^{\infty} R^{\ell}t^{\ell} \;;\; R^{\ell}=\sum_{\substack{m_i\in\mathbb{Z}_+\\ \ell=m_1>\cdots>m_p\geqq 1\\ k_p=m_p,\ k_i=m_i-m_{i+1}\ (1\leqq i<p)}} A_{k_1}(m_1)A_{k_2}(m_2)\cdots A_{k_p}(m_p),$$

この R^{ℓ} に関し次の漸化式が成り立つ事は容易にわかる.

$$(1)\ R^1=A_1(1),\qquad (2)\ R^{\ell+1}=A_1(\ell+1)R^{\ell}+\cdots+A_{\ell}(\ell+1)R^1+A_{\ell+1}(\ell+1).$$

従ってFCK級数とは漸化式(1)(2)より構成される級数に他ならない. 今 $\{A_k^{(i)}(m)\}_{1\leqq i\leqq s,\,k,m\in\mathbb{Z}_+}$ を巫.D.Ops の集合, C, C^{-1} を可逆行列とする. この時 $A_k(m)=C\,(A_k^{(1)}(m;xD_x)+\cdots+A_k^{(s)}(m;xD_x))\,C^{-1}$ とおくと形式的FCK級数ができる. これを $R(C\{A_k^{(i)}(m)\}C^{-1};txD_x)$ とかく.

命題(1.2.2) $\{A_k^{(i)}(m;xD_x)\}_{1\leqq i\leqq s,\,k,m\in\mathbb{Z}_+}$ が次の 1) 2) を満たし, C, C^{-1} が有限階巫.D.Op ならば, $R(C\{A_k^{(i)}(m)\}C^{-1};txD_x)\in\widehat{\mathcal{P}}(\frac{1}{s})$ となる. 但し

1). $A_k^{(i)}(m,xD_x)$ は高々 i 階以下の巫.D.Op.

2). $^{\exists}$領域 ω, $^{\exists}\lambda>0$, $M>0$, $B>0$ s.t. $N_i^{\omega}(A_k^{(i)}(m);\lambda)\ll \dfrac{MB^k}{m^i}$.

(証明) $$A_{k_1}(m_1)\cdots A_{k_p}(m_p)=\sum_{1\leqq \varepsilon_i\leqq s} CA_{k_1}^{(\varepsilon_1)}(m_1)A_{k_2}^{(\varepsilon_2)}(m_2)\cdots A_{k_p}^{(\varepsilon_p)}(m_p)C^{-1}$$
$$=\sum_{\substack{p_1+p_2+\cdots+p_s=p\\ p_i\geqq 0}}\Big(C\cdot\sum_{\substack{p_i=\#(\{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_p\}\cap\{i\})\\ 1\leqq\varepsilon_i\leqq s}} A_{k_1}^{(\varepsilon_1)}(m_1)\times\cdots\times A_{k_p}^{(\varepsilon_p)}(m_p)\,C^{-1}\Big)$$

と書ける. 故に,

$$X^{(p_1\cdots p_s)}=\sum_{p_i=\#(\{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_p\}\cap\{i\}),\ 1\leqq\varepsilon_i\leqq s} C\,A_{k_1}^{(\varepsilon_1)}(m_1)\cdots A_{k_p}^{(\varepsilon_p)}(m_p)\,C^{-1}$$ とおくと,

C, C^{-1} の各成分が高々 c 階以下とすると $X^{(p_1\cdots p_s)}$ は $(2c+p_1+2p_2+\cdots+sp_s)$ 階以下の Ψ.D.Op. 斉次部分表示して $X^{(p_1\cdots p_s)}=\sum_{j\le 2c+p_1+\cdots+sp_s} X_j^{(p_1\cdots p_s)}(x\xi)$ と書く。この時 $X^{(p_1\cdots p_s)}$ を使うと

$$R(C\{A_k^{(i)}(m)\}C^{-1};\ t\times D_x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\substack{\ell=m_1>\cdots>m_p\ge1\\ k_p=m_p,\ k_i=m_i-m_{i+1}}} \sum_{p_1+\cdots+p_s=p,\ p_i\ge0} X^{(p_1\cdots p_s)}(x D_x)\cdot t^{\ell}$$

と書ける。

$R(C\{A_k^{(i)}(m)\}C^{-1};\ t x\xi)=\sum_j R_j(tx\xi)$; $R_j(tx\xi)$ は ξ について j 次斉次式とすると

$$R_j(tx\xi)=\sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\substack{\ell=m_1>\cdots>m_p\ge1\\ k_p=m_p,\ k_i=m_i-m_{i+1}}}\sum_{\substack{p_1+\cdots+p_s=p\\ j\le 2c+p_1+\cdots+sp_s}} X_j^{(p_1\cdots p_s)}(x;\xi)\cdot t^{\ell}$$

となる。

まず $X^{(p_1\cdots p_s)}$ の評価を行なう。$N_c^{\omega}(C^{\pm};\lambda)=N$ とおくと、

$$N^{\omega}_{2c+p_1+\cdots+sp_s}(X^{(p_1\cdots p_s)};\lambda) \le \sum_{\substack{p_i=\#(\{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_p\}\cap\{i\})\\ 1\le\varepsilon_i\le s}} N_c^{\omega}(C;\lambda)\,N_c^{\omega}(C^{-1};\lambda)\,N^{\omega}_{\varepsilon_1}(A^{(\varepsilon_1)}_{k_1}(m_1);\lambda)\cdots N^{\omega}_{\varepsilon_p}(A^{(\varepsilon_p)}_{k_p}(m_p);\lambda)$$
$$\le \sum N^2M^pB^{k_1+\cdots+k_p}\frac{1}{m_1^{\varepsilon_1}}\times\cdots\times\frac{1}{m_p^{\varepsilon_p}}$$

を得る。

ここで $\frac{1}{m_1}<\frac{1}{m_2}<\cdots<\frac{1}{m_p}$, $\frac{1}{m_\nu}\le\frac{1}{\nu}$ に注意すると、

$$\frac{1}{m_1^{\varepsilon_1}}\times\cdots\times\frac{1}{m_p^{\varepsilon_p}} \le \frac{1}{(m_1\cdots m_{p_1})}\times\frac{1}{(m_{p_1+1}\cdots m_{p_1+p_2})^2}\times\cdots\times\frac{1}{(m_{p-p_s+1}\cdots m_p)^s}$$
$$\le \frac{1}{p_1!}\left(\frac{p_1!}{(p_1+p_2)!}\right)^2\times\cdots\times\left(\frac{(p-p_s)!}{p!}\right)^s \le \frac{1}{p_1!}\left(\frac{1}{p_2!}\right)^2\cdots\left(\frac{1}{p_s!}\right)^s$$

を得る。Σの項数 $=\frac{p!}{p_1!\cdots p_s!}\le s^p$; $k_1+\cdots+k_p=\ell$ 故結局次を得る。

$$N^{\omega}_{2c+p_1+2p_2+\cdots+sp_s}(X^{(p_1\cdots p_s)};\lambda)\le N^2(sM)^pB^{\ell}\frac{1}{p_1!}\left(\frac{1}{p_2!}\right)^2\times\cdots\times\left(\frac{1}{p_s!}\right)^s$$

故に Monvel-Kree の形式 norm の定義にもどると、

$$|X^{(p_1\cdots p_s)}_{2c+p_1+\cdots+sp_s-k}(x\xi)|_{\omega} \le \frac{k!(2n)^k}{2\cdot\lambda^{2k}}\cdot N^2(sM)^pB^{\ell}\frac{1}{p_1!}\cdot\frac{1}{(p_2!)^2}\times\cdots\times\frac{1}{(p_s!)^s}$$

$j=2c+p_1+\cdots+sp_s-k$ と おくと

$$|X_j^{(p_1\cdots p_s)}(x\xi)|_{\omega}\le\frac{(2c+p_1+\cdots+sp_s-j)!}{p_1!(p_2!)^2\cdots(p_s!)^s}\cdot\frac{N^2(sM)^pB^{\ell}}{2}\left(\frac{2n}{\lambda^2}\right)^{2c+p_1+\cdots+sp_s-j}$$

故に $|R_j(t,x,\xi)|$ に関し次の評価を得る．

$$|R_j| \leqslant \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\substack{\ell=m_1>\cdots>m_p\geqslant 1\\ k_p=m_p,\, k_i=m_i-m_{i+1}}} \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_s=p\\ j\leqslant 2c+p_1+\cdots+sp_s}} \frac{(2c+p_1+\cdots+sp_s-j)!}{p_1!\times\cdots\times(p_s!)^s}\cdot\frac{N^2(sM)^p B^\ell}{2}\left(\frac{2n}{\lambda^2}\right)^{2c+p_1+\cdots+sp_s-j}|t|^\ell$$

ここで次の事に注意しよう．

(a). $$\sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\substack{\ell=m_1>\cdots>m_p\geqslant 1\\ k_p=m_p,\, k_i=m_i-m_{i+1}}} \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_s=p\\ j\leqslant 2c+p_1+\cdots+sp_s}} (*) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{1\leqslant p\leqslant \ell}\sum_{\substack{p_1+\cdots+p_s=p\\ j\leqslant 2c+p_1+\cdots+sp_s}}\Big(\sum_{\substack{\ell=m_1>\cdots>m_p\geqslant 1\\ k_p=m_p,\, k_i=m_i-m_{i+1}}} 1\Big)(*)$$

$\displaystyle\sum_{\ell=m_1>\cdots>m_p\geqslant 1} 1 \leqslant {}_\ell C_p \leqslant 2^\ell$ が成立つ．

(b) $$\frac{(2c+p_1+\cdots+sp_s-j)!}{p_1!(p_2)!^2\cdots(p_s!)^s} \leqslant \frac{(2c+p_1+\cdots+sp_s-j)!}{(2c+p_1+\cdots+sp_s)!}\times(1+1+2+\cdots+s)^{2c+s\ell}\times(2c)!$$

故に (a)(b) を使って書き直すと，$\left((1+1+2+\cdots+s)^{2c+s\ell}(2c)! \leqslant \exists L\cdot \exists V^{s\ell}\right)$

$$|R_j| \leqslant \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{1\leqslant p\leqslant\ell}\sum_{\substack{p_1+\cdots+p_s=p\\ j\leqslant 2c+p_1+\cdots+sp_s}} \cdot\frac{(2c+p_1+\cdots+sp_s-j)!}{(2c+p_1+\cdots+sp_s)!}\cdot\frac{N^2L\cdot(sM)^p}{2}\cdot(2V^sB|t|)^\ell\left(\frac{2n}{\lambda^2}\right)^{2c+p_1+\cdots+sp_s-j}$$

と書ける．右辺で $\nu=2c+p_1+2p_2+\cdots+sp_s$ とおく時次を得る．

$$=\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{1\leqslant p\leqslant\ell}\sum_{p_1+\cdots+p_s=p,\ j\leqslant\nu=2c+p_1+\cdots+sp_s}\frac{(\nu-j)!}{\nu!}\,\frac{N^2L(sM)^p}{2}(2V^sB|t|)^\ell\left(\frac{2n}{\lambda^2}\right)^{\nu-j}$$

$sM>1$ と仮定して良いので $(sM)^p\leqslant(sM)^\ell$，$(sM)\cdot 2V^sB=C_1$，$\left(\frac{2n}{\lambda^2}\right)=C_2$ とおく．

$$=\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{1\leqslant p\leqslant\ell}\sum_{\substack{p_1+\cdots+p_s=p\\ j\leqslant\nu=2c+p_1+\cdots+sp_s}}\frac{(\nu-j)!}{\nu!}(N^2L)\,(C_1|t|)^\ell\,C_2^{\nu-j}$$

を得る．ここで ℓ,ν を固定した時の“場合の数” $\displaystyle\leqslant\sum_{1\leqslant p\leqslant\ell}\sum_{p_1+\cdots+p_s=p}1 \leqslant (2s)^\ell$

一方 ν は $2c+1\leqslant\nu\leqslant s\ell+2c$ の範囲内にあるから，

$$\leqslant\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{\substack{1+2c\leqslant\nu\leqslant s\ell+2c\\ j\leqslant\nu}}\frac{(\nu-j)!}{\nu!}\,N^2L\,(2sC_1|t|)^\ell\,C_2^{\nu-j}$$

$$=\sum_{\substack{1+2c\leqslant\nu\\ j\leqslant\nu}}\sum_{\nu-2c\leqslant s\ell,\ \ell\in\mathbb{Z}_+}\frac{(\nu-j)!}{\nu!}\,N^2L\,(2sC_1|t|)^{\frac{1}{s}(s\ell-\nu+2c)}\cdot(2sC_1|t|)^{\frac{1}{s}(\nu-2c)}\,C_2^{\nu-j}$$

$$=\sum_{1+2c\leq\nu,\ j\leq\nu}\frac{(\nu-j)!}{\nu!}(2sC_1|t|)^{\frac{1}{s}(\nu-2c)}C_2^{\nu-j}\sum_{\nu-2c\leq s\ell,\ \ell\in\mathbb{Z}_+}N^2L\,(2sC_1|t|)^{\frac{1}{s}(s\ell-\nu+2c)}$$

ここで、$\displaystyle\sum_{\substack{\nu-2c\leq s\ell\\ \ell\in\mathbb{Z}_+}}N^2(2sC_1|t|)^{\frac{1}{s}(s\ell-\nu+2c)}\leq\sum_{n=0}^{\infty}N^2L\,(2sC_1|t|)^{\frac{1}{s}n}<C_3\qquad(|t|\ll 1)$.

故に $(2sC_1)^{\frac{1}{s}}=M_1$ とおき $|R_j|_\omega$ の評価を書き直すと、次を得る.

$$|R_j|\leq\sum_{\substack{\cancel{\nu-2c}\\ 1+2c\leq\nu,\\ j\leq\nu}}\frac{(\nu-j)!}{\nu!}C_3\cdot(M_1|t|^{\frac{1}{s}})^{\nu-2c}\cdot C_2^{\nu-j}$$

この評価から定理の評価が導びかれる事を示そう.

1) $j\geq 2c$ の場合の評価. $\nu-j=k$ と置いて書き換えると.

$$\begin{aligned}|R_j|_\omega&\leq C_3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(k+j)!}(M_1|t|^{\frac{1}{s}})^{k+j-2c}\cdot C_2^{k}\\&\leq C_3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{k!\,j!}(M_1|t|^{\frac{1}{s}})^{k}(M_1|t|^{\frac{1}{s}})^{j-2c}\,C_2^{k}\\&=C_3.(M_1|t|^{\frac{1}{s}})^{j-2c}\frac{1}{j!}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(C_2M_1|t|^{\frac{1}{s}})^{n}\right\}.\end{aligned}$$

$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(C_2M_1|t|^{\frac{1}{s}})^{n}\right\}$ は $C_2M_1|t|^{\frac{1}{s}}<1$ の時収束する.

2) $j<0$ の場合の評価.

$$\begin{aligned}|R_j|_\omega&\leq C_3\sum_{\nu=1+2c}^{\infty}\frac{(\nu-j)!}{\nu!}(M_1|t|^{\frac{1}{s}})^{\nu-2c}C_2^{\nu-j}\\&\leq C_3.\sum_{\nu=1+2c}^{\infty}(-j)!\,2^{\nu-j}\,(M_1|t|^{\frac{1}{s}})^{\nu-2c}\,C_2^{\nu-j}\\&\leq C_3(-j)!\,(2C_2)^{2c-j}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(2C_2M_1|t|^{\frac{1}{s}})^{n}\right\}\end{aligned}$$

$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(2C_2M_1|t|^{\frac{1}{s}})^{n}\right\}$ は $2C_2M_1|t|^{\frac{1}{s}}<1$ の時収束する.

以上 1) 2) の評価から $\widehat{P}(\frac{1}{s})$ の評価が導びかれる事は明らかである. 故に証明は完了した. *q.e.d.*

注意 (1.2.3). $R(C\{A_K^{(i)}(m)\}C^{-1};t\times D_x)$ の評価は、$N_i^{\omega}(A_K^{(i)}(m);\lambda)$ の評価に

のみ依存している．従って $T(m_0)\{A_K^{(i)}(m)\}=\{\tilde{A}_K^{(i)}(m)\}_{1\leq i\leq S,\, K,m\geq 0}$，$\tilde{A}_K^{(i)}(m)$
$\equiv A_K^{(i)}(m+m_0)$ とする時．$R(C\cdot T(m_0)\{A_K^{(i)}(m)\}\cdot C^{-1};\, t\times D_x)$ は $R(C\{A_K^{(i)}(m)\}C^{-1};\, t\times D)$
と同じ値の評価でおさえられる．

以上を準備として §1.1 の基本解の評価を行なう．方法は命題 (1.2.2) に帰着させる事による．$P=tD_t-A(t\times D_x)$ を Fuchs 系，$((0.dx_n)$ での $\Psi.D.O_p)$，有次部分表示して $A(t\times\xi)=\sum_j A^{(j)}(t\times\xi)$，，$A(t\times D)=(A_{ij})$
$\mathrm{ord}\, A_{ij}\leq n_i-n_j+1$　$\Delta=P$ の F-order とする．

<u>命題(1.2.4)</u>　$(\lambda-A^{(0)}(0.x.\xi))$ の $(i.j)$ 小行列式を $\Delta_{ij}(\lambda;x\xi)$，$\deg_\lambda\Delta_{ij}$ を λ についての次数，$l=$ matrix の size とする．この時

$$l-\deg_\lambda\Delta_{ij}\geq n_i-n_j+1$$

(証明) $\mathfrak{S}_l$ を l 次置換群とする．$\pi\in\mathfrak{S}_l,\, \pi(i)=j$ なる π に対し
$P_\pi(\lambda.x.\xi)=\prod_{k\neq i}(\lambda\delta_{k.\pi(k)}-A^{(0)}_{k,\pi(k)}(0.x.\xi))$ とおく．$\Delta_{ij}=\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_l.\pi(i)=j}\mathrm{sgn}\,\pi\, P_\pi(\lambda x\xi)$
故，任意の $\pi\in\mathfrak{S}_l\ \pi(i)=j$ に対し $l-\deg_\lambda P_\pi(\lambda x\xi)\geq n_i-n_j+1$ を示せば良い．$P_\pi=0$ ならば $\deg P_\pi=-\infty$ 故必ず成立．$P_\pi\neq 0$ と仮定する．
i) $i=j$ の場合．$\deg_\lambda P_\pi\leq l-1$ は常に成立故 $l-\deg_\lambda P_\pi\geq 1=n_i-n_j+1$，
ii) $i\neq j$ の場合．π は巡回置換の積に書ける．$i.j$ を結ぶ巡回置換の長さを m，$(j=j_1,j_2,\cdots,j_m=i)$　$\pi(j_\nu)=j_{\nu+1}$ とする．この時、
$\deg_\lambda P_\pi\leq l-m$ だから $l-\deg_\lambda P_\pi\geq m$，一方 $P_\pi\neq 0$ で，かつ P_π は $A^{(0)}_{j_\nu j_{\nu+1}}(0x\xi)$ $(1\leq\nu\leq m-1)$ を因子にもつ．従って $A^{(0)}_{j_\nu.j_{\nu+1}}(0x\xi)\neq 0$，所で Fuchs

系の定義より $\operatorname{ord} A_{ij}(0 \times D_x) \leqslant \min(n_i - n_j + 1, 0)$　故にもし $n_{j_\nu} - n_{j_{\nu+1}} + 1 \leqslant -1$ ならば $A^{(0)}_{j_\nu j_{\nu+1}}(0 \times \xi) \equiv 0$ となり矛盾．従って $n_{j_\nu} - n_{j_{\nu+1}} \geqslant -1$ を得る．$j_1 = j$, $j_m = i$ であるから．$n_i - n_j + 1 = (n_{j_m} - n_{j_{m-1}}) + \cdots + (n_{j_2} - n_{j_1}) + 1 \leqslant (m-1)+1 = m$．故に $l\text{-}\deg_\lambda P_\pi \geqslant m \geqslant n_i - n_j + 1$ を得る．　q.e.d.

$P(m;xD_x) = (P_{ij}(m:xD_x))$ の各成分が次の性質をもつ時 $T(\rho)$ を満すと言う．$(\rho \geqslant 0)$．

$$T(\rho):\ p_{ij} = \max(0, \operatorname{ord} P_{ij}),\ N^{\omega}_{p_{ij}}(P_{ij}(m), \lambda) \leqslant \frac{M}{m^{p_{ij}+\rho}}$$

（但し ω, λ, M は m に無関係）．

この $T(\rho)$ について次が成り立つ事は明らかであろう．

1) $P(m)$ が $T(p)$，$Q(m)$ が $T(q)$ を満す $\Rightarrow$ $P(m)Q(m)$ は $T(p+q)$ を満す行列の有限和．

2) $0 \leqslant k \leqslant q$．$P$ の各成分は高々 k 階以下，$Q(m)$ は $T(q)$ を満たす．$\Rightarrow$ $PQ(m)$，$Q(m)P$ は $T(q-k)$ を満す行列の有限和．

<u>命題(1.2.5)</u>．$(m - A(0 \times D_x))^{-1}$ は $m \gg 1$ で存在する．$C = \begin{bmatrix} D_x^{n_1} & & & \\ & D_x^{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_x^{n_l} \end{bmatrix}$ とおく．この時 $C^{-1}(m - A(0 \times D_x))^{-1} C$ は性質 $T(1)$ をもつ行列の有限和となる．

（証明）．$A(0 \times D_x) = A^{(0)}(0 \cdot x D_x) - \tilde{A}(xD_x)$．$-\tilde{A}(xD_x) = \sum_{j<0} A^{(j)}(0 \cdot x D_x)$ とおく．$(m - A^{(0)}(0 \times D_x))^{-1} = B(m, xD_x)$．$\tilde{A}(xD_x) B(m \times D_x) = R(m \cdot x D_x)$ とおく．この時 $(m - A(0 \times D_x))^{-1} = B(m \times D) \sum_{k=0}^{\infty} R(m \times D)^k$ と書ける．次の i) ii) iii) を示せば十分であろう．

i) $C^{-1}B(m\times D)C$ は性質 T(1) をもつ．実際，$B(m)=(B_{ij}(m))$ とおく．$C^{-1}\times B(m)C$ の (i,j) 成分 $= D_n^{-n_i}B_{ij}(m)D_n^{n_j}$ だからその order $\leq n_j-n_i$．故に $p_{ij}=\max(0,n_j-n_i)$ とおく時 $N^{\omega}_{p_{ij}}(D_n^{-n_i}B_{ij}D_n^{n_j};\lambda)\leq\frac{M}{m^{p_{ij}+1}}$ を示せばよい．所で左辺 $\leq M_1\cdot N_0^{\omega}(B_{ij}(m);\lambda)\leq M_1\cdot\frac{M_2}{m^{l-\deg\Delta_{ji}}}$ （$\because B_{ij}(m\times\xi)=\Delta_{ji}/\det(m-A^{(0)}(0x\xi))$ 故）．命題(1.2.4)より $l-\deg\Delta_{ji}\geqq n_j-n_i+1$．また $\deg\Delta_{ji}\leq l-1$ だから $l-\deg\Delta_{ji}\geq\max(n_j-n_i+1,1)=p_{ij}+1$．故に $\frac{1}{m^{l-\deg\Delta_{ji}}}\leq\frac{1}{m^{p_{ij}+1}}$ となり i) が示された．

ii) $C^{-1}R(m)C$ は性質 T(0) をもつ行列の有限和．実際，$\mathrm{ord}\,\tilde{A}_{ij}\leq n_i-n_j+1$ だから $C^{-1}\tilde{A}C$ の各成分は高々1階．$C^{-1}B(m)C$ は T(1) を満す．従って，$C^{-1}R(m)C=(C^{-1}\tilde{A}C)(C^{-1}B(m)C)$ は性質 T(0) をもつ行列の有限和．

iii) 十分大きな k_0 に対し $C^{-1}(\sum_{k\geq k_0}R(m)^k)C$ は性質 T(0) をもつ．実際 k_0 を十分大きくすると $C^{-1}(\sum_{k\geq k_0}R(m)^k)C$ の各成分は0階以下．評価が m に一様にとれるのは明らか故 T(0) を満たす．

以上 i) ii) iii) より $C^{-1}(m-A(0xD))^{-1}C$ が T(1) をもつ行列の有限和となる事は P14 の i) より明らか．

q.e.d.

命題(1.2.5)より $C^{-1}(m-A(0xD))^{-1}C$ は次の様に分解できる．

i) $C^{-1}(m-A(0xD))^{-1}C=S^{(0)}(m\times D)+\cdots+S^{(s-1)}(m\times D)$．ここで $S^{(i)}(m\times D)$ の各成分は高々 i 階以下（s は P の F-order）

ii) $N_i^{\omega}(S^{(i)}(m);\lambda)\leq\frac{M}{m^{i+1}}$．

今，$A(t\times D)$ を t について Taylor 展開して $\sum_{k=0}^{\infty}t^kA_k(xD)$ と書き．

$X_k^{(i)}(m) = S^{(i-1)}(m.xD_x)\,C^{-1}A_k(xD_x)C \quad 1\leqslant i\leqslant A,\ k\in\mathbb{Z}_+\ m\gg 1$ とおく．$C^{-1}A_kC$ の各成分が1階以下である事に注意すれば $\{X_k^{(i)}(m)\}$ は命題(1.2.2)の条件1) 2)を満す．つまり

1) $X_k^{(i)}(m\,x\,D_x)$ は高々 i 階以下の正D. $\mathcal{O}_p$,

2) $N_i^{\omega}(X_k^{(i)}(m)\,;\lambda) \leqslant \dfrac{MB^k}{m^i}$ for $\exists\lambda>0,\ M>0,\ B>0$,

これを使って§1.1の基本解の評価を得る事ができる．実際

(定理(1.1.4)の証明)．i) $W_j(t\times D_x)\in\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{\alpha})$ の証明： $W_j=\sum_{\ell=1}^{\infty}t^{\ell-1}G_\ell(xD)$ とおく時 G_ℓ は次の漸化式をみたす． $(n_0+\ell-A_0)G_\ell = A_{n_0+\ell-j}+\sum_{m=1}^{\ell}A_mG_{\ell-m}$．故に W_j はともかく $W_j=\sum_{\ell=1}^{\infty}t^{\ell-1}W_{j,\ell}(t\times D_x)(n_0+\ell-A_0)^{-1}A_{n_0+\ell-j}$ なる形に書ける． $W_{j\ell}(t\times D_x)=\sum_{k=0}^{\infty}t^kH_k(xD_x)$ とおくと H_k は次の漸化式を満す． ｲ) $H_0=1$, ﾛ) $(n_0+\ell+k-A_0)H_k=\sum_{m=1}^{k}A_mH_{k-m}+A_k$,

故に $\tilde{X}_k(m)=(n_0+\ell+m-A_0)^{-1}A_k$ とおいた時 ｲ) ﾛ) は形式的FCK級数の漸化式を示している．P.:ここで上で構成した $\{X_k^{(i)}(m)\}$ を使うと

$$W_{j\ell} = 1 + R(C\cdot T(n_0+\ell)\{X_k^{(i)}(m)\}C^{-1} : t\times D_x)$$

と書ける．命題(1.2.2)より $W_{j.\ell}\in\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{\alpha})$ であり，注意(1.2.3)よりその評価は ℓ に依存しない．一方 $(n_0+\ell-A_0)^{-1}A_{n_0+\ell-j}=C\sum_{i=1}^{A}X^{(i)}_{n_0+\ell-j}(n_0+\ell)C^{-1}$ であり， $p=\max|n_i-n_j|$ とおく時． $N_{i+2p}(CX^{(i)}_{n_0+\ell-j}(n_0+\ell)C^{-1}\,;\lambda)\leqslant\dfrac{MB^{n_0+\ell-j}}{(n_0+\ell)^i}$ なる評価をもつ．従って． $B^{-\ell}\cdot(n_0+\ell-A_0)^{-1}A_{n_0+\ell-j}$ も ℓ に無関係な評価をもつ．

$$W_j=\sum_{\ell=1}^{\infty}B(Bt)^{\ell-1}\left[W_{j,\ell}\,B^{-\ell}(n_0+\ell-A_0)^{-1}A_{n_0+\ell-j}\right]$$

であり，[ ]内は ℓ に無関係な評価をもち $\in\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{\alpha})$, また $\sum_{\ell=1}^{\infty}(Bt)^{\ell-1}$

は $Bt<1$ で収束し結局 $W_j(t\,x\,D_x)\in\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{s})$ を得る.

ii) $R_F\in\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{s})$ の証明. $R_F=\sum_{\ell=n_0+1}^{\infty}t^{\ell}R_{\ell}F_{\ell}$ なる形に書け, 更に $R_{\ell}=R(CT(\ell)\{\chi_k^{(i)}(m)\}C^{-1};t\,x\,D_x)(\ell-A_0)^{-1}$ と書ける. 故に $R_{\ell}\in\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{s})$ で評価は ℓ に無関係. 一方 $\exists\alpha>0$ をとると $\alpha^{-\ell}F_{\ell}$ は ℓ に無関係な評価をもつ. 故に $R_F=\sum_{\ell=n_0+1}^{\infty}(\alpha t)^{\ell}R_{\ell}\cdot\frac{1}{\alpha^{\ell}}F_{\ell}\in\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{s})$ を得る. q.e.d.

§2. Fuchs双曲系.

前節でFuchs系に対する形式的な基本解 $W(t\,x\,D_x)$ を構成した. もし形式的に $E(t\,x\,y)=W(t\,x\,D_x)\delta(x-y)$ とおいたものが hyperfunction として意味付けできれば, それは hyperfunction 内での Cauchy 問題の基本解を与える事になる. その為には双曲型の条件を必要とする. 最初に幾つかの定義を述べておこう.

定義 matrix $P=tD_t-A(t\,x\,D_x)$ が次の 1) 2) 3) を満す時 Fuchs双曲系という.

1) $P=tD_t-A(t\,x\,D_x)$ は t に関し Volevič の意味で Fuchs系.

2) $\mathring{A}(t\,x\,\xi)=(\sigma_{n_i-n_j+1}(A_{ij})(t\,x\,\xi))$ とおく時, $\det(t\tau-\mathring{A}(t\,x\,\xi))=t^{\ell}\mathring{p}(t,x,\tau,\xi)$ と積の形に書ける. 但し $\ell=$ matrix の size

3) $\mathring{p}(t\,x\,\tau\,\xi)=0$ の根 τ について (t,x,ξ) が実数 $\Rightarrow$ τ も実数.

定義 m 階の微分作用素 $P(t\,x\,D_t\,D_x)$ (単独高階) が次の 1) 2) 3)

を満たす時 weight $(m-k)$ の Fuchs双曲型（tに関し）という.

1) $P(t,x,D_t,D_x)$ は weight $(m-k)$ の Fuchs型（tに関し）.

2) 主要表象 $\sigma_m(P)=t^k p_m(t,x,\tau,\xi)$ と積になっている.

3) $p_m(t,x,\tau,\xi)=0$ の根 τ について (t,x,ξ) が実数 $\Rightarrow$ τ も実数.

もし作用素が $(0,\sqrt{-1}dx_n\infty)$ の近傍での $\mathcal{E}_D$, $\mathcal{C}_P$ の時は 3) の ξ を $(0,\sqrt{-1}dx_n\infty)$ の近傍に限定して考える. この時各々を Fuchsマイクロ双曲系, Fuchsマイクロ双曲型と呼ぶことにする. なお weight m の Fuchs双曲型は普通の双曲型である事に注意しよう.

本節では実領域の解析を行なうので $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $z=x+\sqrt{-1}\tilde{x}\in\mathbb{C}^n$ とする. まず §2.1 で $E(t,x,y)=W(t,x,D_x)\delta(x-y)$ に hyperfunction としての意味付けを与え Cauchy 問題の基本解を構成する. §2.2 では, 単独 Fuchs双曲型の hyperfunction solution の構造を調べる. 具体的には, 局所可解性や斉次解の構造についてである.

§2.1. Fuchs双曲系の Cauchy 問題の基本解.

最近柏原-河合[4]によって展開された方法を我々の場合に適用してゆく. 実変数と複素変数を区別する為, $x,y\in\mathbb{R}^n$, $z,w\in\mathbb{C}^n$, $\zeta=\eta+\sqrt{-1}\xi\in\mathbb{C}^n$, $\zeta^0=(0,\cdots,0,1)$ とおく. また, $\Phi_j(x_\nu)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\cdot\frac{j!}{(-x_\nu)^{j+1}}$ (for $j\geqq 0$) $=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{x_\nu^{-j-1}}{(-j-1)!}(\log(-x_\nu)-\psi(-j))$ (for $j<0$) とおく. 但し $\psi(j)=$ di-gamma function, $\alpha=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$ に対し $\Phi_\alpha(x)=\prod_{\nu=1}^{n}\Phi_{\alpha_\nu}(x_\nu)$ とおく.

$\underline{P}=tD_t-A(t\,z\,D_z)$ を $(0;dx_n)$ で定義された Ψ.D.O$_p$ の Fuchs系, $F(t\,z\,D_z)$ を Ψ.D.O$_p$, $R(t\,z\,D_z)$ を $\frac{1}{s}$ 次形式的 Ψ.D.O$_p$ とする. 次の式が成立つとする.

$$t\frac{\partial}{\partial t}R(t\,z\,D_z)-A(t\,z\,D_z)R(t\,z\,D_z)=F(t\,z\,D_z)$$

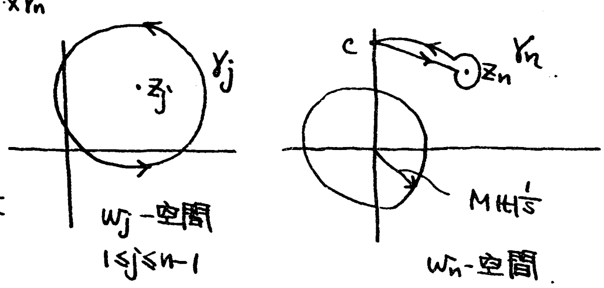
$A(t\,z\,D_z)=\sum_\alpha A_\alpha(t\,z)D_z^\alpha$ とおく時, $A(t\,z\,D_z)$ は $L(t\,z\,w)\equiv\sum_\alpha A_\alpha(t\,z)\Phi_\alpha(z-w)$ を積分核とする積分作用素となる. 一方 $F(t\,z\,D_z)=\sum_j F_j(t\,z\,D_z)$, $R(t\,z\,D_z)=\sum_j R_j(t\,z\,D_z)$ とおき, $H(t\,z\,\eta)=\sum_j F_j(t\,z\,\eta)\Phi_j(\langle z,\eta\rangle)$, $G(t\,z\,\eta)=\sum_j R_j(t\,z\,\eta)\Phi_j(\langle z\,\eta\rangle)$ とおく. $F(t\,z\,D_z)$ は Ψ.D.O$_p$ 故 $H(t\,z\,\eta)$ は $\{(t\,z\,\eta)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n;\ |t|<\varepsilon\ |z|<\varepsilon,\ |\eta-\eta^0|<\varepsilon|\eta|\ \ \langle z,\eta\rangle\neq 0\}$ で正則な多価函数. $R(t\,z\,D_z)$ は $\frac{1}{s}$ 次形式的 Ψ.D.O$_p$ の増大条件を満すから, $G(t\,z\,\eta)$ が $\{(t\,z\,\eta);\ |t|<\varepsilon\ |z|<\varepsilon,\ |\eta-\eta^0|<\varepsilon|\eta|,\ |\langle z\,\eta\rangle|>M|t|^{\frac{1}{s}}|\eta|\}$ で正則な多価函数になることがわかる. この時次の命題が成り立つ.

<u>命題(2.1.1)</u>. 次の函数 $J(t\,z)$ は原点 $(0,0)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ の近傍で正則である.

$$J(t\,z)=t\frac{\partial}{\partial t}G(t\,z\,\eta^0)-\oint_{\gamma_1\times\cdots\times\gamma_n}L(t\,z\,w)\,G(t\,w\,\eta^0)\,dw-H(t\,z\,\eta). \qquad \eta^0=(0,\cdots,0\,1).$$

とおく.

但し積分路は右図の様な路で共通の定義領域に含まれるものをとる.



更にもし $\underline{P}, F, R$ が微分 O$_p$ (or 形式的) ならば $J(t\,z)\equiv 0$ である.

(証明). 相原-河合[4]を参照されたい. そこでは $J(t\,z)=\frac{\partial}{\partial t}G(t\,z\,\eta^0)-\oint L(t\,z\,w)\,G(t\,w\,\eta^0)\,dw$ の場合に計算されているが, まったく同様

の計算が我々の場合も実行できる. q.e.d.

$P=tD_t-A(t,x,D_x)$ がFuchsマイクロ双曲系の時, 条件2)3)より "*local Bochner's theorem*" を使うと, $\exists M>0$ s.t $\{(t,z,\tau,\zeta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n;\ 0<t<\delta,\ |z|<\delta,\ |\zeta'|<\delta|\zeta_n|,\ -\mathrm{Im}(\tau/\zeta_n)>M(|y|+\sum_{\nu=1}^{n-1}|\mathrm{Im}(\zeta_\nu/\zeta_n)|)\}$ 上で $\det(t\tau-\mathring{A}(t,z,\tau,\zeta))\neq 0$ となる. (但し $z=x+\sqrt{-1}y$, $\zeta'=(\zeta_1\cdots\zeta_{n-1})$). 更にもし $\mathring{A}(t,z,\tau,\zeta)$ が巾零行列ならば $M=0$ にとれる. この事に注意すると次が成立つ.

<u>命題(2.1.2)</u>. P がFuchsマイクロ双曲系の時, $\exists\delta_1<\delta$, $\exists M_1\gg 1$ が存在して, $G(t,z,\eta^0)$ は $\{(t,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n;\ 0<t<\delta_1,\ |z|<\delta_1,\ \mathrm{Im}\,z_n>M_1|t|(\sum_{\nu=1}^{n-1}|\mathrm{Im}\,z_\nu|)\}$ で解析的となる. もし $\mathring{A}(t,z,\tau,\zeta)$ が巾零ならば, $M_1=0$ にとることが出来る.

(証明). 柏原-河合[4] §4の論法を我々の場合に移しかえればよい. $\mathring{A}(t,z,\tau,\zeta)$ が巾零ならば $\det(t\tau-\mathring{A}(t,x,\tau,\zeta))=t^\ell\tau^\ell$ だから明らかであろう. q.e.d.

以上を準備としてFuchs双曲系の基本解を構成しよう.

<u>定理(2.1.3)</u>. $P(t,x,D_t,D_x)=tD_t-A(t,x,D_x)$ をFuchs双曲系とする. その特性固有値 $\notin\{n\in\mathbb{Z};\ n>n_0\geq 0\}$, $s=P$ のF-order. $A(t,x,D_x)=\sum_{n=0}^{\infty}t^nA_n(x,D_x)$ とおく. この時次の条件を満す超函数 $E_0(t,x,y),\cdots,E_{n_0}(t,x,y)$ が存在する.

(1) $P(t,x,D_t,D_x)E_j(t,x,y)=\frac{1}{j!}(jt^j-\sum_{i=0}^{n_0-j}t^{j+i}A_i(x,D))\,\delta(x-y)\qquad 0\leq j\leq n_0$.

(2) $\mathrm{Supp}\, E_j(txy) \subset \{(txy) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n;\ |x-y| \leq M|t|^{\frac{1}{s}}\}$.

(3) $S\text{-}S(E_j) \subset \{(txy; \sqrt{-1}(\tau dt + \langle\xi dx\rangle + \langle\eta dy\rangle)\infty);\ |x-y| \leq M|t|^{\frac{1}{s}},\ |\xi+\eta| \leq M|t|^{\frac{1}{s}}|\xi|,\ |\tau| \leq M|\xi|\ \}$.

(4) $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\nu E_j(txy)\big|_{t=0} = \delta_{j\nu}\delta(x-y) \qquad 0 \leq \nu, j \leq n_0$.

(証明) j を固定し $E_j(txy)$ を構成する．§1で展開した形式的な意味で次の Cauchy 問題を考える．

$$\begin{cases} t\frac{\partial}{\partial t}W(tzD_z) - A(tzD_z)W(tzD_z) = \frac{1}{j!}\left(jt^j - \sum_{i=0}^{n_0-j} t^{j+i}A_i(zD_z)\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\nu W(tzD_z)\big|_{t=0} = \delta_{j\nu}\cdot 1 \qquad 0 \leq \nu \leq n_0 \end{cases}$$

data は系(1.1.5)の適合条件を満す様に与えられているので $\hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{s})$ の中に一意的な解をもつ．それを $W(tzD_z) = \sum_{j=0}^{\infty} W_j(tzD_z) \in \hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{s})$ とおく．$G(tz\eta) = \sum_j W_j(tz\eta)\Phi_{n-1+k}(\langle z,\eta\rangle)$, $\frac{1}{j!}(jt^j - \sum_{i=0}^{n_0-j} t^{j+i}A_i(zD_z)) = F(tzD_z) = \sum_j F_j(tzD_z)$ と斉次部分にわけて．$H(tz\eta) = \sum_k F_k(tz\eta)\Phi_{n-1+k}(\langle z,\eta\rangle)$ とおく．すると $\eta^0 = (0,\cdots,0\,1)$ とおくと命題(2.1.1)(2.1.2)が使える．

i) 命題(2.1.2)より $G(tz\eta^0)$ は $\{(tz) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}^n;\ 0<|t|<\delta,\ |z|<\delta,\ \mathrm{Im}\, z_n > M|t|(\sum_{\nu=1}^{n-1}|\mathrm{Im}\, z_\nu|\} \sqcup \{(tz) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}^n;\ |t|<\delta,\ |z|<\delta,\ |z_n| > M'|t|^{\frac{1}{s}}\}$ で解析的，z に関し正則である．従って $G(tz\eta^0)$ を z に関し複素解析的パラメータとなる超函数とみなす時，上の領域より $\mathrm{Im}\, z_n > 0$ から実軸への境界値として超函数を定義できる．それを $u(tx)$ とおく．

ii) 命題(2.1.1)より，次が成り立つ．

$$t\frac{\partial}{\partial t}G(tz\eta^0) - \oint L(tzw)G(tw\eta^0)dw - H(tz\eta^0) = 0.$$

これは積分路表示した時の超函数の積分の理論より次を意味

する. $t\frac{\partial}{\partial t}u(tx)-A(txD_x)u(tx)=\frac{1}{j!}(jt^j-\sum_{i=0}^{n_0-j}t^{j+i}A_i(xD_x))\Phi_{n-1}(\langle x\eta^0\rangle+i0)$.

故に構成した超函数 $u(tx)$ は, 次の 1)′ 2)′ 3)′ を満たす.

1)′ $P(txD_tD_x)u(tx)=\frac{1}{j!}(jt^j-\sum_{i=0}^{n_0-j}t^{j+i}A_i(xD_x))\Phi_{n-1}(\langle x\eta^0\rangle+i0)$

2)′ $S\text{-}S(u(tx))\subset\{(tx;\sqrt{-1}(\tau dt+\langle\xi dx\rangle)\infty);\ |x_n|\leqq M|t|^{\frac{1}{q}},\ |\xi'|\leqq M|t||\xi_n|,\ |\tau|\leqq M|\xi|$

3)′ $(\frac{\partial}{\partial t})^{\nu}u(tx)|_{t=0}=\delta_{j\nu}\ \Phi_{n-1}(\langle x\eta^0\rangle+i0)$.

所で $u(tx)$ を構成する際 $\eta^0=(0,\cdots,0\,1)$ に固定したが, P は微分作用素なので $|\eta|=1$ 全体で定義されている. 故に η を動かせる. また $\Phi_\nu(\langle z\eta\rangle)$ の z についても動かして $\Phi_\nu(\langle z-w,\eta\rangle)$ としても同様に実行できる. 従って η, x を動かして構成した超函数を $u(txy\eta)$ とすると次の 1)″ 2)″ 3)″ を満足する.

1)″ $P(txD_tD_x)u(txy\eta)=\frac{1}{j!}(jt^j-\sum_{i=0}^{n_0-j}t^{j+i}A_i(xD_x))\Phi_{n-1}(\langle x-y,\eta\rangle+i0)$

2)″ $S\text{-}S(u)\subset\{(txy\eta;\sqrt{-1}(\tau dt+\langle\xi dx\rangle+\langle\zeta dy\rangle+\langle\rho d\eta\rangle)\infty);\ |\langle x-y,\eta\rangle|\leqq M|t|^{\frac{1}{q}};\ |\tau|\leqq M|\eta|,\ |\rho-\eta_n^{-1}\xi_n(x-y)|\leqq M|t|^{\frac{1}{q}}|\xi_n|,\ |\xi'-\xi_n\eta_n^{-1}\eta'|\leqq M|t||\xi_n|,\ |\zeta+\eta_n^{-1}\xi_n\eta|\leqq M|t||\xi_n|\}$ (詳しくは, 柏原・河合[4]参照).

3)″ $(\frac{\partial}{\partial t})^{\nu}u(txy\eta)|_{t=0}=\delta_{j\nu}\Phi_{n-1}(\langle x-y,\eta\rangle+i0)\qquad 0\leqq\nu\leqq n$。

そこで今超函数 $E_j(txy)$ を次の様に定義する.

$$E_j(txy)=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-1}}\int_{|\eta|=1}u(txy\eta)\,\omega(\eta).$$

但し $\omega(\eta)=\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\eta_\nu\,d\eta_1\wedge\cdots\wedge d\eta_{\nu-1}\wedge d\eta_{\nu+1}\wedge\cdots\wedge d\eta_n$

ここで次の Radon 変換の公式を思い出そう.

$$\delta(x-y)=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-1}}\int_{|\eta|=1}\Phi_{n-1}(\langle x-y,\eta\rangle+i0)\,\omega(\eta).$$

Radon変換の公式より $E_j(txy)$ は次の 1) 2) 3) をみたす．

1) $P(tx D_t D_x) E_j(txy) = \frac{1}{j!}\left(j t^{j} - \sum_{i=0}^{n_0 - j} t^{j+i} A_i(xD)\right)\delta(x-y)$

2) $S\text{-}S(E_j) \subset \{ (txy : \sqrt{-1}(\tau dt + \langle \xi dx \rangle + \langle \eta dy \rangle)\infty) ;\ |x-y| \leq M|t|^{\frac{1}{\sigma}}.\ |\xi+\eta| \leq M|t|^{\frac{1}{\sigma}}|\xi|$
$|\tau| \leq M|\xi|\ \}$

3) $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu} E_j(txy)\big|_{t=0} = \delta_{j\nu}\,\delta(x-y) \qquad 0 \leq \nu \leq n_0$

最後に $\mathrm{Supp}\, E_j(txy) \subset \{ (txy).\ |x-y| \leq M|t|^{\frac{1}{\sigma}} \}$ を示せば証明は完了する．まず $|x-y| \neq 0$ の時次の a) b) が成立つ事に注意しよう．

(a). $|x-y| \neq 0$ の時．

$$\lim_{\varepsilon\to 0} W_j(txD_x)\int_{|\eta|=1} \frac{\omega(\eta)}{(\langle x-y, \eta\rangle + i\varepsilon)^n} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\eta|=1} \frac{W_j(tx\eta)}{(\langle x-y, \eta\rangle + i\varepsilon)^{n+j}}\,\omega(\eta) = 0.$$

(b) $|x-y| \neq 0$ の時．

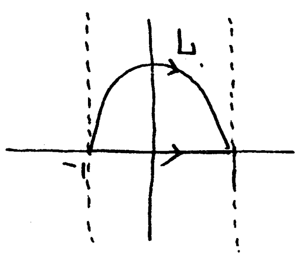
$$\left| \int_{|\eta|=1} \frac{W_j(tx\eta)}{(\langle x-y, \eta\rangle + i\varepsilon)^{n+j}}\,\omega(\eta) \right|_{|t|<\delta} \leq C_\delta \frac{(M\delta^{\frac{1}{\sigma}})^j}{j!} \cdot \frac{A}{(|x-y|^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}(n+j)}}.$$

（但しAは定数）．

(a) はよく知られている．(b) は積分路変更による．実際 $|x-y| = r$, $(x-y) = (r, 0, \cdots, 0)$ と回転しておく．(b) の積分は次の様に書ける．

$$\int_{|\eta|=1} \frac{W_j(tx\eta)}{(r\cdot\eta_1 + i\varepsilon)^{n+j}}\,\omega(\eta) = \int_{-1}^{1} \frac{d\eta_1}{(r\eta_1 + i\varepsilon)^{n+j}} \int_{|\eta'|=\sqrt{1-\eta_1^2}} R_j(tx\eta_1\eta')\,\omega(\eta')$$

左辺の η_1 に注目すると被積分項は $-1 < \mathrm{Re}\,\eta_1 < 1$, $\eta_1 \neq -\frac{i\varepsilon}{r}$ で正則となる．故に $-1 \to 1$ の積分路を右図の L の様に変更すると



$$= \int_L \int_{|\eta'|=\sqrt{1-\eta_1^2}} \frac{R_j(tx\eta_1\eta')}{(r\eta_1 + i\varepsilon)^{n+j}}\, d\eta_1\, \omega(\eta')$$

この式で絶対値をとれば(b)を得る。(a)(b)を使って、$(t x y)$, $|x-y| > M|t|^{\frac{1}{\sigma}}$ ならば $E_j(t x y)=0$ となる事を導びこう。

$$I_\varepsilon = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-1}} \int_{|\eta|=1} \Big\{ \sum_j W_j(t x \eta)\, \Phi_{n-1+j}(\langle x-y, \eta\rangle + i\varepsilon) \Big\}\, \omega(\eta).$$

$$\tilde{I}_\varepsilon = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-1}} \sum_j W_j(t x D_x) \int_{|\eta|=1} \Phi_{n-1}(\langle x-y, \eta\rangle + i\varepsilon)\, \omega(\eta)$$

とおく。

$\varepsilon > M|t|^{\frac{1}{\sigma}}$ の時、I_εの被積分項は絶対収束する。従って項別積分により $I_\varepsilon = \tilde{I}_\varepsilon$、解析函数（$\varepsilon>0$）の一致の定理より $\varepsilon>0$ で $I_\varepsilon = \tilde{I}_\varepsilon$

故に　$E_j(t x y)$ ＝[$\tilde{I}_\varepsilon$ の $\varepsilon>0$, $\varepsilon\to 0$ の境界値として定義される超函数]となる。$|x-y| > M|t|^{\frac{1}{\sigma}}$ ならば(b)より $\tilde{I}_\varepsilon$ は絶対収束して $\varepsilon=0$ も込めて近傍で収束（$|x-y|^2+\varepsilon^2 > M|t|^{\frac{1}{\sigma}}$ 故）。故に $\tilde{I}_\varepsilon$ の $\varepsilon\to 0$ の境界値 $= \lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{I}_\varepsilon = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-1}} \sum_j \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} W_j(t x D_x) \int_{|\eta|=1} \Phi_{n-1}(\langle x-y, \eta\rangle + i\varepsilon)\, \omega(\eta) = 0$.

が(a)より得られる。故に $|x-y| > M|t|^{\frac{1}{\sigma}}$ ならば $E_j(t x y)=0$ となり $\mathrm{Supp}\, E_j(t x y) \subset \{|x-y| \leqslant M|t|^{\frac{1}{\sigma}}\}$ を得る。　　q.e.d.

系(2.1.4)　P を Fuchs 双曲系、特性固有値を $\{n\in\mathbb{Z} : n > n_0 \geqslant 0\}$ とし次の Cauchy 問題を考える。

$$P(t x D_t D_x)\, u(t x) = 0, \quad S\text{-}S(u) \not\ni (0, \pm\sqrt{-1}\, dt\infty), \quad \left(\tfrac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu} u(t x)\big|_{t=0} = u_\nu(x), \quad 0 \leqslant \nu \leqslant n_0.$$

この Cauchy 問題が、超函数 $u_0(x), \cdots, u_{n_0}(x)$ に対して超函数解 $u(t\, x)$ s.t. $S\text{-}S(u) \not\ni (0, \pm\sqrt{-1}\, dt\infty)$ を持つ為の必要十分条件は次の(＊)を満す事である。　(＊)　$\forall\, 0 \leqslant \ell \leqslant n_0$　$(\ell - A_0)\, u_\ell/\ell! = \sum_{i=1}^{\ell} A_i\, u_{\ell-i}/(\ell-i)!$

（但し $A(t x D_x) = \sum t^n A_n(x D)$ とする）

(証明). data $u_\nu(x)$ が $(*)$ を満す時定理の基本解 $E_j(t\,x\,y)$ を使うと. 解 $u(t\,x)$ が $u(t\,x)=\sum_{j=0}^{n_0}\int E_j(t\,x\,y)\,u_j(y)\,dy$ と書ける. 逆に Cauchy 問題の解 $u(t\,x)$ が存在する時. $P\cdot u=0$ より $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\ell} Pu=0$. 従って $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\ell}(Pu)\big|_{t=0}=0$ を得る. 具体的に $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\ell}(Pu)\big|_{t=0}=0$ を表示すると これは関係式$(*)$に他ならない.

q.e.d.

以上 matrix の場合について述べて来たが. 単独の場合は matrix に帰着できる. 従って. Fuchs双曲型についても同様の結果を得る. 念の為. 定理の形で述べておこう.

<u>定理 (2.1.5)</u> $P(t\,x\,D_t\,D_x)$ を weight $(m-k)$ の Fuchs双曲型. $C(\lambda,0)\neq 0$ for $\lambda\geqslant m-k,\ \lambda\in\mathbb{Z}$ とする. $\sigma=\min(m,\,k+1)$. この時次の条件を満たす超函数 $E_0(t\,x\,y),\cdots,E_{m-k-1}(t\,x\,y)$ が存在する.

1) $P(t\,x\,D_t\,D_x)\,E_\nu(t\,x\,y)=0 \qquad 0\leqslant\nu\leqslant m-k-1,$

2) $\operatorname{Supp} E_\nu(t\,x\,y)\subset\{(t\,x\,y)\ ;\ |x-y|\leqslant M|t|^{\frac{1}{\sigma}}\}.$

3) $S\text{-}S(E_\nu)\subset\{(t\,x\,y\,;\sqrt{-1}(\tau,\xi,\eta)\infty)\ ;\ |x-y|\leqslant M|t|^{\frac{1}{\sigma}},\ |\xi+\eta|\leqslant M|t|^{\frac{1}{\sigma}}|\xi|,\ |\tau|\leqslant M|\xi|\}$

4) $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j} E_\nu(t\,x\,y)\big|_{t=0}=\delta_{j\nu}\,\delta(x-y) \qquad 0\leqslant j,\nu\leqslant m-k-1,$

(証明). 定理 (1.1.7) の様に matrix 表示する. $t\cdot W(t\,x)=0$, $S\text{-}S(W)\not\ni(0,x\,;\pm\sqrt{-1}\,dt\,\infty)$ ならば $W(t\,x)=0$ である事に注意すれば良い.

q.e.d.

<u>系 (2.1.6)</u> (2.1.5) の仮定のもとで次の Cauchy 問題を考える.

$P(t,x,D_t,D_x)u(t,x)=0$ $S\text{-}S(u) \not\ni (0, \pm i\,dt\infty)$. $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu} u(t,x)\big|_{t=0} = u_\nu(x)$. $0 \le \nu \le m-k-1$.

Cauchy 問題は. 任意の超函数 $u_0(x), \cdots, u_{n_0}(x)$ に対し. 超函数解 $u(t,x)$ s.t. $S\text{-}S(u) \not\ni (0, \pm i\,dt\infty)$ を必ずもつ.

(証明). 明らか. i.e $u(t,x) = \sum_{j=0}^{m-k-1} \int E_j(t,x,y)\, u_j(y)\, dy$. q.e.d.

上の議論全体は. P が $(0, dx_n\infty)$ での 亚D.Op の場合も. "超函数" の所を "microfunction" に変えれば全て成立つ. つまり. microfunction 枠内でも Cauchy 問題は. 基本解を構成できる.

§2.2. Fuchs 双曲型方程式の超函数解の構造.

本節では $P(t,x,D_t,D_x)$ が Fuchs 双曲型 (for t) の時. 次の完全列の内容を調べてゆきたい. $0 \to \mathrm{Ker}\,P \to \mathcal{B} \xrightarrow{P} \mathcal{B} \to \mathrm{Coker}\,P \to 0$.

weight 0 の Fuchs 双曲型は普通の双曲型故. $\mathrm{Ker}\,P \cong {}'\mathcal{B}^m$ (${}'\mathcal{B}$ は x-変数のみの超函数), $\mathrm{Coker}\,P = 0$ である事に注意しよう.

$P(t,x,D_t,D_x)$ を weight $(m-k)$ の Fuchs 双曲型, $\tilde{P} = t^{-k}P$ とおく時. $\tilde{P}$ は $\{t=0\}$ に特異点をもつ有理型函数を係数にもつ. そこで一般に. P を有理型函数を係数とする m 階微分作用素とする時,

D. P が $\{\varphi=0\}$ に関し non-characteristic とは, $\sigma_m(P)(x, d\varphi)$ が正則であって. かつ $\neq 0$ なる事.

2) P が $d\varphi$ 方向に双曲型とは $\sigma_m(P)$ が正則で、かつ $d\varphi$ 方向に $\sigma_m(P)$ が双曲型なる事。

と呼ぶ事にしよう。この時 Boney-Schapira [6] [7] で展開された議論は上の 1) 2) の形の微分作用素迄、精密化する事ができる。簡単にその辺をスケッチしてみよう。

$x\in\mathbb{R}^n$ その複素化 $z\in\mathbb{C}^n$。$\mathbb{C}^n$ と $\mathbb{R}^{2n}$ とを内積 $\langle z,\zeta\rangle=\sum_i z_i\bar{\zeta}_i \longmapsto \mathrm{Re}\langle z,\zeta\rangle$ によって同一視する。Γ を開凸錐、$B(0,\varepsilon)$ を原点中心、半径 ε の開球体。$\Gamma_\varepsilon=\Gamma\cap B(0,\varepsilon)$ と書く。I を $(2n-1)$ 次元球面上の凸 proper 開部分集合、U を $\mathbb{C}^n$ の開集合、∂U をその境界とする。U の境界の点 $z_0\in\partial U$ で性質 $C(z_0,I)$ をもつとは次の条件を満す事をいう。

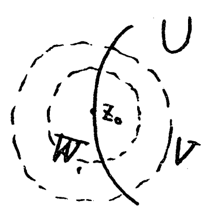
$C(z_0,I)$：任意の近傍 $I'\supset I$ に対し或る近傍 $V\ni z_0$、$\varepsilon>0$ が存在して $V\cap U+\Gamma'_\varepsilon\subset U$ となる。（Γ' は I' の polar の内部）

<u>命題 (2.2.1)</u>　$P(z,D_z)$ を ∂U 及び U の外部にのみ特異点を許す m 階微分作用素とし、次の 1) 2) を満たすとする。

1) 開集合 U は $z_0\in\partial U$ で性質 $C(z_0,I)$ をもつ。

2) P は z_0 で I 方向に non-characteristic

この時任意の z_0 の近傍 V に対し、或る近傍 W：$V\supset W\ni z_0$ が存在して次の性質をもつ。つまり



*) $\forall f(z)\in\mathcal{O}(U\cap V)$, $\exists u(z)\in\mathcal{O}(U\cap W)$ s.t. $Pu=f$ on $U\cap W$.

<u>系(2.2.2)</u> $P(z,D_z)$ を m 階微分作用素とし次の 1) 2) 3) を満たす.

1) $\sigma_m(P)=\varphi(x)\,p_m(x,\xi)$ なる積の形に書ける.

2) $p_m(x,\xi)$ は $\xi^0\in\mathbb{R}^n-\{0\}$ 方向に non-characteristic i.e. $p_m(0,\xi^0)\neq 0$

3) φ の複素化を $\tilde\varphi$ とする時, $\tilde\varphi(z)\neq 0$ on $\{z=x+\sqrt{-1}y\in\mathbb{C}^n;\ |x|<\varepsilon,$ $y=t\xi^0;\ 0<t<\varepsilon\}$.

この時、$P(x,D_x):\mathcal{C}_{(0,\sqrt{-1}\xi^0\infty)}\longrightarrow\mathcal{C}_{(0,\sqrt{-1}\xi^0\infty)}$ は全射である.

(系の証明) $\xi^0=(0,\cdots,0,1)$ とする. 任意の $\mu\in\mathcal{C}_{(0,\sqrt{-1}\xi^0\infty)}$ をとる. $\mathcal{C}$ の flabbiness より $\exists f\in\mathcal{B}$ s.t $sp(f)=\mu$, となる. ここで f は $U_\varepsilon=\{z=x+iy,\ |x|<\varepsilon,\ |y|<\varepsilon,\ |y_1|+\cdots+|y_{n-1}|<My_n,\ 0<M\ll 1\}$ 上の正則函数 $\tilde f(z)$ の境界値として実現できる. M を十分小さくとり I を ξ^0 に十分近い方向の集合をとると, U_ε は原点 $0\in\partial U_\varepsilon$ で性質 $C(0.I)$ をもつ. 一方 $\tilde P=\frac{1}{\tilde\varphi}P$ は U_ε 上に singularity をもたない. (local Bochner's theorem による) 故に命題(2.2.2)より 領域を縮めれば $\tilde P(z,D_z)\tilde u(z)=\frac{1}{\tilde\varphi(z)}\tilde f(z)$ は $U_{\varepsilon'}$ $(\varepsilon'\ll\varepsilon)$ で解 $\tilde u(z)$ をもつ. $\tilde u(z)$ の境界値の決める超函数を $u(x)$ とすると $Pu=f$ となる. 故に $P\cdot sp(u)=sp(f)=\mu$ となり全射がいえた. q.e.d.

特異点をもつ作用素 P の双曲型についても次の形にまとめられる. $\mathbb{C}^n\ni z=x+\sqrt{-1}y$, $\xi^0\in\mathbb{R}^n-\{0\}$, $B(x,r)\subset\mathbb{R}^n$, $B'(x,r)=B(x,r)\cap\{\langle x,\xi^0\rangle=0\}$ と書く. $K(a,\delta)$ を $B'(0,a)$ と $a\delta\xi^0$ との $\mathbb{R}^n$ の中での開凸包, $\Gamma'=\{y\in\mathbb{R}^n;\ \langle y,\xi^0\rangle=0$ 平面内の開凸錐$\}$ Γ を $\mathbb{R}^n$ 内の開凸錐とする.

命題(2.2.3) $P(x, D_x)$ を原点での微分作用素（特異点を許す）．

1) $\overline{B(0,r)}$ の各点で ξ^0 方向に双曲型．

2) $P(z, D_z)$ の低階の特異点は $\{z \in \mathbb{C}^n; \langle z, \xi^0\rangle = 0\}$ に含まれる．

この時次の性質をみたす $\delta > 0$ が存在する．

*) $0 < a < r$. $f(z) \in \mathcal{O}(B'(0,a) + \sqrt{-1}\Gamma'_\varepsilon)$ かつ Γ' を含む Γ_1 に対し $P(z, D_z)f(z) \in \mathcal{O}(\{K(a,\delta) + \sqrt{-1}\Gamma_{1,\varepsilon}\} \setminus \{\langle z, \xi^0\rangle = 0\})$ ならば，Γ_1 を適当に Γ_2 s.t. $\Gamma_2 \supset \Gamma'$ にとりかえて $f(z) \in \mathcal{O}(K(a,\delta) + \sqrt{-1}\Gamma_{2,\varepsilon})$ とできる．

命題(2.2.1) (2.2.3) の証明は Boney-Schapira [6], [7] と同じなので省略する．両命題に定理 (1.1.7) を合わせると再び Cauchy 問題の解の存在を得る．

定理(2.2.4) P を weight $(m-k)$ の Fuchs 双曲型，$C(\lambda, 0) \neq 0$ for $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \geq m-k$. とする．この時次の Cauchy 問題

$$\begin{cases} P \cdot u(t,x) = f(t,x), & S\text{-}S(f) \not\ni (0, \pm\sqrt{-1}\,dt\infty), \\ S\text{-}S(u) \not\ni (0, \pm\sqrt{-1}\,dt\infty), & \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu} u(t,x)\Big|_{t=0} = u_\nu(x) \qquad 0 \leq \nu \leq m-k-1 \end{cases}$$

は，任意の data $f(t,x)$, $u_0(x), \cdots, u_{m-k-1}(x)$ に対し解 $u(t,x)$ を必ずもつ．

（証明）Boney-Schapira [7] とまったく同様にできる　　q.e.d.

定理(2.2.5) (2.2.4) の仮定のもとでは，$P: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ は全射である．つまり局所可解性が成り立つ．

(証明). 系(2.2.2)より. $P: C_{(0,\pm\sqrt{-1}dt\infty)} \to C_{(0,\pm\sqrt{-1}dt\infty)}$ は全射である. 故に $\forall f\in \mathcal{B}$ に対し適当な $v\in\mathcal{B}$ をとって $f-Pv$ について. $S\text{-}S(f-Pv)\not\ni(0;\pm\sqrt{-1}dt\infty)$ とできる. (2.2.4)より $\exists u\in\mathcal{B}$ s.t. $Pu=f-P.v$. 故に $P(u+v)=f$ となり局所可解がいえる. q.e.d.

以上によって. $\mathrm{Coker}\,P=0$ が示された. 次に $\mathrm{Ker}\,P$ の構造をしらべたい. その指針となるのは次の3つの完全列である.

$a^\pm\mathcal{B}=\{u\in\mathcal{B},\ S\text{-}S(u)\not\ni(0,\pm\sqrt{-1}dt\infty)\}$, $a\mathcal{B}=a^+\mathcal{B}\cap a^-\mathcal{B}$

$\mathcal{B}(\pm)^P=\{t>0\ (t<0)$ なる領域での解$\}$ とおく.

<u>命題(2.2.6)</u>. P を weight $(m-k)$ の Fuchs 双曲型 (for t). $C(\lambda,0)\neq0$ for $\lambda\geq m-k$, $\lambda\in\mathbb{Z}$ とする. この時次の2つは完全列となる.

1) $0\to a\mathcal{B}^P \xrightarrow{\alpha} a^+\mathcal{B}^P\oplus a^-\mathcal{B}^P \xrightarrow{\beta}\mathcal{B}^P\to0$,

2) $0\to a\mathcal{B}^P\xrightarrow{\alpha}\mathcal{B}^P\xrightarrow{\beta} C^P_{(0,+\sqrt{-1}dt\infty)}\oplus C^P_{(0,-\sqrt{-1}dt\infty)}\to0$.

更に $\lambda\in\mathbb{Z}$. $\lambda\leq-1$ に対しても $C(\lambda,0)\neq0$ ならば, 次の完全列を得る.

3). $0\to\mathcal{B}^P\xrightarrow{\alpha}\mathcal{B}(+)^P\oplus\mathcal{B}(-)^P\xrightarrow{\beta}{}'\mathcal{B}^{m-k}\to0$.

(証明). 1) の証明. β が全射なる事のみいえばよい. C の flabbiness より. $u\in\mathcal{B}^P$ は $u=u_+-u_-$. $u_\pm\in a^\pm\mathcal{B}$ と表わせる. $Pu=0$ 故 $Pu_+=Pu_-=f\in a\mathcal{B}$. 定理(2.2.4)より $\exists w\in a\mathcal{B}$. $Pw=f$ となる 故に. $P(u_\pm-w)=0$, $u_\pm-w\in a^\pm\mathcal{B}$, $u=(u_+-w)-(u_--w)$ ∴ β は全射.

2)の証明も 1)と同様に C の flabbiness と (2.2.4)より得られる.

3) の証明．P の形式的共役を P^* と書く時 $(-1)^m P^*$ も weight $(m-k)$ の Fuchs 型，その特性多項式を $\mathcal{C}^*(x,\lambda)$ とおく時，次を得る．

$$(-1)^k \mathcal{C}^*(\lambda,x) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+k+1)\{(-\lambda-1)(-\lambda-2)\cdots(-\lambda-k)+a_1(x)(-\lambda-1)\cdots(-\lambda-k+1)+\cdots+a_k(x)\}.$$

従って．$\lambda\in\mathbb{Z}$．$\lambda\leqslant-1$．$\mathcal{C}(\lambda,0)\neq0 \Rightarrow \lambda\in\mathbb{Z}$．$\lambda\geqslant m-k$，$\mathcal{C}^*(\lambda,0)\neq0$ となる．定理(1.1.7)より $0\longrightarrow {}'\mathcal{A}^{m-k}\longrightarrow \mathcal{A}|_S \xrightarrow{P^*} \mathcal{A}|_S \longrightarrow 0$，（$S=\{t=0\}$）を得る．小松河合[8]の論法で双対をとると．$0\longrightarrow \mathcal{H}_S^0(\mathcal{B}) \xrightarrow{P} \mathcal{H}_S^0(\mathcal{B}) \longrightarrow {}'\mathcal{B}^{m-k} \rightarrow 0$ を得る．これより α＝単射なる事が示された．更に小松·河合[8]と P の局所可解性より次を得ることは易しい．

$$b:\ (\mathcal{B}(+)^P\oplus\mathcal{B}(-)^P)/\mathcal{B}^P \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_S^0(\mathcal{B})/P\mathcal{H}_S^0(\mathcal{B}) \cong {}'\mathcal{B}^{m-k}.$$

よって．3)が証明された． q.e.d.

命題(2.2.6)より．$\mathrm{Ker}\,P$ の研究は $a^{\pm}\mathcal{B}^P$，$a\mathcal{B}^P$，$C^P_{(0,\pm\sqrt{-1}dt\infty)}$，$\mathcal{B}(\pm)^P$ の研究に帰着される．現在次の予想のもとに研究を進めているが．まだ詳しくは解明されていない．詳細については今後の研究を待たれたい．

<u>予想1</u> ${}'\mathcal{B}$ を x-変数超函数の芽とする時，$a^{\pm}\mathcal{B}^P\cong{}'\mathcal{B}^m$，$a\mathcal{B}^P\cong{}'\mathcal{B}^{m-k}$，$C^P_{(0,\pm\sqrt{-1}dt\infty)}\cong{}'\mathcal{B}^k$，$\mathcal{B}(\pm)^P\cong{}'\mathcal{B}^m$．

<u>予想2</u> 上の3つの完全列は分解している．

<u>予想3</u> $Pu(t,x)=0$，$S\text{-}S(u)\ni(0,\pm\sqrt{-1}dt\infty)$．$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu}u\big|_{t=0}=0$ $0\leqslant\nu\leqslant m-k-1$ ならば $u(t,x)\equiv0$ である．（予想3と Cauchy 解の存在とから

$aB^P \cong {}'\mathcal{B}^{m-k}$が出る事に注意しよう).
$\sigma_m(P) = t^k D_t^m$の場合は上の予想は証明できる. その詳細を次節で述べてゆきたい.

§3. 巾零Fuchs系

佐藤·河合·柏原[9]は, $\sigma_m(P) = D_t^m$のm階(擬)微分作用素について, 方程式$Pu=0$と$D_t^m u=0$とが同値である事を証明している. これに対応する結果を我々のFuchs型の場合に導びこう. $\sigma_m(P)=t^k D_t^m$なるFuchs型に相当するmatrix表示は次の通りである.

1). $P = tD_t - A(t\,x\,D_x)$はVolevičの意味のFuchs系

2) $\mathring{A}(t\,x\,\tau\,\xi) = (\sigma_{n_i-n_j+1}(A_{ij}))$が巾零行列.

今後1) 2)を満たす作用素を巾零Fuchs系と呼び, その標準形を求めてゆく. §3.1では, 方程式$(tD_t - A(t\,x\,D_x))u=0$と$(tD_t - A(0\,x\,D_x))u=0$とが同値である事を示す. §3.2ではその応用として, Cauchy解の一意性, $aB^P \cong {}'\mathcal{B}^{m-k}$, $a^{\pm}B^P \cong {}'\mathcal{B}^m$を$\sigma_m(P)=t^k D_t^m$の場合に証明する.

§3.1. 巾零Fuchs系の標準形

$(t\,x) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$. $P = tD_t - A(t\,x\,D_x)$を$(0.\,dx_n\infty) \in \mathbb{C}\times P^*\mathbb{C}^n$での$\mathcal{P}_D \mathcal{O}_p$からなる巾零Fuchs系とする. $(t\,x'\,x_n) \to (e^{i\theta_1}t,\ x'\,e^{i\theta_2}x_n)$と変換しても.

Pはやはり巾零Fuchs系である事と命題(2.1.2)の後半に注意すれば次の命題を得る.

<u>命題(3.1.1)</u>. $P=tD_t-A(t\,x\,D_x)$を巾零Fuchs系. $F(t\,x\,D_x)$を亜D.Op. $R(t\,x\,D_x)$を一次形式的亜D.Opとし次関係式を満たしているとする.

$$t\frac{\partial}{\partial t}R(t\,x\,D_x)-A(t\,x\,D_x)R(t\,x\,D_x)=F(t\,x\,D_x)$$

この時$R(t\,x\,D_x)$は無限階の亜D.Opとなる.

(証明). $G(t\,x\,\eta)=\sum_j R_j(t\,x\,\eta)\,\Phi(\langle x\,\eta\rangle)$. とおく. (但し. $R(t\,x\,D)=\sum_j R_j(t\,x\,D_x)$). $\eta^0=(0,\cdots,0.1)$とおき上の注意と命題(2.1.2)より. $G(t\,x\,\eta^0)$は. $\bigcup_{\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}}\{(e^{i\theta_1}t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n;\ 0<e^{i\theta_1}t<\delta,\ |x|<\delta.\ \mathrm{Im}(e^{i\theta_2}x_n)>0\}\sqcup\{(t\,x)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n;\ |t|<\delta,\ |x|<\delta,\ |x_n|>M'|t|^{\frac{1}{q}}\}$で正則多価函数となる. 故に結局. $G(t.x\,\eta^0)$は. $\{(t\,x)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n;\ |t|<\delta.\ |x|<\delta.\ x_n\neq 0\}$で正則. 所で.定理(2.1.3)の証明で注意した様にη^0を動かしてもよい. 更に$\Phi_j(\langle x\,\eta\rangle)$の$x$も動かして$x-y$とできる. 従って. $\sum_{j=-\infty}^{\infty}R_j(t\,x\,\eta)\,\Phi_j(\langle x-y.\,\eta\rangle)$は$\{(t\,x\,y\,\eta)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n;\ |t|<\delta.\ |x|<\delta.\ |y|<\delta.\ |x-y|\ll 1.\ |\eta-\eta^0|\ll 1\ \ \langle x-y.\,\eta\rangle\neq 0\}$で正則となる. 今$p=\langle y.\,\eta\rangle$とおくと$\sum_{j=-\infty}^{\infty}R_j(t.x\,\eta)\,\Phi_j(\langle x\,\eta\rangle-p)$が$p\neq\langle x.\,\eta\rangle$の領域で収束する事を意味する. この式は亜D.Opの定義そのものに他ならない.

q.e.d.

今$(t\,x_1\cdots x_\ell)=(t\,x')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^\ell=\tilde{X}$, $(t\,x_1\cdots x_\ell\cdots x_n\,y)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m=\tilde{Y}$. $X=\{t=0\}\subset\tilde{X}$, $Y=\{t=0\}\subset\tilde{Y}$とおく. $(t\,x')$に正則な holomorphic microfunction (又は.

holomorphic hyperfunction）を $C_{\tilde{X}|\tilde{Y}}$.（$B_{\tilde{X}|\tilde{Y}}$）とおく．この時亜D.Op.（diff.op）は $C_{\tilde{X}|\tilde{Y}}$（$B_{\tilde{X}|\tilde{Y}}$）に作用し．$u(txy)\in C_{\tilde{X}|\tilde{Y}}$（$B_{\tilde{X}|\tilde{Y}}$）に対し $u|_{t=0}\in C_{X|Y}$.（$B_{X|Y}$）となる．従って．$C_{\tilde{X}|\tilde{Y}}$. $B_{\tilde{X}|\tilde{Y}}$ の中で．Cauchy問題を考える事ができる．（$C_{X|Y}$. $B_{X|Y}$ 等の定義性質については．佐藤河合．柏原[9]を参照されたい．大雑把にいえば．$C_{X|Y}$. $B_{X|Y}$ は．亜D.Op.なりdiff.op を積分作用素として表わした時．その積分核となる函数のつくる層である．）

<u>定理(3.1.2)</u>．$P=tD_t-A(txD_x)$ 巾零Fuchs系．特性固有値 $\notin\{n\in\mathbb{Z}.\ n>n_0\geq 0\}$ とし．次のCauchy問題を考える．

$$\begin{cases} Pu(txy)=f(txy), & u(txy),\ f(txy)\in C_{\tilde{X}|\tilde{Y}}\ (\text{又は}\ B_{\tilde{X}|\tilde{Y}}). \\ (\frac{\partial}{\partial t})^{\nu}u(txy)|_{t=0}=u_{\nu}(xy),\ 0\leq\nu\leq n_0. & u_{\nu}(xy)\in C_{X|Y}\ (\text{又は}\ B_{X|Y}). \end{cases}$$

このCauchy問題が．$f(txy)$. $u_0(xy)\cdots u_{n_0}(xy)$ に対して解をもつ為の必要十分条件は次の(*)を満たす事であり．その時解は一意的である．　$A(txD_x)=\sum t^n A_n(xD_x)$ とする $f(txy)=\sum t^n f_n(xy)$.

$$(*)\ \forall\, 0\leq l\leq n_0.\quad (l-A_0)\,u_l/l! = \sum_{i=1}^{l} A_i\, u_{l-i}/(l-i)! + f_l.$$

（証明）．$C_{\tilde{X}|\tilde{Y}}\otimes\mathcal{D}_{x''y}$ は $P(tx'D_{x''}D_y)$ なる形の亜D.Op 全体と一致し．$f(txy)\in C_{\tilde{X}|\tilde{Y}}$ は $f(txy)=P(tx'D_{x''}D_y)\delta(x'')\delta(y)$ なる形に一意的に書ける．従って．上のCauchy問題は．亜D.Op のCauchy問題（§1の形）に書き直す事ができる．§1の定理(1.1.5)と命題(3.1.1)より定理を得る．$B_{\tilde{X}|\tilde{Y}}$ についても同様．

q.e.d.

$P = tD_t - A(txD_x)$ を巾零Fuchs系とし．その特性固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell$ とする．$(00; dx_n - dy_n)$ で定義された $\ell^2 \times \ell^2$ matrix 亚D.Op を次の様に書く．$\otimes P(txyD_tD_xD_y) = tD_t - I_\ell \otimes A(txD_x) + A^*(oyD_y) \otimes I_\ell$.

$P\otimes(txyD_tD_xD_y) = tD_t - I_\ell \otimes A(oxD_x) + A^*(tyD_y) \otimes I_\ell$.

この時 $\otimes P$, $P\otimes$ も巾零Fuchs系となり．その特性固有値は $\alpha_i - \alpha_j$ $1 \le i, j \le \ell$ となる．（但し $A^*(txy) = (A_{ij})^* = {}^t(A_{ij}^*)$ とおく．）

従って．定理(3.1.2)と．亚D.Op (diff op) が．holomorphic microfunction (hyperfunction) を積分核とする積分作用素に他ならない事に注意すれば．次の巾零Fuchs系の標準形を得る．

<u>定理(3.1.3)</u> $P = tD_t - A(txD_x)$ を $(o.dx_n\infty)$ での巾零Fuchs系．特性固有値の差 $\notin \mathbb{Z} - \{0\}$ であるとする．この時．可逆な亚D.Op の行列 $U(txD_x)$ が存在して．$(tD_t - A(txD_x))U(txD_x) = U(txD_x)(tD_t - A(oxD_x))$ が成立つ．更に P が微分作用素なら $U(txD_x)$ も微分作用素となる．

(証明)．最初に次の Cauchy 問題を考えよう．

$(e_1)\ (tD_t - A(txD_x))U(txD_x) = U(txD_x)(tD_t - A(oxD_x))$.　$U(txD_x)|_{t=0} = 1_x$.

ここで $tD_t \cdot U(txD_x) = t\frac{\partial}{\partial t}U(txD_x) - U(txD_x) \cdot tD_t$ であるから $(\tilde{e}_1)$ となる．

$(\tilde{e}_1)$. $t\frac{\partial}{\partial t}U(txD_x) - A(txD_x)U(txD_x) + U(txD_x)A(oxD_x) = 0$,　$U(txD_x)|_{t=0} = 1_x$.

所で 亚D.Op $U(txD_x)$ とは．$K(txy)dy = (K_{ij}(txy)dy)$ なる積分作用素に他ならないから．Cauchy問題 $(\tilde{e}_1)$ は holomorphic microfunction $K_{ij}(txy)$ に関する Cauchy 問題に書き直すことができる．$(\tilde{e}_1)$ の (i,j)

成分を $K_{\nu\mu}(txy)dy$ を使って書き表わすと

$$t\frac{\partial}{\partial t}K_{ij}(txy)dy-\sum_{\nu}A_{i\nu}(txD_x)K_{\nu j}(txy)dy+\sum_{\mu}K_{i\mu}(txy)dy\cdot A_{\mu j}(oxD_x)=0.$$

ここで $A_{\mu j}(oxD_x)=A_{\mu j}(oxD_x)\delta(x-y)dy=A^{*}_{\mu j}(oyD_y)\delta(x-y)dy$ だから

$$K_{i\mu}(txy)dy\cdot A_{\mu j}(oxD_x)=A^{*}_{\mu j}(oyD_y)K_{i\mu}(txy)dy$$

を得る．今 $U(txy)={}^t(K_{11},K_{12},\cdots,K_{1\ell},K_{21},\cdots,K_{\ell\ell})$ とおき $(\hat{E}_1)$ を ℓ^2ベクトル $U(txy)$ に関する方程式で表わすと上の成分表示より

$$t\frac{\partial}{\partial t}U(txy)-(I_\ell\otimes A(txD_x)-A^{*}(oyD_y)\otimes I_\ell)U(txy)=0$$

となる．故に $U_0(xy)={}^t(K_{11}^0\cdots K_{\ell\ell}^0)$，$K_{ij}^0=\delta_{ij}\delta(x-y)$ とおくと $(\hat{E}_1)$ は，

$$(\hat{E}_1)\quad \otimes P(txyD_tD_xD_y)U(txy)=0\qquad U(txy)|_{t=0}=U_0(xy).$$

と書ける．定理(3.1.2)より $(\hat{E}_1)$ は $U(txy)$：holomorphic microfunction として一意的に解をもつ．故に Cauchy 問題 (E_1) は $\mathcal{E}D.\mathcal{O}_p$ $U(txD_x)$ を一意的に解としてもつ．

同様に次の Cauchy 問題が解を $\mathcal{E}D.\mathcal{O}_p$ にもつ事も $(\hat{E}_2)$ を使って得られる．(E_2)：$V(txD_x)(tD_t-A(txD_x))=(tD_t-A(oxD_x))V(txD_x)$，$V(txD_x)|_{t=0}=1_x$.

最後に $U(txD_x)V(txD_x)=V(txD_x)U(txD_x)=1$ を示せば証明は完了する．$E_1.E_2$ より UV は次の方程式をみたす．

$$(E_3).\quad t\frac{\partial}{\partial t}(UV)-A\cdot(UV)+(UV)A=0\qquad UV|_{t=0}=1.$$

従って再び積分核の核函数についての方程式に書きかえると，

$$(\hat{E}_3).\quad t\frac{\partial}{\partial t}W(txy)-(I_\ell\otimes A(txD_x)-A^{*}(txD_y)\otimes I_\ell)W(txy)=0\qquad W|_{t=0}=W_0(xy).$$

故に Cauchy 問題 $(\hat{E}_3)$ の解が一意的である事を示せば $UV=1$ を得る．$W(txy)$ は t に関し正則故 $W(txy)=\sum t^m W_m(xy)$ と展開できる．

$\hat{A} = I_\ell \otimes A - A^* \otimes I_\ell = \sum t^m \hat{A}_m(x\,y\,D_x D_y)$ とする時 $m \geqslant 1$ では $(m-\hat{A}_0)$ は可逆だから $(\hat{e}_3)$ の Cauchy 解の一意性は t の巾に展開して係数を比較すれば、ただちに得る．結局 $UV=1$ が示された．$VU=1$ も同様である．P の成分が微分作用素の時は holomorphic hyperfunction についての Cauchy 問題に帰着させればよい．

<u>注意(3.1.4)</u> 巾零 Fuchs 系の時は $(tD_t - A(t\,x\,D_x))\,U(t\,x\,D_x) = U(t\,x\,D_x)\,(tD_t - A(0\,x\,D_x))$．$U(t\,x\,D_x)|_{t=0} = 1$ が一意解をもつ事により 標準形を求めた．Fuchs 系の条件が崩れると．もはや一意解の存在は保証されない．次の例は興味深い例であろう

<u>例</u>

$$\begin{cases} \left(tD_t - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ D_x + t f(x), & 0 \end{bmatrix}\right) U(t\,x\,D_x) = U(t\,x\,D_x)\left(tD_t - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ D_x & 0 \end{bmatrix}\right) \\ U(t\,x\,D_x)|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

$(t\,x) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$，$(0.\,dx\infty)$ で考える

1) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ とおく時有限階 $\mathcal{E}$，D，$\mathcal{O}_p$ では $U(t\,x\,D_x)$ は解なし．

2) 無限階を許すと任意の $f(x)$ に対し．微分作用素の範囲で無数に多くの解が存在する．

<u>定理(3.1.5)</u> $P(t\,x\,D_t D_x)$ を $\sigma_m(P) = t^m D_t^m$ なる Fuchs 型作用素 $e(\lambda x) = \prod_{i=1}^{m}(\lambda - \lambda_i(x))$ とおく時．$\lambda_i(x)$ が正則 かつ $\lambda_i(0) - \lambda_j(0) \notin \mathbb{Z} - \{0\}$ とする この時 $Pu = 0$ と $(tD_t - \lambda_j(x))v_j = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ とは left $\mathcal{D}$-module として同型である．（但し $\mathcal{D}$ は微分作用素のなす層．）

(証明) $t^\ell D_t^\ell = tD_t(tD_t-1)\cdots(tD_t-\ell+1)$ により matrix 表示して 定理(3・1・3)を使うと $Pu=0$ と $\left(tD_t - \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ -a_m(x), & \cdots & \cdots, & -a_1(x)+m-1 \end{bmatrix}\right) w = 0$ と同値 (as left $\mathcal{D}$-module).

$[\ \ ] = A(x)$ とおく.

今 $R(x) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1(x) & & \lambda_m(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1(x)^{m-1} & & \lambda_m(x)^{m-1} \end{bmatrix}$ とおくと $R(x)$ は可逆であり, かつ

$R(x)^{-1}A(x)R(x) = \begin{bmatrix} \lambda_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m(x) \end{bmatrix}$ となる.

q.e.d.

$k \neq m$ の時は一般には簡単な形にもってゆけないが, 例えば, $\mathcal{F} = \mathcal{O}, \mathcal{A}\mathcal{B}, \mathcal{A}+\mathcal{B}$ ならば $D_t u = v \Leftrightarrow tD_t u = tv$ が成立つので matrix 表示して方程式を簡単にできる. 今一般に "$\mathcal{F} \ni u, tu=0 \Rightarrow u=0$" が成り立つとする. この時次を得る.

<u>定理(3・1・6)</u>. P を $\sigma_m(P) = t^k D_t^m$ なる weight$(m-k)$ の Fuchs型, $\hat{e}(\lambda, x) \equiv (\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-k) + a_1(x)(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1) + \cdots + a_k(x) = \prod_{\nu=1}^{k}(\lambda - \lambda_\nu(x))$ とおく時 $\lambda_\nu(x)$ 正則で $\lambda_i(0)$, $\lambda_j(0) - \lambda_k(0) \notin \mathbb{Z} - \{0\}$ $(j \neq k)$. この時次は同値.

1). $Pu = 0 \quad u \in \mathcal{F}$

2) $(tD_t - \lambda_j(x))v_j = 0 \quad 1 \leq j \leq k$. $D_t v_\nu = 0 \quad k+1 \leq \nu \leq m$. $v_j, v_\nu \in \mathcal{F}$

(証明) $\hat{P} = tP \quad u_0 = u$. $D_t u_0 = u_1 \cdots D_t u_{m-k-1} = u_{m-k}$, $tD_t u_{m-k} = u_{m-k+1}, \cdots, (tD_t - k+1)u_{m-2} = u_{m-1}$ とおいて matrix 表示する. その時の Fuchs系の特性固有値 $\{0, \lambda_j(0)\}$ 故定理(3・1・3)が使え 1)と次とは同値となる.

$$w \in \mathfrak{F}.\quad \left(tD_t - \left[\begin{array}{c|cccc} & & & & \\ & 1 & & & \\ \hline & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & -a_k(x) & \cdots & & -a_1(x)+k \end{array}\right]\right) w = 0.$$

$[\ \ ] = A(x)$ とおき.

$$R(x) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & \cdots & 1 \\ & & & \lambda_1(x) & & \lambda_k(x) \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & \lambda_1(x)^{k-1} & & \lambda_k(x)^{k-1} \end{array}\right]$$ とおく。$R(x)$ は可逆で, かつ

$$R(x)^{-1} A(x) R(x) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda_1(x) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_k(x) \end{bmatrix}$$ となる.

"$\mathfrak{F} \ni u.\ tu = 0 \Rightarrow u = 0$" に注意すると 2) と同値. q.e.d.

§3.2. Cauchy 問題の解の一意性.

本節では §3.1 の結果を使って. $\sigma_m(P) = t^k D_t^m$ の場合の超函数解をしらべてゆきたい.

<u>定理(3.2.1)</u> $P = tD_t - A(t, x, D_x)$ を微分作用素の Fuchs 系, 特性固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell$ matrix size $= \ell$ とする。この時次が成立つ.

1) $\alpha_i - \alpha_j \notin \mathbb{Z} - \{0\}$ の時 $a^{\pm}\mathcal{B}^P \cong {}'\mathcal{B}^\ell$.

2) $\alpha_i, \alpha_j - \alpha_k \notin \mathbb{Z} - \{0\}$ の時 $Pu = 0$ $u \in a\mathcal{B}$. $u|_{t=0} = 0$ ならば $u = 0$.

(証明) 定理(3.1.3)より $P = tD_t - A(x)$ としてよい. $R = e^{\log t \cdot A(x)}$ とおくと R は $t \neq 0$ で正則. $P \cdot R = R \cdot D_t$ $R^{-1} = e^{-\log t A(x)}$ となる.

1) の証明. $u \in a^+\mathcal{B}$. $Pu = 0$ の時. $P \cdot u = PR \cdot R^{-1}u = R \cdot D_t R^{-1} u = 0$. 故に $t < 0$ では. $R^{-1}u = {}^{\exists}f(x)$ と書ける. 今 $\tilde{u} = e^{\log(t-i0)A(x)} f(x)$ と定義すると.

$P\tilde{u}=0$. $u=\tilde{u}$ on $\{t<0\}$. $S\text{-}S(u-\tilde{u})\not\ni(0,\sqrt{-1}dt\infty)$ 故に Holmglenの定理より $u=\tilde{u}=e^{\log(t-i0)A(x)}f(x)$ と書ける. $u\mapsto f(x)$ は1対1 ontoに対応するので $a^{+}\mathcal{B}^{\ell}\xrightarrow{\sim}{}'\mathcal{B}^{\ell}$ を得る. $a^{-}\mathcal{B}^{\ell}$ も同様である.

2)の証明. 1)の論法より $u\in a\mathcal{B}$, $Pu=0$ の時, $u(t,x)=e^{\log(t-i0)A(x)}f(x)$ $=e^{[\log(t-i0)+2\pi i]A(x)}f(x)$ と書ける. 従って $t>0$ で R^{-1} を掛けると, $f(x)$ $=e^{2\pi iA(x)}f(x)$. i.e. $\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}(2\pi iA(x))^{m-1}\right]2\pi iA(x)f(x)=0$. $\alpha_i\notin\mathbb{Z}-\{0\}$ より [ ] 内は可逆行列故 $A(x)f(x)=0$ を得る. もとにもどって. $u=e^{\log(t-i0)A(x)}$ $f(x)=f(x)+\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\{\log(t-i0)A(x)\}^{m-1}\right]\log(t-i0)A(x)f(x)=f(x)$. 故に $u=f(x)$ を得る. $u|_{t=0}=f(x)=0$ より $u=0$ を得る. q.e.d.

系(3.2.2) P を $\sigma_m(P)=t^kD_t^m$ の Fuchs型. $\hat{e}(\lambda,0)=0$ の根 $\lambda_1\cdots\lambda_k$ について, λ_i, $\lambda_j-\lambda_k\notin\mathbb{Z}-\{0\}$. ($\hat{e}(\lambda,x)$の定義は(3.1.6)). この時,

1) $a^{\pm}\mathcal{B}^{\ell}\cong{}'\mathcal{B}^{m}$

2) $Pu=0$, $S\text{-}S(u)\not\ni(0,\pm\sqrt{-1}dt\infty)$, $(\frac{\partial}{\partial t})^{j}u|_{t=0}=0$ $0\leq j\leq m-k-1$ ならば $u=0$.

3) $a\mathcal{B}^{\ell}\cong{}'\mathcal{B}^{m-k}$.

(証明) 定理(3.1.6)の方法で matrix表示して(3.2.1)を使う. q.e.d.

注意(3.2.3) 一般に $\sigma_m(P)=t^{\ell}D_t^m$ なる作用素についても $a^{\pm}\mathcal{B}^{\ell}\cong{}'\mathcal{B}^{m}$ が成立つ. (証明は, $R=e^{\log tA(x)}$ の所を, 一般のモノドロミーで置きかえて議論すればよい.)

参考文献

[1]. Baovendi-Goulaouic : Cauchy Problems with characteristic initial hypersurfaces. Comm. Pure. Appl. Math. 26. 1973.

[2]. Hasegawa ; On the initial-value problems with data on a double characteristic, J. Math. Kyoto Univ 11. 1971.

[3]. Hasegawa ; On the initial-value problems with data on a characteristic hypersurface, J. Math. Kyoto Univ 13 1973.

[4]. 柏原·河合 ; On microhyperbolic pseudo-differential operators. 近刊.

[5] Monvel-Kree ; Pseudo-differential operators and Gevrey classes, Ann. Inst. Fourier 17. 1967.

[6]. Boney-Schapira ; Existence et prolongement des solutions holomorphes des equations aux derivées partielle ; Inventiones Math. 17. 1972.

[7]. Boney-Schapira : Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy, Springer Lecture note. No.287. 1973.

[8]. 小松·河合 : Boundary values of hyperfunction solutions of linear partial differential equations, Publ. R.I.M.S. 7 1971

[9]. 佐藤·河合·柏原 : Microfunctions and pseudo-differential equations Springer Lecture note No.287. 1973.

[10]. Tsuno : On the prolongation of local holomorphic solutions of partial differential equations, III, equations of the Fuchsian type, 近刊.