数理解析研究所講究録
第 248 巻 1975 年 60-66

超関数の曲面波展開について

東大 理　　片岡清臣

δ関数の平面波展開公式や、佐藤－柏原の超関数のラドン変換の理論に見られる様に、任意の超関数は半空間で解析的な関数達の境界値の連続和で書ける。そこで逆に超関数が具体的に管状角領域で解析的な関数の境界値として与えられている時に、そのラドン変換の成分（曲面波）を初等的な積分公式によって与える事を考える。

(1) 複素フーリエ積分； $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ とする。

積分 $I = \int e^{i\langle x,\eta\rangle} d\eta$ において、η を実数上でなく一般に複素数の積分面上を動かす。すなわち $\eta_j = \xi_j + i\alpha\cdot(|\xi|\cdot x_j - \langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\rangle \xi_j)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ として ($j = 1, 2, \ldots, n$)

$$I_\varepsilon^\alpha(x) = \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\eta\rangle - \varepsilon|\xi|} d\eta_1\wedge\cdots\wedge d\eta_n(\xi)$$

を考える。動径方向に積分してしまうと、

$$I_\varepsilon^\alpha(x) = (n-1)!\cdot\int_{|\xi|=1} \frac{(1 - i\alpha\langle x,\xi\rangle)^{n-1} - \alpha^2\cdot(1 - i\alpha\langle x,\xi\rangle)^{n-2}\cdot(|x|^2 - \langle x,\xi\rangle^2)}{\{-i\langle x,\xi\rangle + \alpha(|x|^2 - \langle x,\xi\rangle^2) + \varepsilon\}^n} d\sigma(\xi)$$

となる。

命題 1-1. $\frac{1}{(2\pi)^n} I_\varepsilon^\alpha(x)$ は、$\mathbb{R}^n$ 上の関数として $\varepsilon\to+0$ の時、測度の意味で δ 関数に収束する。

証明

まず積分の回転不変性から、$x=(|x|,0\cdots,0)$ としてよい。すると

$$I_\varepsilon^\alpha(x) = (n-1)!\cdot i^n\cdot|S^{n-2}|\cdot\int_0^\pi \frac{(1-i\alpha|x|\cos\theta)^{n-2}\cdot(1-i\alpha|x|\cos\theta-\alpha^2|x|^2\sin^2\theta)}{(|x|\cos\theta+i\alpha|x|^2\sin^2\theta\ \ +i\varepsilon)^n}\sin^{n-2}\theta\cdot d\theta$$

と、一変数の積分に直る。さらに $\cos\theta + i\alpha|x|\sin^2\theta = t$ と変換する事によって、留数計算などが遂行でき、

$(I_\varepsilon^\alpha(x) - I_\varepsilon^0(x))\cdot|x|^{n-1}d|x| = bdd_\varepsilon(|x|)\cdot d|x|$ を示す事ができる。

($bdd_\varepsilon(x)$ とは $\varepsilon\to+0$ の時、$x=0$ の付近で一様有界な関数)

$x\neq0$ の時は、もとの表式が部分積分できて、

$I_\varepsilon^\alpha(x) = \frac{\varepsilon}{i|x|}\int_{\xi\in\mathbb{R}^n} e^{i|x|\cdot\eta_1-\varepsilon|\xi|}\, d|\xi|\wedge d\eta_2\wedge\cdots\wedge d\eta_n(\xi)$ となり、さらに $\alpha>0$ の時は動径方向に積分してしまったものが $\varepsilon=0$、$x\neq0$ で意味をもち、$\lim_{\varepsilon\to+0} I_\varepsilon^\alpha(x)=0$ $(x\neq0,\ \alpha>0)$ がわかる。

以上の事から $\alpha=0$ の場合にすべて帰着する。この時は

$I_\varepsilon^0(x) = (n-1)!\cdot i^n\cdot\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\cdot\int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}}{(|x|t+i\varepsilon)^n}dt$ となるが、

公式 $\int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}}{(z-t)^n}dt = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{z}{(z^2-1)^{\frac{n+1}{2}}}$ より、(神保氏の注意より))

計算できて、

$\frac{1}{(2\pi)^n} I_\varepsilon^0(x) = \frac{(n-1)!}{2^{n-1}\cdot\pi^{\frac{n}{2}}\cdot\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\frac{\varepsilon}{(|x|^2+\varepsilon^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ となり、これは確かに δ 関数に測度の意味で収束する。

(2) 解析関数のラドン展開

$$K_\alpha(z,\xi;\varepsilon)=\frac{(n-1)!}{(2\pi)^n}\cdot\frac{(1-i\alpha\langle z,\xi\rangle)^{n-1}-\alpha^2(1-i\alpha\langle z,\xi\rangle)^{n-2}\cdot\left(\sum_{j=1}^n z_j^2-\langle z,\xi\rangle^2\right)}{\left\{1-i\langle z,\xi\rangle+\alpha\left(\sum_{j=1}^n z_j^2-\langle z,\xi\rangle^2\right)+\varepsilon\right\}^n}$$

とおく。但し．$\alpha>0$，$\varepsilon\geqq 0$，$z\in\mathbb{C}^n$，$\xi\in\{\xi\in\mathbb{R}^n;|\xi|=1\}=(S^{n-1})^*$

$$\theta(R)=\begin{cases}\alpha R^2 & \alpha R\leqq\frac{1}{2}\\ \dfrac{\sqrt{16\alpha^2R^4+4\alpha^2R^2}-1}{2\alpha(1+4\alpha^2R^2)} & \alpha R\geqq\frac{1}{2}.\end{cases}\qquad R>0\ \text{とおくと}$$

<u>2-1</u>；$K_\alpha(z,\xi;\varepsilon)$ は $\bigcup_{0<R\leqq\frac{1}{2\alpha}}\{(z,\xi)\in\mathbb{C}^n\times(S^{n-1})^*\mid |\mathrm{Re}\,z|=R,\ \langle\mathrm{Im}\,z,\xi\rangle-\alpha(1+4\alpha^2R^2)\times(|\mathrm{Im}\,z|^2-\langle\mathrm{Im}\,z,\xi\rangle^2)>-\alpha R^2\}$ で (z,ξ) について解析的，特に．$\{(z,\xi)\in\mathbb{C}^n\times(S^{n-1})^*\mid |\mathrm{Im}\,z|<\theta(|\mathrm{Re}\,z|)\}$ で解析的。

<u>2-2</u>；$\varepsilon>0$ ならば $\mathbb{R}^n\times(S^{n-1})^*$ で解析的

<u>2-3</u>；$z\in\mathbb{C}^n$；$|\mathrm{Im}\,z|<\theta(|\mathrm{Re}\,z|)$ ならば $\exists\int_{|\xi|=1}K_\alpha(z,\xi;0)\,d\sigma(\xi)=0$

<u>2-4</u>；$\forall g\in C_0(\mathbb{R}^n)$，$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|\xi|=1}d\sigma(\xi)\int_{\mathbb{R}^n}K_\alpha(x,\xi;\varepsilon)\,g(x)\,dx=g(0)$

が成立する。<u>2-3</u> などは．$z\in\mathbb{R}^n-\{0\}$ の時は命題1-1 によって O.K. となり．一般の時は積分値の z に関する解析性より出る。

ラドン分解の定義；$V\subset\mathbb{R}^n$ を星型の open cone とする。

$D_\beta=\overline{B(0,R)}\times\sqrt{-1}(V\cap B(0,\beta))\subset\mathbb{C}^n$，$\forall f\in\mathcal{O}(D_\beta)$ に対し．y_0 を $V\cap B(0,\beta)$ の元として適当にとる。

$$(\mathcal{R}_{\alpha,y_0}f)(z,\xi)\equiv\int_{\substack{|\mathrm{Re}\,z'|\leqq R.\\ \mathrm{Im}\,z'=y_0}}K_\alpha(z-z',\xi;0)\,f(z')\,dz'$$

例えばこれは．$|\xi|=1$，$|\mathrm{Re}\,z|<R$，$\langle\mathrm{Im}\,z-y_0,\xi\rangle-\alpha(1+16\alpha^2R^2)(|\mathrm{Im}\,z-y_0|^2-\langle\mathrm{Im}\,z-y_0,\xi\rangle^2)>0$ で定義されて (z,ξ) について解析的．

ところが $K_\alpha(z-z',\xi;0)f(z')dz'$ は z' についての閉微分形式なので、積分路は色々変更できる。そうするとそれによって (z,ξ) についての定義域が拡張される。

命題 2-1 ; $S=\{\gamma(t);[0,1]\to V\cap B(0,\beta)\ ;\ C^\infty\text{map},\ \gamma(0)=y_0\}$ とすると、$(\mathcal{R}_{\alpha,y_0}f)(z,\xi)$ は（ $0<R_1<R$ として）

$$\{|\mathrm{Re}\,z|<R_1\}\cap\bigcup_{\gamma\in S}\Big[\{\langle \mathrm{Im}\,z-\gamma(1),\xi\rangle-\alpha(4\alpha^2(R+R_1)^2+1)\cdot(|\mathrm{Im}\,z-\gamma(1)|^2-\langle\mathrm{Im}\,z-\gamma(1),\xi\rangle^2)>0\}$$
$$\cap\bigcap_{t\in[0,1]}\{\langle\mathrm{Im}\,z-\gamma(t),\xi\rangle-\alpha(1+4\alpha^2(R+R_1)^2)\cdot(|\mathrm{Im}\,z-\gamma(t)|^2-\langle\mathrm{Im}\,z-\gamma(t),\xi\rangle^2)>-\alpha(R-R_1)^2\}\Big]$$

で解析的。

命題 2-2 ; $0<R_1<R$, $0<\alpha<\frac{1}{2(R+R_1)}$, $f\in\mathcal{O}(D_\beta)$ に対して $\beta'=\min(\beta,\frac{1}{2}\alpha(R-R_1)^2)$, $y_0\in V\cap B(0,\beta')$ にとると $(\mathcal{R}_{\alpha,y_0}f)(z,\xi)$ は

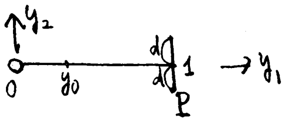
$$\{|\mathrm{Re}\,z|<R_1,\ |\mathrm{Im}\,z|<\tfrac{1}{2}\alpha(R-R_1)^2\}\cap\mathbb{R}^n\times\sqrt{-1}\big[V\cap B(0,\beta')+\{\langle\mathrm{Im}\,z,\xi\rangle-\alpha'(|\mathrm{Im}\,z|^2-\langle\mathrm{Im}\,z,\xi\rangle^2)>0\}\big]$$

で解析的であり、（ $\alpha'=\alpha(1+4\alpha^2(R+R_1)^2)$, $+$ はベクトル空間内の和として）、特に $[\ 〃\ ]\supset\{V\cap B(0,\beta')\}\cup\{\langle\mathrm{Im}\,z,\xi\rangle-\alpha'(|\mathrm{Im}\,z|^2-\langle\mathrm{Im}\,z,\xi\rangle^2)>0\}$ であるから、ξ によらず $\{|\mathrm{Re}\,z|<R_1,\ \mathrm{Im}\,z\in V\cap B(0,\beta')\}$ は定義域に入っていて、そこにおいて

$$\int_{|\xi|=1}(\mathcal{R}_{\alpha,y_0}f)(z,\xi)\,d\sigma(\xi)=f(z)$$ が成立する。

注意　この式から直ちに Bochner の tube theorem の超局所形が得られる。また、$(\mathcal{R}_{\alpha,y_0}f)(z,\xi)$ は、$\xi\in V^0$ の時には $\mathrm{Im}\,z=0$ まで解析的なので、$\mathrm{Im}\,z=0$ まで解析的な関数を法として考えるならば、$V^0\cap\{|\xi|=1\}$ の近傍で積分したものと f とは等しい。

反転公式の証明は．$\varepsilon>0$ をつけておいて $\mathrm{Im}\,z'=y_0$ の積分路を $\{|\mathrm{Re}\,z'|\leq R,\ \mathrm{Im}\,z'=\mathrm{Im}\,z\}\cup\{|\mathrm{Re}\,z'|=R,\ \mathrm{Im}\,z';\ \mathrm{Im}\,z\to y_0\}$ に分けて，<u>2-1</u>～<u>2-4</u> を利用する。



応用 1 （柏原）

$f\in\mathcal{O}(\{z\in\mathbb{C}^2;\ |\mathrm{Re}\,z|\leq 2,\ 0<\mathrm{Im}\,z_1\leq 1,\ \mathrm{Im}\,z_2=0\}\cup\{|\mathrm{Re}\,z|\leq 2,\ \mathrm{Im}\,z_1=1,\ |\mathrm{Im}\,z_2|\leq d\})$

$\Rightarrow\ {}^{\exists}R'>0,\ \exists\delta>0,\ f\in\mathcal{O}(\{\mathrm{Re}\,z=0,\ |\mathrm{Im}\,z|<R',\ |\mathrm{Im}\,z_2|<\delta\cdot\mathrm{Im}\,z_1\})$

<u>証明</u>　$\alpha=\frac{d}{3}$，$y_0=(\frac{2}{3}d,0)$ ととって $f(z)=\int_{|\xi|=1}(R_{\alpha,y_0}f)(z,\xi)\,d\sigma(\xi)$ を考えると、命題2-2と注によって結局 $\xi=(0,\pm1)$ において $(R_{\alpha,y_0}f)(z,\xi)$ が $\mathrm{Im}\,z=0$ まで解析的ならよく，それは命題<u>2-1</u>を利用して証明できる。（積分路を y_0 から P まで変更する。）

応用 2 （Martineau）

$SM\supset 0\times S^{n-1}$ 内の proper convex compact sets $K_1,\dots,K_N$，$\bigcap_{j=1}^{N}K_j\neq\phi$

$f_j\in\Gamma(K_j,\tilde{\mathcal{Q}}_M)$，$\sum_{j=1}^{N}f_j|_{K_1\cap\cdots\cap K_N}=0$ なるものに対して．

$\exists\, g_{ij}\in\Gamma(\gamma(K_i\cup K_j),\tilde{\mathcal{Q}}_M)$ s.t. $g_{ij}+g_{ji}=0$，$f_i=\sum_{j=1}^{N}g_{ij}|_{K_i}$

<u>証明</u>　y_0 を $K_1\cap\cdots\cap K_N$ 内にとって $(R_{\alpha,y_0}f_j)(z,\xi)$ を作ると．

$\sum_{j=1}^{N}f_j|_{K_1\cap\cdots\cap K_N}=0$ より $\sum_{j=1}^{N}(R_{\alpha,y_0}f_j)(z,\xi)=0$．

$\therefore\ (R_{\alpha,y_0}f_N)(z,\xi)=-\sum_{j=1}^{N-1}(R_{\alpha,y_0}f_j)(z,\xi)$．　命題2-2と注によって．右辺は $\xi\notin\bigcup_{j=1}^{N-1}K_j^{\circ}$ の時 $\mathrm{Im}\,z=0$ まで解析的で，一方左辺は $\xi\notin K_N^{\circ}$ の時 $\mathrm{Im}\,z=0$ まで解析的故，特異性は $\xi\in\bigcup_{j=1}^{N-1}(K_N^{\circ}\cap K_j^{\circ})$ に含まれる。従って $f_N=\int_{|\xi|=1}(R_{\alpha,y_0}f)(z,\xi)\,d\sigma(\xi)$ において積分範囲を N 個に分けて．$g_{1,N},\dots,g_{N-1,N}$ を作ると $g_{iN}\in\Gamma(\gamma(K_i\cup K_N),\tilde{\mathcal{Q}}_M)$ $(i=1,\dots,N-1)$

になるようにできる。後は帰納的にやる。

(3) 超関数のラドン表示

<u>定義</u> $S^*\mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n$, $S^*(S^*\mathbb{R}^n)$ の座標を $(x, \xi; \tilde{\xi}dx + \tilde{\tau}d\xi)$ で表わす。 $Z = \{(x, \xi; \tilde{\xi}dx + \tilde{\tau}d\xi) \mid \tilde{\xi} = \xi, \tilde{\tau} = 0\}$ とおく。$S^*\mathbb{R}^n$上の層 $\mathcal{G}^j$ を $\mathcal{G}^j = \{\sum_{|J|=j} f_J(z, \xi) d\xi^J \mid f_J(z, \xi)$ は $S^*\mathbb{R}^n$ の複素近傍内の実軸に接する領域で定義された (z, ξ) についての解析関数で，その境界値の特異性がZ内にあるもの$\}$

すると完全列 $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{\iota} \pi_*\mathcal{G}^0 \xrightarrow{d} \pi_*\mathcal{G}^1 \to \cdots \xrightarrow{d} \pi_*\mathcal{G}^{n-1} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{B} \to 0$

が成り立つ事が知られているが，(2)の結果より，$\mathcal{F}$の逆対応ともいうべきものが構成できた事になる。すなわち $f(x) \in \mathcal{B}$ が $f(x) = \sum_{j=1}^{N} f_j(x + iy_j \cdot 0)$ とかけていれば

$f(x) = \mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^{N} (\mathcal{R}_{\alpha, y_j} f_j)(z, \xi) d\sigma(\xi)\right)$ となるからである。

次に超関数のラドン表示に関連した簡単な例を挙げる。

<u>例 1</u> $K(z, p)$; $\{(z, p) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$; $\varepsilon > \mathrm{Im}\, p > 0$, $|\mathrm{Re}\, p| < R$, $|\mathrm{Re}\, z| < R$, $|\mathrm{Im}\, z| < \varepsilon\}$ で解析的。その時 $f(x) = \int_{|\xi|=1} K(x, \langle x, \xi \rangle + i0) d\sigma(\xi)$ $(|x| < R)$ と表わされる超関数は，$S\text{-}S(f(x)) \subset \{(x, \xi) \mid x = 0, \text{ or } \xi = \pm \frac{x}{|x|}\}$.

実際 ω_{ij} を $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$. $i < j \Rightarrow \omega_{ij} = (-1)^{i+j} d\xi_1 \wedge \overset{\vee}{\underset{i}{\cdots}} \overset{\vee}{\underset{j}{\cdots}} \wedge d\xi_n$

$\Omega = \sum_{i,j} z_i \xi_j \omega_{ij}$ とおくと

$$K(z,\langle z,\xi\rangle)d\sigma(\xi)=d_\xi\Big[\Big\{(\textstyle\sum z_j^2-\langle z,\xi\rangle^2)^{-\frac{n-1}{2}}\displaystyle\int_C^{\langle z,\xi\rangle}(\textstyle\sum z_j^2-\tau^2)^{\frac{n-3}{2}}\cdot K(z,\tau)\,d\tau\Big\}\omega(z,\xi)\Big]$$

であって．Cを適当にとることにより、$x\neq0$, $\xi\neq\pm\frac{x}{|x|}$ なる (x,ξ) の付近では［　］内は g^{n-2} の germ を表わし，従って f はその付近に特異台を持たない。さらに $K(z,p)$ が $p\in(-R,0)\cup(0,R)$ の近傍でも解析的とすると．明らかに $S\text{-}S(f(x))\subset\{x=0\}$．すなわち $x\neq0$ では実解析的となり．実際

$$f(x)=\int_{|\xi|=1}K(x,\langle x,\xi\rangle+i0)\,d\sigma(\xi)=\frac{2\cdot\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\cdot\int_{-1}^{1}K(x,|x|\cdot t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt$$

となる．（積分路は $\mathrm{Im}\,t\geq0$）

例2　$K(z,p,\xi)$ を $\{(z,p,\xi)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n;\ \mathrm{Im}\,p>0,\ |z-x_0|<\varepsilon,\ |\xi-\xi_0|<\varepsilon,\ |p-\langle x_0,\xi_0\rangle|<\varepsilon\}$ で解析的，(p,ξ) について $-n$ 次同次とする。

すると　$f(x)=\int_{|\xi-\xi_0|\leq\varepsilon}K(x,\langle x,\xi\rangle+i0,\xi)\,d\sigma(\xi)$ は (x_0,ξ_0) 付近の micro function を表わすが．もし $x_0\in R^n-\{0\}$, $\xi_0\neq\pm\frac{x_0}{|x_0|}$ ならば

$S\text{-}S(f(x))\not\ni(x_0,\xi_0)$．

なぜなら．例えば $\xi_0=(1,0,..,0)$ とする。$\Omega'=\sum_{i\neq1,j}z_i\xi_j\omega_{ij}$

$\rho^2=\sum_{j\neq1}z_j^2$　とおくと．

$$K(z,\langle z,\xi\rangle,\xi)\,d\sigma(\xi)=d_\xi\Big[\Big\{\frac{1}{\rho^2\cdot\xi_1^{1-n}}\int_C^{\frac{\langle z,\xi\rangle}{\xi_1}}K\Big(z,\tau,1,\frac{z_2}{\rho^2}\Big(\tau-\frac{\langle z,\xi\rangle}{\xi_1}\Big)+\frac{\xi_2}{\xi_1},\ldots\ldots,$$

$$\ldots,\frac{z_n}{\rho^2}\Big(\tau-\frac{\langle z,\xi\rangle}{\xi_n}\Big)+\frac{\xi_n}{\xi_1}\Big)d\tau\Big\}\Omega'(z,\xi)\Big]$$

と書けて．［　］の中は C をうまくとれば　g^{n-2} の (x_0,ξ_0) における germ を定義する。従って主張が成立する。