数理解析研究所講究録
第248巻 1975年 293-311

b函数における最近の発展

京大 理　矢野 環

b函数論において，解明され，またされつつあることに関して，手短かにのべることを目的とする。§1は，一般の $\mathcal{D}(x,\partial)$-Module についてのべ，reduced b-fn 等を統制する。§2に，柏原により示された"基本定理"を紹介するが，原証明に対し，いくつかの簡略化と改良がほどこされている。§3において，generic α での $\mathcal{D}f^\alpha$ と $\mathcal{D}[s]f^s$ との関連，又，当然のことのように，どこにも明記されていない，f^s の解析接続に関することを含めておく。§4において，multiple Lagrangean が singular support にあらわれる場合の，matrix b函数について，簡単にのべる。§5には，b(s) の explicit formula のいくつかの試みがおさめられている。§6において，かつて佐藤の与えた"基本予想"に関して，佐藤の考えちがいと，修正の試みについてふれる。

(＊) 締切期日の都合上，§4，§5，§6 はおさめられていない。

§1. $\mathcal{D}[t,s]$-Module，一般b函数

$\mathcal{D}[s]f^s$ は $P(s)f^s \longrightarrow P(s+1)f^{s+1}$ という $\mathcal{D}$-linear map を許すが，この map の存在から，reduced b 函数についてのかなりの部分などが導かれる。そこで一般に，

t, s は $\mathcal{D}$-linear map であり，交換関係

$ts - st = t$ を満たすものとする．

例えば $\mathcal{D}[s]f^s$ においては，"s" を "s を乗ずる作用"，"t" を "map $P(s)f^s \longrightarrow P(s+1)f^{s+1}$" とすれば，交換関係はみたされる．以下のすべての Modules $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ は $\mathcal{D}[t,s]$-Module とする。

Def.1 ① $s \in End(\mathcal{L})$ （以下しばしば $\mathcal{L} \circlearrowleft s$ と記す）

が nonzero minimal polynomial をもつとき，

それを $d_{\mathcal{L}}(s)$ と記す．（minimal polynomial が 0 のときは $d_{\mathcal{L}}$ が存在しないという）

② $b_{\mathcal{N},\nu}(s) = d_{\mathcal{N}/t^{\nu}\mathcal{N}}(s)$

③ $b_{\mathcal{N}}(s) = b_{\mathcal{N},1}(s)$

Def.2 $\mathbb{C}[s] \ni f(s) \neq 0$ に対し，$w(f) \in \mathbb{N}_0$ を次の様に定める。

i) $f \in \mathbb{C} \Rightarrow w(f) = 0$

ii) $f(s) = \prod_{i=0}^{l}(s+\alpha+i)^{\varepsilon_i}$ $\quad \varepsilon_0 \varepsilon_l \neq 0 \Rightarrow w(f) = l+1$

iii) 一般の f については，$f(s)=0$ の根を mod $\mathbb{Z}$

で分類し，$f = \prod_{j=1}^{k} f_j$ ($f_j = 0$ の根と $f_{j'} = 0$ の根は $j \neq j'$ では mod $\mathbb{Z}$ で等しくなく，各 $f_j = 0$ の根は mod $\mathbb{Z}$ でことごとく等しい) として，$w(f) = \max_j w(f_j)$．

Thm.1 $d_{\mathcal{L}}(s)$ が存在する $\Rightarrow$ $t^{w(d_{\mathcal{L}})}\mathcal{L} = 0$ †.

∵) $d_{\mathcal{L}}(s)\mathcal{L} = 0$．左から $t^{w(d_{\mathcal{L}})}$ を作用させて

$$d_{\mathcal{L}}(s + w(d_{\mathcal{L}}))\, t^{w(d_{\mathcal{L}})}\mathcal{L} = 0.$$ 又，$\mathcal{L} \supset t^{w(d_{\mathcal{L}})}\mathcal{L}$ より

$$d_{\mathcal{L}}(s)\, t^{w(d_{\mathcal{L}})}\mathcal{L} = 0.$$

$\mathrm{g.c.d}\,(d_{\mathcal{L}}(s), d_{\mathcal{L}}(s + w(d_{\mathcal{L}}))) = 1$ より $t^{w(d_{\mathcal{L}})}\mathcal{L} = 0$ ■.

$\mathcal{M}$ において，$b_{\mathcal{M}}(s)$ が存在するとき，$\forall \nu$ について $b_{\mathcal{M},\nu}(s)$ は存在し，$b_{\mathcal{M},\nu}(s) \mid [b_{\mathcal{M}}(s)]_\nu$ である．(但し $[\varphi(s)]_\nu = \varphi(s)\varphi(s+1)\cdots\varphi(s+\nu-1)$)．$b_{\mathcal{M},\nu}(s)$ に関して，次の構造定理が成立する．

Thm.2* ① $\exists \nu_0 \in \mathbb{N}_0$，$\overline{b}_{\mathcal{M}}(s) \in \mathbb{C}(s)$，$\overline{b}'_{\mathcal{M}}(s), c_{\mathcal{M}}(s) \in \mathbb{C}[s]$

s.t. $\forall \nu \geq \nu_0$,

$$b_{\mathcal{M},\nu}(s) = [\overline{b}_{\mathcal{M}}(s)]_\nu\, c_{\mathcal{M}}(s+\nu)$$
$$= c_{\mathcal{M}}(s)\, [\overline{b}'_{\mathcal{M}}(s)]_\nu \qquad (1\text{-}1)$$

$$\overline{b}_{\mathcal{M}}(s)\, c_{\mathcal{M}}(s+1) = c_{\mathcal{M}}(s)\, \overline{b}'_{\mathcal{M}}(s) \qquad (1\text{-}2)$$

* この定理の原形は本質的に佐藤による．
† 特に，t: injective or t: surjective $\Rightarrow \mathcal{L} = 0$．

②* $t \in \mathcal{E}nd(\mathcal{M})$ が injective であれば, 加えて $\bar{b}_{\mathcal{M}}(s) \in \mathbb{C}[s]$. このときはさらに,

$\nu \leq \nu_0$ についても, $\exists c_{\mathcal{M},\nu}(s),\ c'_{\mathcal{M},\nu}(s) \in \mathbb{C}[s]$

s.t. $\nu < \nu'$ ならば

$$c_{\mathcal{M},\nu}(s) \mid c_{\mathcal{M},\nu'}(s) \mid c_{\mathcal{M}}(s) \qquad (1\text{-}3)$$
$$c'_{\mathcal{M},\nu}(s) \mid c'_{\mathcal{M},\nu'}(s) \mid c_{\mathcal{M}}(s)$$

又, ①の $\nu_0 = w(b_{\mathcal{M}})-1$ ととることができ,

$$c_{\mathcal{M}}(s) \mid [\bar{b}_{\mathcal{M}}(s)]_{w(b_{\mathcal{M}})-1} \qquad (1\text{-}4)$$
$$b_{\mathcal{M}}(s) \mid [\bar{b}_{\mathcal{M}}(s)]_{w(b_{\mathcal{M}})} \qquad (1\text{-}5)$$

即ち, b函数が2通りにreduceできるわけであるが, $\bar{b}, \bar{b}'$, c の関係を示す, 筆者の公式 (1-2) によれば, いずれか一方を考えればよく, 通常のb函数論では pair $(\bar{b}_{\mathcal{M}}, c_{\mathcal{M}})$ を考察する. t が injective でないときに, $\bar{b}_{\mathcal{M}}(s)$ が polynomial とは限らぬのは, 次の事情による.

~~$st^{\nu} = t^{\nu}(s-\nu)$~~ $t^{\nu}s = (s+\nu)t^{\nu}$ より, $\mathrm{Ker}\, t^{\nu}$ は s-invariant である. $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\bigcup_{\nu} \mathrm{Ker}\, t^{\nu}$ とおくと, $\tilde{\mathcal{M}}$ において t は injective. 従って, $\bar{b}_{\tilde{\mathcal{M}}}(s)$ は ②により polynomial. このとき, $\tilde{c}(s) = c_{\mathcal{M}}(s)/c_{\tilde{\mathcal{M}}}(s)$ とおいて,

$$\bar{b}_{\mathcal{M}}(s) = \frac{\tilde{c}(s)}{\tilde{c}(s+1)}\, \bar{b}_{\tilde{\mathcal{M}}}(s)$$ となっていることがわかる.

($\bar{b}'_{\mathcal{M}}(s) = \bar{b}'_{\tilde{\mathcal{M}}}(s)$ である)

* さらに, p.6bisの Remark をみよ.

証明は、〔 〕における Thm 3 の証明と同様であるが、
① の一般的情況のためには、多少の拡張を要す. 詳細略.

sub Module との関連について、次の定理がある.

Thm 3 $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2$

1. $t: \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_1$ injective
2. $d_{\mathfrak{M}_1/\mathfrak{M}_2}(s)$ が存在する.
3. $b_{\mathfrak{M}_1}(s)$ or $b_{\mathfrak{M}_2}(s)$ が存在する

$\Rightarrow$ $\exists\ \tilde{c}(s),\ \tilde{\tilde{c}}(s)$ s.t.

$$\tilde{c},\ \tilde{\tilde{c}} \mid d_{\mathfrak{M}_1/\mathfrak{M}_2}, \qquad c_{\mathfrak{M}_1}\tilde{\tilde{c}} = c_{\mathfrak{M}_2}\tilde{c} \qquad (1\text{-}6)$$

$$\bar{b}_{\mathfrak{M}_1}(s) = \frac{\tilde{c}(s)}{\tilde{c}(s+1)}\bar{b}_{\mathfrak{M}_2}(s), \quad \bar{b}'_{\mathfrak{M}_1}(s) = \frac{\tilde{\tilde{c}}(s)}{\tilde{\tilde{c}}(s+1)}\bar{b}'_{\mathfrak{M}_2}(s) \qquad (1\text{-}7)$$

$$\bar{b}_{\mathfrak{M}_2}(s) \mid [\bar{b}_{\mathfrak{M}_1}(s)]_{w(d_{\mathfrak{M}_1/\mathfrak{M}_2})+1}, \qquad (1\text{-}8)$$
$$\bar{b}_{\mathfrak{M}_1}(s) \mid [\bar{b}_{\mathfrak{M}_2}(s - w(d_{\mathfrak{M}_1/\mathfrak{M}_2}))]_{w(d_{\mathfrak{M}_1/\mathfrak{M}_2})+1}$$

(1-8) は (1-7) と (1-6) の第一式より従う.

(1-7) から特に $\deg \bar{b}_{\mathfrak{M}_1} = \deg \bar{b}_{\mathfrak{M}_2}$ ($\deg \bar{b}'_{\mathfrak{M}_1} = \deg \bar{b}'_{\mathfrak{M}_2}$)
であるが、さらにその表示の形より、$\bar{b}^{\circ}_{\mathfrak{M}_1}$ と $\bar{b}^{\circ}_{\mathfrak{M}_2}$ の根の
mod $\mathbb{Z}$ groups の代表元 (mod $\mathbb{Z}$) の集合、各 group の元数、
は一致している。しかも (1-6) の第一式を考えあわせれば、
代表元 α の group の対応する因子が

$\bar{b}_{\mathfrak{M}_1} \cdots\ (s+\alpha+i^{(1)}_1)(s+\alpha+i^{(1)}_2)\cdots\cdots(s+\alpha+i^{(1)}_k) \quad i^{(1)}_k \le i^{(1)}_{k+1}$

$\bar{b}_{\mathfrak{M}_2} \cdots\ (s+\alpha+i^{(2)}_1)(s+\alpha+i^{(2)}_2)\cdots\cdots(s+\alpha+i^{(2)}_h) \quad i^{(2)}_h \le i^{(2)}_{h+1}$

とすれば, $\qquad \lambda_k^{(2)} \geq \lambda_k^{(1)} \geq \lambda_k^{(2)} - w(d_{\mathfrak{n}_1/\mathfrak{n}_2})$

であることまで知られる。 ($\overline{b}'_{\mathfrak{n}_1}$ と $\overline{b}'_{\mathfrak{n}_2}$ についても同様)

証明においては, 条件2より Thm 1 を用いて

$\mathfrak{n}_2 \supset t^{w(d_{\mathfrak{n}_1/\mathfrak{n}_2})}\mathfrak{n}_1$ となることに注意し, [ ] の Thm 11

の証明の方針に, より精密な考察を加える. 尚, 上式より

$$\mathfrak{n}_1 \supset \mathfrak{n}_2 \supset t\mathfrak{n}_2 \supset t^{w(d_{\mathfrak{n}_1/\mathfrak{n}_2})+1}\mathfrak{n}_1$$ となり, 従って

$$b_{\mathfrak{n}_2}(s) \mid [b_{\mathfrak{n}_1}(s)]_{w(d_{\mathfrak{n}_1/\mathfrak{n}_2})+1} \qquad (1-9)^*$$

という (1-8) に類似の式が容易に得られる. ($\overline{b}'_{\mathfrak{n}_2}$ についても).

Cor. $\mathfrak{n}_1 \supset \mathfrak{n}_2 \supset \mathfrak{n}_3$

1. $t : \mathfrak{n}_1 \to \mathfrak{n}_1$ injective
2. $d_{\mathfrak{n}_1/\mathfrak{n}_3}$ が存在する ($\Leftrightarrow$ $d_{\mathfrak{n}_1/\mathfrak{n}_2}$ かつ $d_{\mathfrak{n}_2/\mathfrak{n}_3}$ が存在する)
3. $b_{\mathfrak{n}_1}$ or $b_{\mathfrak{n}_2}$ or $b_{\mathfrak{n}_3}$ が存在する.

$\Rightarrow$ ① $\deg \overline{b}_{\mathfrak{n}_1} = \deg \overline{b}_{\mathfrak{n}_2} = \deg \overline{b}_{\mathfrak{n}_3}$

$(= \deg \overline{b}'_{\mathfrak{n}_1} = \deg \overline{b}'_{\mathfrak{n}_2} = \deg \overline{b}'_{\mathfrak{n}_3})$

② $\overline{b}_{\mathfrak{n}_j}$ $\cdots$ $(s+\alpha+\lambda_1^{(j)})$ $\cdots$ $(s+\alpha+\lambda_h^{(j)})$ $j=1,2,3$ $\lambda_k^{(j)} \leq \lambda_{k+1}^{(j)}$

が mod $\mathbb{Z}$ class で α に対応する因子とすれば,

$$\lambda_k^{(1)} \leq \lambda_k^{(2)} \leq \lambda_k^{(3)}. \qquad (\overline{b}' \text{ についても同様})$$

③ $\overline{b}_{\mathfrak{n}_1} = \overline{b}_{\mathfrak{n}_3} \Rightarrow \overline{b}_{\mathfrak{n}_2} = \overline{b}_{\mathfrak{n}_1} = \overline{b}_{\mathfrak{n}_3}, \quad c_{\mathfrak{n}_1} \mid c_{\mathfrak{n}_2} \mid c_{\mathfrak{n}_3}$

$\overline{b}'_{\mathfrak{n}_1} = \overline{b}'_{\mathfrak{n}_3} \Rightarrow \overline{b}'_{\mathfrak{n}_2} = \overline{b}'_{\mathfrak{n}_1} = \overline{b}'_{\mathfrak{n}_3}, \quad c_{\mathfrak{n}_3} \mid c_{\mathfrak{n}_2} \mid c_{\mathfrak{n}_1}$

* 又, $\exists m$, $b_{\mathfrak{n}_2}(s) \mid [\overline{b}_{\mathfrak{n}_1}(s)]_m$ も容易.

Remark Thm 2 の 2)に，さらに補足説明を加える．

$w(b_\pi)=1$ のとき，$\nu_0=0$ とされること，(1-4),(1-5) より $c_\pi=1$，$b_\pi=\bar{b}_\pi$ がわかる。即ち

$$w(b_\pi)=1 \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \bar b_\pi = \bar b'_\pi = b_\pi , \quad c_\pi=1 \\ b_{\pi,\nu}(s) = [b_\pi(s)]_\nu \end{array}\right)$$

尚，証明の方法から，$\underline{w(c_\pi)\le w(b_\pi)-1}$ が知られていることを注意しておく．これと，(1-2)の

$$\bar b_\pi(s)=\frac{c_\pi(s)}{c_\pi(s+1)}\,\bar b'_\pi(s)$$

により，$\bar b_\pi=0$ と $\bar b'_\pi=0$ の根の mod $\mathbb{Z}$ groupの個数，mod $\mathbb{Z}$ groupsの代表元 (mod $\mathbb{Z}$) の集合，各 group の元数が一致し，代表元 α の group の対応する因子が

$\bar b_\pi$ ⋯ $(s+\alpha+i_1)(s+\alpha+i_2)\cdots(s+\alpha+i_h)$ $\quad i_k\le i_{k+1}$

$\bar b'_\pi$ ⋯ $(s+\alpha+i'_1)(s+\alpha+i'_2)\cdots(s+\alpha+i'_h)$ $\quad i'_k\le i'_{k+1}$

であるとすれば，$\underline{i'_k-w(b_\pi)+1\le i_k\le i'_k}$ であることがわかる。c_πは，(1-2) の型で $\bar b$ と $\bar b'$ をつなぐ唯1の多項式であることに注意せよ．実際，そのようなものが2つあれば，比は周期1の有理関数となり，定数である。

(1-7) の $\tilde c$, $\tilde{\tilde c}$ についても同様．

§2. b関数論の基本定理

$\mathcal{L}$ が holonomic $\mathcal{D}(x,s)$-Module であれば，$\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{L})$* は有限次元であることが知られている［ ］ので，$d_{\mathcal{L}}(s)$は存在する．従って，§1 において，例えば「$d_{\mathcal{M}_1/\mathcal{M}_2}(s)$ が存在する」とした所は，「$\mathcal{M}_1/\mathcal{M}_2$ が holonomicである」と書き換えて成立する。

又，p.4 の $\tilde{\mathcal{M}}$ について，次の命題が成立する。

Thm 4 $\mathcal{D}(x,s)$ Modules の exact sequence

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}' \to 0$$

において 1. $t : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}'$ injective

2. $\mathcal{L}$: holonomic

$$\Rightarrow \quad \mathcal{M}' \cong \tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\mathrm{Ker}\, t^{w(d_{\mathcal{L}})} .$$

∵) $\tilde{\mathcal{M}}$は，tが injective となる universal な $\mathcal{M}$ の quotient であるから，条件 1 より $\tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{\exists} \mathcal{M}' \to 0$ 即ち $0 \to \bigcup \mathrm{Ker}\, t^{\nu} \to \mathcal{L}$. 一方，$\mathcal{L}$: holonomic より，Thm 1 によれば $\mathcal{L} \subset \mathrm{Ker}\, t^{w(d_{\mathcal{L}})}$. 従って，$\mathrm{Ker}\, t^{\nu} = \mathrm{Ker}\, t^{w(d_{\mathcal{L}})}$ $\nu \geq w(d_{\mathcal{L}})$ かつ $\mathcal{M}' \cong \tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\mathrm{Ker}\, t^{w(d_{\mathcal{L}})}$ ∎

Thm 5** $\mathcal{M}$: next holonomic $\mathcal{D}(x,s)$-Module

$t : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ injective

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{M} \text{ は purely } (n-1) \text{ dimensional}$$

* の各stalk.　　** 柏原.によりこの定理の ~~state~~ は初めて指摘された.

$\mathcal{N}$ の純次元性が $\widehat{SS}(\mathcal{N})$ の純余次元性に反映すること，

$\mathcal{E}xt$ の exact sequence を考えること，により

Cor. 1) $\widehat{SS}(\mathcal{N})$ は purely $(n-1)$ codimensional

2) $\mathcal{N}$ の holonomic submodule は 0 に限る.

Proof of Thm 5) $\mathcal{E}xt^n(\mathcal{N},\mathcal{D})=0$ を示せばよい.

$$0\to\mathcal{N}\xrightarrow{t}\mathcal{N}\to\mathcal{M}\to 0$$ とおくと,

$$\cdots \leftarrow \mathcal{E}xt^{n+1}(\mathcal{M},\mathcal{D}) \leftarrow \mathcal{E}xt^n(\mathcal{N},\mathcal{D}) \xleftarrow{t} \mathcal{E}xt^n(\mathcal{N},\mathcal{D})\leftarrow\cdots$$

一般に $\operatorname{codim}\widehat{SS}(\mathcal{E}xt^i(\cdot,\mathcal{D}))\ge i$ であり, $\mathcal{E}xt^{n+1}(\mathcal{M},\mathcal{D})=0$,

$\mathcal{E}xt^n(\mathcal{N},\mathcal{D})$ は holonomic.

$$0\leftarrow \mathcal{E}xt^n(\mathcal{N},\mathcal{D})\xleftarrow{t}\mathcal{E}xt^n(\mathcal{N},\mathcal{D})$$

より Thm 1 (脚注*をみよ) より $\mathcal{E}xt^n(\mathcal{N},\mathcal{D})=0$ ■.

Thm 6. (柏原)* $\mathcal{M}$: coherent left (right) $\mathcal{D}_X^f$-Module

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ Y \end{array}$$

1) f: projective かつ proper $\left(\Leftrightarrow \begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & Y\times {}^{\exists}\mathbb{P}^N \\ \downarrow & \swarrow & \\ Y & & \end{array}\right)$

2) $\mathcal{M}\supset\mathcal{M}_0$ a) $\mathcal{M}_0$: coherent $\mathcal{O}_X$ Module

b) $\mathcal{M}=\mathcal{D}^f\mathcal{M}_0$ $(=\mathcal{M}_0\mathcal{D}^f)$

$\Rightarrow$ 1) $R^if_*(\mathcal{D}^f_{Y\leftarrow X}\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X^f}\mathcal{M})=\mathcal{N}^i$ は coherent left $\mathcal{D}_Y^f$ Module.

$(R^if_*(\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{D}_X}\mathcal{D}^f_{X\to Y})=\mathcal{N}^i)$ (right)

2) $\widehat{SS}(\mathcal{N}^i)\subset \rho\varpi^{-1}(\widehat{SS}(\mathcal{M}))$

* the proof will be published elsewhere.

ここに ρ, ϖ は

$$\begin{array}{ccc} X \underset{Y}{\times} T^*Y & \xrightarrow{\varpi} & T^*X \\ \downarrow \rho & & \\ T^*Y & & \end{array}$$

Thm 7. (b函数存在の基本定理)(柏原)

$f(x)$: holomorphic function $\mathcal{M} = \mathcal{D}[s] f^s$ ($\overset{\text{or}}{=} f^s dx\, \mathcal{D}[s]$)

$\Rightarrow$ 1) $\hat{S}S(\mathcal{M}) = W \equiv \{(x, s\,\mathrm{grad} f);\ f(x) \neq 0,\ s \in \mathbb{C}\}^{\text{closure}} \subset T^*X$

2) $b_{\mathcal{M}}(s)$は存在し, $b_{\mathcal{M}}(s) = 0$ の根は, stlictly negative rational number.

∵) 以下の証明では, 後の議論をみても, 都合のよいことがわかるように, $\mathcal{M} = f^s dx\, \mathcal{D}[s]$ ととる.

$$\begin{array}{ccc} X' - Y' & \hookrightarrow & X' \\ \wr\| & & \downarrow \pi \\ X - Y & \hookrightarrow & X \end{array} \qquad f' = f \circ \pi = x_1'^{m_1} \cdots x_n'^{m_n} \qquad \begin{array}{l} Y = \{f = 0\} \\ Y' = \pi^{-1}(Y) \end{array}$$

と広中の resolution theorem よりできる.

さらに, $\pi^*(dx) = \eta(x')\,dx'$ $\eta(x') = (\text{Invertible})\, x_1'^{\varepsilon_1} \cdots x_n'^{\varepsilon_n}$ と
なっている。(もちろん $X' - Y'$ では $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 0$)

$f'^s dx' \mathcal{D}_{X'}[s]$ は明らかに next maximal coherent $\mathcal{D}_{X'}$ Moduleであり, $\hat{S}S(f'^s dx' \mathcal{D}_{X'}[s]) = W' = \{(x', \mathrm{grad} \log f'); \cdots\}^{\text{closure}}$.

$\mathcal{M}' = \cancel{\mathcal{D}}\, f'^s \pi^*(dx)\, \mathcal{D}_{X'}[s]$ とおく. $\eta(x')$ の形より, $\exists l$, $f'^s dx' \mathcal{D}_{X'}[s] \supset \mathcal{M}' \supset f'^{s+l} dx' \mathcal{D}_{X'}[s]$ であるから,
$\mathcal{M}'$はやはり next maximal coherent $\mathcal{D}_{X'}$ Moduleであり,

$\hat{S}S(\mathcal{M}') = W'$.

$$\int \mathcal{M}' = R^0 \pi_* (\mathcal{M}' \overset{L}{\otimes} \mathcal{D}_{X' \to X})$$ と記す.

$$\hat{SS}(\int \mathcal{M}') \subset \rho\varpi^{-1}(W') = \rho\varpi^{-1}(W' - T^*_{Y'}X' \times Y') \cup \rho\varpi^{-1}(W' \cap f'^{-1}(0))$$

第一項は, 同型な部分であり $W - f^{-1}(0)$ にすぎない.

第二項は, ~~Lagrangean~~ holonomic set を上げておろしたもので isotropic であり, 大きくとも或る Lagrangean Λ に入る。

$$\therefore \quad \hat{SS}(\int \mathcal{M}') \subset W \cup \Lambda$$

$u \in \int \mathcal{M}'$ を, $f'^s \pi^*(dx) \otimes 1_{X' \to X}$ の class とする.

(即ち 大略 $u = \left(\int \delta(x - \pi(x')) f'^s \eta(x') dx' \right) dx$.)

今, $P(s, x, D_x) u = 0$ とすれば, Y外では $P(s, x, D_x) f^s = 0$

従って X 全体で $P(s, x, D_x) f^s = 0$.** 即ち,

surjective map $u\mathcal{D}_X[s] \longrightarrow \mathcal{M} \to 0$ が存在する。

一方, この map は Y外では同型故, Kernel は holonomic.*

従って, $\mathcal{M}$ では $t: P(s) f^s \to P(s+1) f^{s+1}$ が injective である

ことより Thm 4 を用いて $\mathcal{M} = \widetilde{u\mathcal{D}_X[s]}$.

$$\therefore \quad \widetilde{\int \mathcal{M}'} \leftarrow \mathcal{M} \leftarrow 0.$$

$$\therefore \quad \hat{SS}(\mathcal{M}) \subset \hat{SS}(\widetilde{\int \mathcal{M}'}) \subset \hat{SS}(\int \mathcal{M}') \subset W \cup \Lambda$$

再び t の injectivity と Thm 5 の Cor. 1 を用いて $\underline{\hat{SS}(\mathcal{M}) = W}$.

さて, $b_{\mathcal{M}'}(s) \mathcal{M}' \subset t\mathcal{M}'$ 即ち diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{M}' \arrow[r, "t"] & \mathcal{M}' \\ & & \mathcal{M}' \arrow[u, "b_{\mathcal{M}'}(s)"'] \arrow[ul, "\exists G"] \end{tikzcd}$$

に Functor $\int$ を作用させて

$$\begin{tikzcd} \int \mathcal{M}' \arrow[r, "t"] & \int \mathcal{M}' \\ & \int \mathcal{M}' \arrow[u, "b_{\mathcal{M}'}(s)"'] \arrow[ul, "\int G"] \end{tikzcd} \qquad \therefore \quad b_{\int \mathcal{M}'}(s) \mid b_{\mathcal{M}'}(s).$$

* $\hat{SS}(u\mathcal{D}_X[s]) \subset W \cup \Lambda$ かつ $W \cap \{f = 0\}$ が holonomic set であることより.

** ここで, P の作用は右にかくべきであった. 3か所の等式は, そのように解釈されたい.

又，$\widetilde{\int\mathcal{M}'} \leftarrow \mathcal{M} \leftarrow 0$ において，この２つのModulesはY外で同型故 Cokernel は holonomic*. 従って，$m = w(d\,\widetilde{\int\mathcal{M}'}/\mathcal{M})$ とおくと，Thm 3 の後の式 (1-9) により，

$$b_{\mathcal{M}}(s) \mid [b_{\widetilde{\int\mathcal{M}'}}(s)]_{m+1}$$

又，$b_{\widetilde{\int\mathcal{M}'}}(s) \mid b_{\int\mathcal{M}'}(s)$ は明らか故，

$$b_{\mathcal{M}}(s) \mid [b_{\int\mathcal{M}'}(s)]_{m+1} \mid [b_{\mathcal{M}'}(s)]_{m+1} .$$

$b_{\mathcal{M}'}(s)=0$ の根は，strictly negative rational number であるから，定理の 2) を得た ■

Remark. 1 もし $\widetilde{\int\mathcal{M}'} \cong \mathcal{M}$ であれば，$m=0$ 故 $b_{\mathcal{M}}(s) \mid b_{\mathcal{M}'}(s)$. しかるに 実例で示すように，一般にこの式は成立しない．従って，$\widetilde{\int\mathcal{M}'}$ は $\mathcal{M}$ にかなり近いものではあるが，一般には異なる。各々，純次元的であって，$0\to \mathcal{E}xt^{n-1}_{\mathcal{D}}(\widetilde{\int\mathcal{M}'},\mathcal{D})\to \mathcal{E}xt^{n-1}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{D})\to \mathcal{E}xt^{n}_{\mathcal{D}}(\widetilde{\int\mathcal{M}'}/\mathcal{M},\mathcal{D})\to 0$ という，exact sequence がある。

Remark. 2. Thm 7 は，$b_{\mathcal{M}}$ の存在のみでなく，$b_{\mathcal{M}}(s)=0$ の根の分母となりうる数が，resolution からわかることをも示している事に注意せよ。

exact sequence $0\to \mathcal{M}\to \widetilde{\int\mathcal{M}'}\to \widetilde{\int\mathcal{M}'}/\mathcal{M}\to 0$ は，$\widetilde{\int\mathcal{M}'}$ が holonomic submodule をもたないことから，split しているわけでもない。

* 前頁 注* と同じ論法.

$\mathcal{N} = \mathcal{D}[s]f^s = \mathcal{D}[s]/\mathcal{J}[s]$ とすると，

$\mathcal{M} = \mathcal{N}/t\mathcal{N} = \mathcal{D}[s]/\mathcal{J}[s] + \mathcal{D}[s]f$. 従って，

Cor. $\mathcal{M}$ は holonomic system であり，

$\hat{S}S(\mathcal{M}) = W_0 = W \cap \{f=0\}$

一般に，$b_{\mathcal{D}[s]f^s}(s)$ を $b_f(s)$ と記す．$x \in X$ の近傍で考えていることを明記するときは，$b_{f,x}(s)$ とも記す．又，K compact $\subset X$ に対し，$b_{f,K}(s) = \underset{x \in K}{\mathrm{l.c.m}}\, b_{f,x}(s)$．

Thm 7 の証明と同様に，次の定理を得る．(Thm 7 はもちろん用いる)．

Thm 8 $\quad f : X \to \mathbb{C}$ holomorphic.

$\pi : X' \to X$ projective, proper s.t.

$X' - \pi^{-1}(\{f=0\}) \simeq X - \{f=0\}$.

$\Rightarrow \exists N, \quad b_{f,x}(s) \mid [b_{f', \pi^{-1}(x)}(s)]_N \qquad f' = f \circ \pi$.

* $\quad \mathcal{J}_0 = \{P \in \mathcal{D} \mid \mathcal{D}f^s = 0\}$ とすると，$W = V(\bar{\mathcal{J}_0})$ がわかる．

$\because)$ $\mathcal{N} \simeq \mathcal{D}f^s + \cdots + \mathcal{D}s^{l-1}f^s$.

例. $f = x^r + y^r$ $\begin{cases} x = x' \\ y = x'y' \end{cases}$ と blow up.

$f\circ\pi = (x')^r(1+(y')^r)$ $dx\wedge dy = x'\,dx'\wedge dy'$

$x'=0\ \ y'=\omega_1$ の nbd で考えることにして, $(1+(y')^r) = \prod(y'-\omega_j)$

$\Pi' = \left((x')^r(\omega_1 - y')\,\varphi(y')\right)^s x'\,dx'\wedge dy'$

$b_{\pi'}(s) = \bar{b}_{\pi'}(s) = (s+1)(s+\frac{2}{r})\cdots(s+\frac{r+1}{r})$

他の点での b はこれの約数になっている. 一方,

$b_f(s) = (s+1)(s+\frac{2}{r})\cdots\cdots(s+\frac{2r-2}{r})$

$\bar{b}_f(s) = (s+1)(s+\frac{2}{r})\cdots(s+\frac{r+1}{r})$

$b_f \mid [b_{\pi'}]_2$, $\underbrace{\bar{b}_f \mid \bar{b}_{\pi'}}$.

└ これは一般的事情ではないかと予想する.

例. $f = x_1^2+\cdots+x_n^2$ $x_n = t$ $x_i = x_i' t$ $i=1,\dots,n-1$

$f\circ\pi = t^2(x_1'^2+\cdots+x_{n-1}'^2+1)$ $dx = t^{n-1}dx'\wedge dt$

$b_{\pi'} = (s+1)(s+\frac{n}{2})(s+\frac{n+1}{2})$

$b_f = (s+1)(s+\frac{n}{2})$

$b_f(s) \mid b_{\pi'}(s)$

$b_{dx', f'^s} = (s+1)(s+1)(s+\frac{1}{2})$ であり, form により

大く調整されていることがわかる.

§3. $\mathcal{D}f^{\alpha}$　α: generic について.

$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して, $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{N}/(s-\alpha)\mathcal{N}$ とおく.

$\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{D}[s]/\mathcal{J}[s]+(s-\alpha)\mathcal{D}[s] = \mathcal{D}/\mathcal{J}[s]|_{s=\alpha}$ である. surjective map

$$\mathcal{N}_\alpha \to \mathcal{D}f^{\alpha} \to 0 \qquad (3\text{-}1)$$

が存在する. α が ($b_{\mathcal{N}}(s)=0$ の根) + (自然数) でないとき, (3-1) が同型であることが, 柏原により注意されたが, ここでは, それを精密化した必要十分条件を示す.

$\tilde{b}_{\mathcal{N}}(s)=0$ の根の集合を $\tilde{R}$, $c_{\mathcal{N}}(s)=0$ のそれを C とする,

(1-4) より $(\tilde{R}+\mathbb{N}) \cap C = \phi$ に注意せよ.

Thm 9　$\alpha \notin (\tilde{R}+\mathbb{N}) \cup C$

$\Leftrightarrow$　$\mathcal{N}_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}f^{\alpha}$

Proof) $\Rightarrow$　($Pf^{\alpha}=0 \Rightarrow Pf^{s} \in (s-\alpha)\mathcal{D}(s)f^{s}$) を示せばよい。

$\mathrm{ord}\, P = m\ (\geq 1)$ とすると, $Pf^{s} = (s-\alpha)a(s,x)f^{s-m}$. 従って,

$\mathcal{D}[s]f^{s} \cap (s-\alpha)\mathcal{D}[s]f^{s-m} \subset (s-\alpha)\mathcal{D}[s]f^{s}$ を示せばよい.

s を $s+m$ にして, $f^{m}\mathcal{N} \cap (s+m-\alpha)\mathcal{N} \subset (s+m-\alpha)f^{m}\mathcal{N}$.

条件により, $s+m-\alpha$ は $b_{\mathcal{N},m}(s)$ の因子でない. 従って,

$\mathcal{N}/f^{m}\mathcal{N} \xrightarrow[\sim]{s+m-\alpha} \mathcal{N}/f^{m}\mathcal{N}$ *. そこで $f^{m}\mathcal{N} \cap (s+m-\alpha)\mathcal{N} \ni v = (s+m-\alpha)u$

とせよ。上の同型で, 左の u を右へうつして, $v \in f^{m}\mathcal{N}$ より 0.

よって左にもどって $u \in f^{m}\mathcal{N}$　$\therefore v \in (s+m-\alpha)f^{m}\mathcal{N}$.

* injective であることしかわからないが, 実際 $(s+m-\alpha)^{-1}$ は s の多項式で表示される.

$\Leftarrow$ $\alpha \in (\tilde{R}+\mathbb{N}) \cup C$ とせよ. 十分大なる ν をとれば,

$b_{\mathcal{M},\nu}(\alpha-\nu)=0$. $b_{\mathcal{M},\nu}(s)$ の定義より, $\exists P_\nu(s) \in \mathcal{D}[s]$

s.t. $P_\nu(s+\nu) f^{s+\nu} = b_{\mathcal{M},\nu}(s) f^s$. $\therefore P_\nu(\alpha) f^\alpha = 0$.

今 $\mathcal{M}_\alpha \simeq \mathcal{D} f^\alpha$ とすれば, $\{P \in \mathcal{D} \mid P f^\alpha = 0\} \subset \mathcal{J}[s] + (s-\alpha)\mathcal{D}[s]$

故, $P_\nu(\alpha) = Q(s) + (s-\alpha)R(s)$, $Q(s) \in \mathcal{J}[s]$.

(実際, $R(s) = -\dfrac{Q(s)-Q(\alpha)}{s-\alpha}$, $Q(\alpha) = P_\nu(\alpha)$ となる $Q(s)$, とでもとる)

そこで, $R_\nu(s) = \dfrac{P_\nu(s)-P_\nu(\alpha)}{s-\alpha} + R(s)$ とおくと,

$$R_\nu(s+\nu) f^{s+\nu} = \frac{b_{\mathcal{M},\nu}(s)}{s+\nu-\alpha} f^s.$$

これは $b_{\mathcal{M},\nu}(s)$ の最小性に反する.

さて, $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_\alpha \longrightarrow 0$ と, Thm 7 の 1) ように,

$f_i s - f D_i \in \mathcal{J}[s]$ より, W の generic point は $\hat{SS}(\mathcal{M}_\alpha)$ に

属さず, $f=0$ と $\xi_i=0$ のみが残る故,

$$\hat{SS}(\mathcal{M}_\alpha) \subset W_0 \cup \{\xi=0\}.$$

これは, 一致すると予想されるが, 不明である。これは,

quasi-homogeneous な f について成立すれば, 一般の f につい

て示すことができる. 又, それより Cor. として,

$\alpha \notin (\tilde{R}+\mathbb{N}) \cup C \Rightarrow \hat{SS}(\mathcal{D} f^\alpha) = W_0 \cup \{\xi=0\}$

が従う. 詳しくは [ ]を参照のこと.

$\alpha \in (\overline{R}+\mathbb{N})\cup C \Rightarrow \widehat{SS}(\delta f^{\alpha}) \subsetneq W_0 \sqcup \{\xi=0\}$ (?)

については，事情は微妙である．極端な場合を考えると，

$\overline{R}+\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_0$ （$\because (s+1)\,|\,b_f(s)$）をみれば，

if $\alpha \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \widehat{SS}(\delta f^{\alpha}) = \{\xi=0\}$ となり，たしかにちがってくる．又，δf^{α} が <u>simple</u> の場合は，（$C=\phi$ が知られており）$\alpha \in \overline{R}+\mathbb{N} \Rightarrow \delta f^{\alpha}$ は W_0 のあるLagrangeans上にsupportがなくなることが，柏原による一般論よりわかっている。(?)は，多少修正の要ありと思われる．実際，

（例）$f = x^3+y^3+z^3$

$\overline{b}_f = (s+1)\cdot(s+\frac{3}{3})(s+\frac{4}{3})(s+\frac{5}{3})$ $\quad C_f = (s+1)$

$W_0 = \{f=0$ の conormal$\} \sqcup T^*_{\{0\}}\mathbb{C}^3$.

$C \ni -1$ であるが，f^s は $s=-1$ において2位のpoleをもち，$f^s = \frac{C_{-2}}{(s+1)^2} + \frac{C_{-1}}{(s+1)} + \cdots$ と展開される．そして，この C_{-1} は，$\delta(f)$ と $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ の一次結合になると思われる。即ち $\widehat{SS}(\delta f^{-1}) = W_0 \sqcup \{\xi=0\}$ とおもわれ，一般に C に属する α については $\widehat{SS}(\delta f^{\alpha})$ はへらないと予想される。（上の例が不都合なら，他にもたくさんある。）

即ち，予想として，

$\alpha \in \overline{R}+\mathbb{N} \Rightarrow \widehat{SS}(\delta f^{\alpha}) \subsetneq W_0 \sqcup \{\xi=0\}$.

f^sの解析接続における b 函数の役割は，当然のこととされ，詳しく言及されることが少ないので，ここにしるしておく．

$\overline{b}_\pi(s)=\prod(s-\beta)$ とし，　$\overline{\gamma}_\pi(s)=\prod\Gamma(s-\beta)$ とおく．

このとき，　$P_\nu(s+\nu)f^{s+\nu}=b_{\pi,\nu}(s)f^s$ を書きなおし，

$$\frac{1}{c_\pi(s+\nu)}\left(P_\nu(s+\nu)\frac{1}{\overline{\gamma}_\pi(s+\nu)}f^{s+\nu}\right)=\frac{1}{\overline{\gamma}_\pi(s)}f^s$$

$\mathrm{Re}\, s>0$ では f^s は適当に実現されるので，$\dfrac{1}{\overline{\gamma}_\pi(s)}f^s$ は全平面に解析接続される．~~すなわち~~，即ち，

f^s は $s\in\overline{R}-\mathbb{N}_0$ にのみ pole をもつ．

pole の位置のみ見る場合，集合 C があらわれないのは (1-4) より $C\subset\overline{R}-\mathbb{N}_0$ であることより当然だが，pole の位数をも考える場合，それが $\overline{b}_\pi(s)$ の支配下にあることは重要である．$b_\pi(s)$ のみ見ていたのでは，f^s の pole を記述するには不正確なのである。

具体例に f^s を hyperfunction として実現するにあたって，pole の状況はもちろん色々ことなりうる．

$$f=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2$$

の場合，　f_+^s, f_-^s, $(f+i0)^s$, $(f-i0)^s$ などが定義され，pole ~~は~~, residue は色々とことなる．[　]．

以上を総合すれば，$\mathcal{D}f^{\alpha}$ は

$$\alpha \in \bar{R} + \mathbb{Z}$$

の時にのみ，興味ある事態がおこっている．この事情については，$\mathcal{D}f^{\alpha}$ が simple な場合，ほぼ完全に調べられている[ ]。simple でない場合，C における事情は複雑であろう。

この重要な $\bar{b}_{\mathcal{M}}(s)$ も，実は"最小多項式"としてとらえることができる[ ]。その前に，一般的注意をしておくと，

$\exists N$，$\mathcal{D}[s]f^{s-N} \supset \mathcal{M}_1 \supset \mathcal{D}[s]f^{s+N}$ となっている $\mathcal{D}[t,s]$-Module $\mathcal{M}_1$ に対しては，Thm 2 ①② が成立し，$b_{\mathcal{M}_1}(s) \mid b_{\mathcal{M},2N+1}(s-N)$ である．同様な $\mathcal{M}_2\ (\subset \mathcal{M}_1)$ があれば，Thm 3 の条件 1.2.3 はみたされ，(1-6)(1-7)(1-8) が成立する。

又，$\hat{S}S(\mathcal{M}_1) = W$，$\hat{S}S(\mathcal{M}_1/t\mathcal{M}_1) \subset W_0 \subset \hat{S}S(\mathcal{M}_1/t^{2N+1}\mathcal{M}_1)$．

今 $\mathcal{M}_{red} = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{D}[s][\bar{b}_{\mathcal{M}}(s-\nu)]_{\nu} f^{s-\nu}$ とおくと，これは有限項で安定することがわかり，上述の $\mathcal{M}_1$ の条件をみたす．よって，

$$b_{\mathcal{M}_{red}}(s) = \bar{b}_{\mathcal{M}}(s), \quad c_{\mathcal{M}_{red}}(s) = 1$$

となる．詳細は[ ]を参照のこと．

（尚，これに関連して，$\mathcal{M}^{red} = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} [t^{\nu}\mathcal{M}_{red} : [\bar{b}_{\mathcal{M}}(s)]_{\nu}]_{\bigcup_{l \geq 0} \mathcal{D}[s]f^{s-l}}$ が coherent かどうか，まだ未解決である．）