数理解析研究所講究録
第249巻 1975年 27-30

ランク1の対称空間上のディリクレ問題

日本女子大　峰村 勝弘
広島大 理　田中　誠
広島大 理　岡本 清郷

§1 序

1971年に、S. Helgasonは、単位円内部

$$X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

におけるポアンカレ計量

$$ds^2 = (1-|z|^2)^{-2} dz d\bar{z}$$

に対応するラプラシアン

$$\Delta = (1-|z|^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

のX上の固有函数について考察し、次の結果を得た。

定理（I）$B = \{b = e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$とし、$s \in \mathbb{C}$とする。B上の超函数$\varphi$の、ポアソン核

$$P(z, b) = \left(\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}\right)^{\frac{1+s}{2}}$$

によるB上での積分

$$\int_B P(z, b) \varphi(b) db$$

は、sが$\mathbb{C}$を、φがB上の超函数を動くとき、ΔのX上での

固有函数を尽くす。

§2. Helgason予想.

§1におけるXは、対称空間の一つである。Helgasonは、Nice Congressで定理(I)の一般化を問題として提出した。

Gを、連結実半単純線型リー群とし、$G=KAN$を、Gの一つの岩沢分解とする。K,A,Nのリー環をそれぞれ$\mathfrak{k},\mathfrak{a},\mathfrak{n}$と書く。$G$の元$g$の上の分解による$A$-成分の$\log$を$H(g)$と書く。$\rho=\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\operatorname{ad}|\mathfrak{n})$とおく。$\mathbb{D}(X)$で$X=G/K$上の$G$-不変な微分作用素のなす可換環を表わす。$\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}$に対して

$$P_\lambda(x,b)=\exp\{-(\lambda+\rho)H(g^{-1}k)\}$$

とおく。(但し　$x=gK$, $b=kM$)　P_λはポアソン核を与える。$B=K/M$ $(M=Z_K(A))$上の超函数の全体を$\mathcal{B}(B)$と書く。

予想(II)　X上の$\mathbb{D}(X)$の同時固有函数は

$$\int_B P_\lambda(x,b)\varphi(b)\,db \qquad (\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*},\ \varphi\in\mathcal{B}(B))$$

で尽くされる。

§3. ランク1の対称空間における最近までの結果

(II)に対して、群論的な方法による研究は、ランク1の場合に限られて来た。この§では$\operatorname{rank}(X)=1$と仮定し、群論的な方法で得られた結果を述べる。

$\dim\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}=1$であるから、$\mathbb{C}\ni s\longmapsto s\rho\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}$により$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}$と$\mathbb{C}$とを同一視する。$\Delta$をKilling形式に対応する$X$上のラプラシ

アンとすると，$\mathbb{D}(X) \cong \mathbb{C}[\Delta]$（すなわち Δ は $\mathbb{D}(X)$ の生成元）となるから．以下 Δ のみ考えれば十分である。このとき (II) は次の (II₁) と (II₁) の弱い形の (II₂) に分けることが出来る。

(II₁) Δ の任意の固有函数は

$$\int_B P_s(x,b)\varphi(b)\,db \quad (s \in \mathbb{C},\ \varphi \in \mathcal{B}(B))$$

で尽くされる。

(II₂) Δ の，固有値 $\mu \geq -\langle \rho, \rho \rangle$ の固有函数は

$$\int_B P_s(x,b)\varphi(b)\,db \quad (s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{B}(B))$$

で尽くされる。

ランク1の既約対称空間は

BD-I	$SO(n,1)/SO(n)$
A-III	$SU(n,1)/S(U_n \times U_1)$
C-II	$Sp(n,1)/Sp(n) \times Sp(1)$
F-II	

に分類されるが，橋爪，岡本，峰村，Helgason 等により次の結果が得られている。

BD-I	(II₁) が成立
A-III, C-II, F-II	(II₂) が成立.

§4．ランク1の対称空間における現在の結果

群論的な方法では限界があり，BD-I を除いては．弱い形の結果しか得られていない。しかし擬微分作用素の理論を用い

ることにより，generic な固有値に対しては（II）が一般のランク1の対称空間に対して成立することが示される。以下その概略を述べる。

Δは境界Bに関して確定特異点型であるので，昨月々大島の話にある 大島の定理 により，固有値 $\lambda=(s^2-1)\langle\rho,\rho\rangle$ の固有函数 f は

$$f=A_1(b,D_t,D_b)\varphi_1(b)t^{\lambda_1}+A_2(b,D_t,D_b)\varphi_2(b)t^{\lambda_2}$$

と表わされる。(ここに，φ_1,φ_2 はB上の超函数，A_1,A_2 は擬微分作用素，$\lambda_1=(\frac{p}{2}+q)(1+s)$，$\lambda_2=(\frac{p}{2}+q)(1-s)$，$p=\#\{$positive reduced root$\}$，$q=\#\{$positive non-reduced root$\}$)

A_1,A_2 のある正規化の下に φ_1,φ_2 は unique である。φ_1,φ_2 を f の第一，第二境界値と呼び $\gamma_s(f)=\varphi_2$，$\mathcal{P}_s(\varphi)=\int_B P_s(x,b)\varphi(b)\,db$ と定義すると，γ_s について

(1) $\gamma_s\circ\mathcal{P}_s=c(s)\circ\mathrm{id}$ （$c(s)$ は constant）

(2) γ_s は G-equivariant

(3) γ_s は K 上の積分と可換

が成り立つ。(1)〜(3) より（II）が証明される。

§5. ランク2以上の対称空間

最近 大島によって $SL(3,\mathbb{R})/SO(3)$ の場合にも（II）が成立することが示された。方法は，余次元1の場合に帰着するのである。