数理解析研究所講究録
第249巻 1975年 39-45

Real rank 1 の半単純リー群に関する ある系列の既約表現について

津田塾大 三島川寿一

§1. 序 V. Bargmann による $G_0=SU(1,1)$ の既約表現 $D^+_{\frac{1}{2}}, D^-_{\frac{1}{2}}$ は次の様にして構成される。($D^+_{\frac{1}{2}}$, $D^-_{\frac{1}{2}}$ は離散系列に属し $D^+_{\frac{1}{2}} \oplus D^-_{\frac{1}{2}}$ は主系列に属する)

G_0 の元 $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix}$ ($|\alpha|^2-|\beta|^2=1$) をパラメータ

$g=(z,\theta)$ ($|z|<1$, $z\in\mathbb{C}$, $0\leqq\theta<4\pi$) を用いて表わすことにする。但し $z=\frac{\bar{\beta}}{\alpha}$, $e^{\frac{i\theta}{2}}=\frac{\alpha}{|\alpha|}$ 。このとき G_0 の不変測度 dg は $dg=(1-|z|^2)^{-2}dx\,dy\,d\theta$, $z=x+iy$ で与えられる。

さて G_0 上の関数空間 $\mathcal{H}_0^+, \mathcal{H}_0^-$ を

$$\mathcal{H}_0^{\pm} = \{ f^{\pm}\in C^{\infty}(G_0) \mid f^{\pm}(gk_{\varphi}) = e^{\mp\frac{i\theta}{2}} f^{\pm}(g),\ \Omega f=-\frac{1}{4}f$$

$$,\ \sup |(1-|z|^2)^{-\frac{1}{2}} f(z,\theta)| < +\infty \}.$$

とする。 但し Ω は G_0上のカシミール作用素とし，

$$k_\varphi = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\theta} & 0 \\ 0 & e^{+\frac{i}{2}\theta} \end{pmatrix}$$ とする。

そこで $\mathcal{H}_0^{\pm}$ のセミノルム $\|\ \|_{\pm}$ を

$$\|f\|_{\pm}^2 = \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \int |f^{\pm}(z,\theta)|^2 (1-|z|^2)^{-2+\varepsilon} dx\,dy\,d\theta$$

により定義すると $\mathcal{H}_0^{\pm}$ は pre-Hilbert 空間となることがわかる。即ち $\|f^{\pm}\|_{\pm} = 0 \Rightarrow f^{\pm} = 0$ on G。

$\mathcal{H}^+$, $\mathcal{H}^-$ を各々 $\mathcal{H}_0^+$, $\mathcal{H}_0^-$ の完備化として $D_{\frac{1}{2}}^+$, $D_{\frac{1}{2}}^-$ は次の様にして与えられる。

$$(D_{\frac{1}{2}}^{\pm}(g) f^{\pm})(x) = f^{\pm}(g^{-1}x) \qquad g, x \in G_0,\ f^+ \in \mathcal{H}^+,$$

$f^- \in \mathcal{H}^-$。

おおまかにいえば $D_{\frac{1}{2}}^+$ は単位円盤内で複素解析的な空間に作られた表現であり，$D_{\frac{1}{2}}^-$ は反解析的な表現である。一方単位円上で構成されたある主系列表現 $C_{\frac{1}{2}}$ は又 $D_{\frac{1}{2}}^+ \oplus D_{\frac{1}{2}}^-$ と同型となる。そこで一般の G に対して同様な議論が成りたつか という問題は次の節で考える。

§2.

G_c を複素単純 リー群とし，G を G_c の一つの実型とする。その上 G を real rank 1 と仮定する。[1] G が real rank

1で、かつコンパクトなカルタン部分群をもたぬ時、主系列表現は総て可約なので、我々の問題を考えるには、Gがコンパクトなカルタン部分群を持つ場合のみが適当である。以下[2)] Gはコンパクトなカルタン部分群をもつと仮定しておく。

$\mathfrak{g}_c$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$を各々G_c, G, K（KはGの極大コンパクト部分群）のリー環とし $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ をカルタン分解とする。$\mathfrak{a}$を$\mathfrak{g}$のカルタン部分環として $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p} \neq \{0\}$ となる様にとる。2)の仮定から $\dim \mathfrak{a} \cap \mathfrak{p} = 1$. そこで $\mathfrak{a}_R = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}$ $\mathfrak{a}_I = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{k}$ とおく。Σを$(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{a}_c)$に関するroot系とすれば、1)から $\alpha_0 = 0$ on $\mathfrak{a}_I$となる様のΣの元α_0がとれる。α_0を以後固定して議論を進める。Σの順序として$(\alpha, \alpha_0) > 0$であれば常に$\alpha > 0$となるものを選んでおく。

$\mathfrak{U}$を$\mathfrak{g}_c$の展開環，$\mathfrak{Z}$を$\mathfrak{U}$の中心とする。そこで$\mathfrak{U}$の元は次の様にしてG上の左不変微分作用素と考えられる。

Wを有限次元ベクトル空間，$C^\infty(G, W) = \{f : G \to W \mid f$は$G$上$C^\infty$-級$\}$とし

$$(Xf)(x) = \frac{d}{dt} f(x \exp tX)\Big|_{t=0}, \quad f \in C^\infty(G, V)$$

$X \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{U}$。

$I(\mathfrak{a}_c)$を$(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{a}_c)$のワイル群に関する$\mathfrak{a}_c$上の不変多項式全体とし $\mu : \mathfrak{Z} \longrightarrow I(\mathfrak{a}_c)$ をシュバレイ同型とする。

λ を $\mathfrak{a}_c$ 上の線型形式とすれば次の様にして無限小指標 $\chi_\lambda : \mathfrak{Z} \to \mathbb{C}$ が定義される。

$$\chi_\lambda(z) = \lambda(\mu(z)) \qquad z \in \mathfrak{Z}.$$

さて前節での $H_0^\pm$ にあたる空間を定義する。τ を K の既約表現とし、W をその表現空間とする。そこで $C^\infty(W, G)$ のセミノルム達 $\{\nu_b\}_{b \in \mathfrak{U}}$ を次の様に定義する。

$$\nu_b(f) = \sup_{x \in G} |(bf)(x)| e^{d(x0,0)}, \quad f \in C^\infty(W, G).$$

但し d は対称空間 G/K 上の G-不変リーマンメトリックで $e^{d(\exp H0,0)} = e^{\rho_+(H)}$ $H \in \mathfrak{a}_R$ ($\rho_+ = \frac{1}{2} \sum_{(\alpha,\alpha_0)>0} \alpha$) となるものとする。

$H_0(\lambda, \tau)$ (λ を $\mathfrak{a}_c$ 上の整型式) を次の様に定義する。

$$H_0(\lambda,\tau) = \{ f \in C^\infty(W,G) \mid \nu_b(f) < +\infty \ \forall b \in \mathfrak{U}, \ zf = \chi_\lambda(z) f, \ f(kx) = \tau(k) f(x) \ \forall x \in G \ \forall k \in K \}$$

又 $H_0(\lambda,\tau)$ のセミノルムを

$$\|f\|^2 = \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \int_G |f(x)|^2 e^{-\varepsilon d(x0,0)} dx$$

(dx は G 上のハール測度) により与えておく。

λ は $\mathfrak{a}_c$ 上の整型式であったが必らずしも $H_0(\lambda,\tau)$ の元 f

に対して $\|f\| = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ on G は成りたたない。

そこで λ として次の様なものに制限する。

(※1) $(\lambda, \alpha_0) = 0$, $\prod_{\alpha \neq \pm\alpha_0} (\lambda, \alpha) \neq 0$, $(\lambda, \beta) > 0$

(β; $\beta > 0$ かつ $(\beta, \alpha_0) = 0$ 。

Lemma

λ を上の条件 (※1) を満す整型式 とすれば $H_0(\lambda, \tau)$ は pre-Hilbert 空間。

$H_0(\lambda, \tau) \neq \{0\}$ は一般の τ に対しては必らずしも成りたたない。そこで τ を次の様に制限をする。

M を K に於ける $\mathfrak{a}_R$ の中心とすれば

$\dim G = 3 \Rightarrow M = \{\pm 1\}$ （1 は G の単位元）

$\dim G > 3 \Rightarrow M$ は連結.

$\rho_- = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha > 0 \\ (\alpha, \alpha_0) = 0}} \alpha$, $\lambda_- = \lambda - \rho_-$ とおき σ_{λ_-} を λ_- を

最高ウェイトとする M の既約表現 F をその表現空間とする。

（ $M = \{\pm 1\}$ のとき、$\sigma_{\lambda_-}(-1) = -1$ となる様にする）

この時次の補題が成りたつ。

Lemma

(※2) $|\tau|M : \sigma_{\lambda_-}| \neq 0 \Rightarrow H_0(\lambda, \tau) \neq 0$

但し $\tau|M$ は τ の M への制限であり、

$|\tau|M : \sigma_{\lambda_-}|$ は $\tau|M$ の中に　現われる重複度。

(λ, τ) を ※1, ※2 を満すとしよう。そこで

$$[U(\lambda, \tau ; g)f](x) = f(gx) \qquad f \in H(\lambda, \tau)$$

によって G の表現 $U(\lambda, \tau)$ を定義する。但し $H(\lambda, \tau)$ は $H_0(\lambda, \tau)$ の完備化。

定理

(λ, τ) が ※1, ※2 を満すとき、

$U(\lambda, \tau)$ はユニタリ表現で　特に $|\tau|M : \sigma_{\lambda_-}| = 1$ とすれば $U(\lambda, \tau)$ は既約.

注. ※ を満す λ に対して $|\tau|M : \sigma_{\lambda_-}| = 1$ を満す τ は必らず存在する。

次に主系列表現と上に得られた $U(\lambda, \tau)$ との関係を述べる。

$G = KA_R N$ を岩沢分解、dk を K の不変測度とする。又

$$\mathfrak{H}(\lambda_-) = \{ f : K \to F \mid \int_K |f(k)|^2 dk < \infty,\ f(km) = \sigma_{\lambda_-}^{-1}(m) f(k)$$

$\forall k \in K \quad \forall m \in M \}$ とおく。

$s \in \mathbb{R}$ を一つ固定し

$$[V(\lambda_-, is; x)f](k) = e^{-(1+si)\rho_+(H(x^{-1}, k))} f(k_{x^{-1}})$$

$f \in \mathfrak{F}(\lambda_-)$, $k \in K$, $x \in G$, $x^{-1}k = k_{x^{-1}} \exp H(x^{-1}, k)\, n(x^{-1}, k)$

により G の表現 $V(\lambda_-; is)$ を定義する。

$V(\lambda_-; is)$ は主系列表現と呼ばれる。$V(\lambda_-; is)$ $(s \neq 0)$ は既約ユニタリ表現で $V(\lambda_-; 0)$ は可約であることを知られている。

定理 $\cancel{4}1$, を満しかつ $|\tau|M : \sigma_{\lambda_-}| = 1$ とすると $U(\lambda, \tau)$ は $V(\lambda_-, 0)$ の既約成分。