数理解析研究所講究録
第 249 巻 1975 年 46-53

非コンパクト型対称空間上の Laplacian の複素巾について

名大 理学部　　浦川 肇

G を非コンパクト連結半単純 Lie 群 (center $< \infty$), K を G の極大コンパクト群として, 非コンパクト型の対称空間 G/K を考える。この時, Eguchi-Okamoto [1] により, G/K 上の急減少関数に対する Fourier 変換について, その Plancherel の定理, 逆 Fourier 変換公式及びその Fourier 像の特徴づけが得られた。

我々はこの結果を用いることにより, G/K 上の laplacian D の複素巾 D^s $(s \in \mathbb{C})$ を定義し, その kernel を調べることを試みる。

まず Eguchi-Okamoto の結果を述べる:

$\mathcal{C}(G/K)$; G/K 上の急減少関数の作る空間 とする。$f \in \mathcal{C}(G/K)$ に対して, Fourier 変換 $\tilde{f}(\lambda, kM)$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $k \in K$ を,

$$\tilde{f}(\lambda, kM) := \int_{AN} f(kan)\, e^{(-i\lambda+\rho)(\log a)}\, da\, dn$$

$$= \int_{G/K} f(g)\, e^{-(-i\lambda+\rho)(H(g^{-1}k))}\, dg_K$$

と定義する。ここで、$\mathfrak{a}^*$, A, N は G の Iwasawa 分解を $G=KAN$ とし、$\mathfrak{a}$ は A の Lie 環、$\mathfrak{a}^*$ は $\mathfrak{a}$ の dual space である。M は $\mathfrak{a}$ の K における centralizer である。

この時、

(i) $$\int_G |f(g)|^2 dg = \frac{1}{w}\int_{\mathfrak{a}^*\times K/M} |\tilde{f}(\lambda, kM)|^2 |c(\lambda)|^{-2} dk_M\, d\lambda$$

(ii) $$f(g) = \frac{1}{w}\int_{\mathfrak{a}^*\times K/M} \tilde{f}(\lambda, kM)\, e^{-(i\lambda+\rho)(H(g^{-1}k))} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda\, dk_M$$

が成り立つ。ここで、$g\in G$ に対して、$G=KAN$ に従って、$g = K(g)\exp H(g)\, n(g)$ と分解し、$c(\lambda)$ は Harish-Chandra による c-function である。w は $W = M'/M$ の元の個数(M' は $\mathfrak{a}$ の K での正規化群)

更に、$\mathfrak{a}^*\times K/M$ 上の急減少関数の作る空間を $\mathcal{C}(\mathfrak{a}^*\times K/M)$ とし、$\mathcal{C}(\mathfrak{a}^*\times K/M)$ の元 ϕ で、任意の $g\in G$, $s\in W$, $\lambda\in\mathfrak{a}^*$ に対し、

$$\int_{K/M} e^{-(is\lambda+\rho)(H(g^{-1}k))}\phi(s\lambda, kM)\,dk_M = \int_{K/M} e^{-(i\lambda+\rho)(H(g^{-1}k))}\phi(\lambda, kM)\,dk_M$$

を満すもの全体を $\mathcal{C}(\mathfrak{a}^*\times K/M)_W$ とする。

この時、

(iii) $f\longmapsto\tilde{f}$ は $\mathcal{C}(G/K)$ から $\mathcal{C}(\mathfrak{a}^*\times K/M)_W$ の上への isomorphism となっている。

さて、我々は、$\mathbb{D}(G/K)$: G/K 上の G-不変微分作用素とした時、$\mathbb{D}(G/K)$ の元 D で次のような条件を満すものを考える：

一般に、$D \in \mathbb{D}(G/K)$ に対して、

$$D_g\left(e^{-(i\lambda+\rho)(H(g^{-1}k))}\right) = \Gamma(D)(i\lambda)\ e^{-(i\lambda+\rho)(H(g^{-1}k))}$$

$$\lambda \in \mathfrak{a}^*,\quad k \in K$$

ここで、$\Gamma(D)(i\lambda)$ は、W-不変な $\mathfrak{a}^*$ 上の複素係数の多項式の $i\lambda$ での値をとらせたものであるが、この $\Gamma(D)$ に次の仮定をおく。

仮定

(I) $\forall \lambda \in \mathfrak{a}^*$; $\quad \Gamma(D)(i\lambda) \in \mathbb{R}$.

更に、$\Gamma(D)$ を $2m$ 次の多項式とし、

$$\Gamma(D) = \sum_{k=0}^{2m} a_k \qquad a_k : k\text{ 次の多項式（実係数）}$$

と書いた時、

(II) $\exists d > 0$; $\quad -a_{2m}(i\lambda) > d|\lambda|^{2m} \quad (\lambda \in \mathfrak{a}^*)$

(III) $\exists c > 0$; $\quad -\Gamma(D)(i\lambda) \geqq c \quad (\quad " \quad)$

を満すものとする。例えば、Laplace-Beltrami 作用素 Δ の時は、$\Gamma(\Delta)(i\lambda) = -(|\lambda|^2 + |\rho|^2)$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$

（ここで ρ は、正の restricted root の和の半分）となっており、上の仮定 (I)〜(III) を満している。

以下は、このような D についてのみ考えることにする。

補題 任意の $t>0$ に対して

$$e^{t\,\Gamma(D)(i\lambda)}$$ は W-不変な $\mathfrak{a}^*$ 上の急減少関数である。

従って Gangolli [2] のように

$$G^t(g) = \frac{1}{w}\int_{\mathfrak{a}^*} e^{t\,\Gamma(D)(i\lambda)}\,\phi_{-\lambda}(g)\,|c(\lambda)|^{-2}\,d\lambda$$

によって両側 K-不変な G 上の急減少関数を考えることができる。
ここで $\phi_{-\lambda}(g) = \int_K e^{-(i\lambda+\rho)(H(gk))}dk$ である。この時

命題 1

G^t は方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = Du$ の基本解である：

(i) $\frac{\partial}{\partial t} G^t = D_g G^t$

(ii) $G^t * G^s = G^{t+s}$

(iii) $\lim_{t\to 0+}\int_G G^t(x^{-1}y)f(y)\,dy = f(x)$, $x\in G$, $f\in C_c^\infty(G/K)$

(iv) $\lim_{t\to 0+}\int_G \left|f(x) - \int_G G^t(x^{-1}y)f(y)\,dy\right|^2 dx = 0$, $f\in L^2(G/K)$

が成り立つ。

そこで、我々は $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して

$$K^\alpha(g) := \int_0^\infty t^{-\alpha-1}\,G^t(g)\,dt \qquad g\in G$$

を、右辺の積分が存在するならば、考えることにする。この時次のことが言える。

命題2 $n := \dim G/K$ とおく。この時、

$\mathrm{Re}\,\alpha < -\frac{n}{2m}$ ならば、$K^{\alpha}(g)$ を定義する積分は絶対収束し、かつ $K^{\alpha} \in L^2(G/K) \cap C^{\infty}(G/K)$ が成立。

これは、$|\varphi_{-\lambda}(g)| \leq \int_K |e^{-(i\lambda+\rho)H(gk)}|dk = \int_K e^{-\rho(H(gk))}dk \; (=: \Xi(g))$ より、

$$|G^t(g)| \leq \frac{1}{w}\Xi(g)\int_{\mathfrak{a}^*} e^{t\Gamma(D)(i\lambda)} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda \qquad (*)$$

Helgason [4] によれば、$\exists\, m_0 > 0$ 整数；

$$|c(\lambda)|^{-2} \leq M(1+|\lambda|^2)^{m_0} \quad (\lambda \in \mathfrak{a}^*) \quad \text{for some } M>0$$

が言えているので、$\mathrm{Re}\,\alpha < -\frac{m_0+l}{2m}$ $(l = \dim \mathfrak{a})$ ならば、$K^{\alpha}(g)$ の積分の絶対収束性が言える。更に命題のように言うには、Gindikin [3] で得られた、$c(\lambda)$ の精密な形を用いて、計算を実行しなければならない。$K^{\alpha} \in L^2(G/K)$ については、Plancherel の定理より、

$$\|G^t\|^2_{L^2(G)} = \frac{1}{w}\int_{\mathfrak{a}^*} e^{2t\Gamma(D)(i\lambda)} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda$$

を用いて、上と同様に、$\int_0^{\infty} t^{-\alpha-1}\|G^t\|_{L^2(G)}dt < \infty$。このことと、Schwarz の不等式 $\int_G G^t(g)\overline{G^s(g)}dg \leq \|G^t\|_{L^2(G)}\|G^s\|_{L^2(G)}$ を用いることにより、$K^{\alpha} \in L^2(G/K)$ も言える。

この命題2を用いて、Riesz potential を、

定義 $\mathrm{Re}\,\alpha < -\frac{n}{2m}$ の時、

$$I^{\alpha}f(x) := \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_G K^{\alpha}(x^{-1}y)f(y)dy = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}(f * \check{K}^{\alpha})(x), \quad \check{K}^{\alpha}(x) := K^{\alpha}(x^{-1})$$

と定義する。命題２より．$f\in L^1(G)$ に対して．$I^\alpha f$ は定義できるが，後で述べることを用いて．I^α なる作用素は．$L^2(G/K)$ 上の有界作用素となることがわかる。

命題３　$Re\,\alpha < -\frac{n}{2m}$ の時．　$f,\varphi\in \mathcal{C}(G/K)$ に対して．

$$(i)\ \int_G \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} K^\alpha(g)\overline{\varphi(g)}\,dg = \frac{1}{w}\int_{\mathfrak{a}^*\times K/M} (-\Gamma(D)(i\lambda))^\alpha\, \overline{\tilde{\varphi}(\lambda,kM)}\,|c(\lambda)|^{-2} d\lambda\, dk_M$$

$$(ii)\ \int_G I^\alpha f(g)\,\overline{\varphi(g)}\,dg = \frac{1}{w}\int_{\mathfrak{a}^*\times K/M} (-\Gamma(D)(i\lambda))^\alpha\, \tilde{f}(\lambda,kM)\overline{\tilde{\varphi}(\lambda,kM)}\,|c(\lambda)|^{-2} d\lambda\, dk_M$$

が成り立つ。

この結果と．Eguchi‐Okamotoの結果を用いて．次のことが言える。

定理１　$Re\,\alpha < -\frac{n}{2m}$ の時．

$$f\in \mathcal{C}(G/K) \Rightarrow I^\alpha f\in \mathcal{C}(G/K)$$ かつ．

$$(I^\alpha f)^\sim(\lambda,kM) = (-\Gamma(D)(i\lambda))^\alpha\,\tilde{f}(\lambda,kM)$$

が成り立つ。

定理２　$Re\,\alpha,\ Re\,\beta,\ Re(\alpha+\beta) < -\frac{n}{2m}$ の時．

$$I^\alpha(I^\beta f) = I^\beta(I^\alpha f) = I^{\alpha+\beta} f,$$

$$D(I^\alpha f) = I^\alpha(Df) \qquad \text{for } f\in \mathcal{C}(G/K)$$

が成り立ち. 特に. $\mathrm{Re}\,(\alpha+1) < -\frac{n}{2m}$ ならば.

$$D(I^{\alpha}f) = I^{\alpha}(Df) = -I^{\alpha+1}f \ , \quad f \in \mathcal{C}(G/K)$$

となる。

そこで. 改めて. $(-D)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ を. 次のように定義する.

<u>定義</u> $f \in \mathcal{C}(G/K)$ に対して.

(i) $(-D)^{\alpha}f := I^{\alpha}f \qquad \left(\mathrm{Re}\,\alpha < -\frac{n}{2m}\right)$

(ii) $(-D)^{\alpha}f := (-D)^{k} I^{\alpha-k}f$. (そうでない時)

ただし. $k > 0$ integer, $-\frac{n}{2m} - 1 < \mathrm{Re}\,\alpha - k < -\frac{n}{2m}$ とする。

この時. 定理 1.2 より. 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して.

$$f \in \mathcal{C}(G/K) \Rightarrow (-D)^{\alpha}f \in \mathcal{C}(G/K) \quad \text{かつ.}$$

$$((-D)^{\alpha}f)^{\sim}(\lambda, kM) = (-\Gamma(D)(i\lambda))^{\alpha}\tilde{f}(\lambda, kM)$$

となり. 従って.

$$(-D)^{\alpha}(-D)^{\beta} = (-D)^{\alpha+\beta}, \quad (-D)^{1} = -D, \quad (-D)^{0} = I$$

が. $\mathcal{C}(G/K)$ 上で成り立ち. (ここで. I : identity operator)

任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して.

$$(-D)^{\alpha} \ : \ \mathcal{C}(G/K) \longrightarrow \mathcal{C}(G/K) \quad \text{isomorphism}$$

が成り立つことがわかる。

References

[1] Eguchi-Okamoto; The Fourier transform of the Schwartz space of a symmetric space

[2] Gangolli; Asymptotic behavior of spectra of compact quotients of certain symmetric space, Acta Math. 121 (1968) 151~192

[3] Gindikin-Karpelevič; Plancherel measure of Riemannian symmetric space of non-positive curvature, Sov. Math 3 (1962) 962~965

[4] Helgason; Fundamental solutions of invariant diff. op. on symmetric spaces, Amer. J. Math. 86 (1964) 565~601

[5] ——; The surjectivity of invariant diff. op. on symmetric spaces I, Ann of Math. (1973) 451~479

[6] 牟田洋一; 一般 Lorentz 群の調和解析, 数理研講究録 82, 119~140

[7] Seeley; Complex powers of an elliptic operator, "Singular integral" Amer. Math. Soc. (1967)

[8] E.M. Stein; Singular integrals and Differentiability properties of functions, Princeton, (1970)

[9] Kotake-Narasimhan; Regularity theorems for fractional powers of a linear operator, Bull. S.M. France, 90 (1962) 449~471