数理解析研究所講究録
第254巻 1975年 92-98

Morse Smale Systems II

東北大 理　西森敏之

微分同型写像 $f: M \longrightarrow M$ が Morse Smale diffeo とは

(1) $\Omega(f)$ は有限集合. (従って $\Omega(f) = Per(f)$).

(2) すべての周期点は双曲的.

(3) 各 $p, q \in \Omega(f)$ に対して $W^s(p) \pitchfork W^u(q)$.

4. Morse Smale diffeo の構造安定性と Ω-安定性

物理学や工学などに現われる方程式はその係数が近似的にしか定まらないにもかかわらず有効に現象を記述するということから，これらの方程式は係数の微少な変化によっても解の軌道の大域的な状態が変らないという性質をもつと考えられる。これを定式化して次の構造安定性という概念を得る.(Andronov-Pontrjagin [1]).

M をコンパクトで境界をもたない C^∞ 級多様体とする。M 上のすべての C^r 級力学系 (C^r 級ベクトル場) の集合に C^r 位相とよばれる位相を与えたものを $\mathfrak{X}^r(M)$ とかく. $\mathfrak{X}^r(M)$ は Banach space である．$X, X' \in \mathfrak{X}^r(M)$ が位相的に同値であるとは，適当な同相写像 $h: M \longrightarrow M$ が存在して h は X の軌道を X' の軌道の上へ向きを保ちながら写像することをいう．$X \in \mathfrak{X}^r(M)$ が構造安定であるとは，X の適当な近傍 $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}^r(M)$ が存在して $X' \in \mathcal{U}$ はすべて X と位相的に同値になることをいう．M 上のすべての C^r 級離散力学系（M から M への C^r 級微分同型写像）の集合に C^r 位相とよばれる位相を与えたものを $\mathrm{Diff}^r(M)$ とかく．$f, g \in \mathrm{Diff}^r(M)$ が位相共役であるとは，適当な同相写像 $h: M \to M$ が存在して $fh = hg$ となることをいう．$f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ が構造安定であるとは，f の適当な近傍 $\mathcal{U} \subset \mathrm{Diff}^r(M)$ が存在してすべての $g \in \mathcal{U}$ は f と位相共役であることをいう．

定理（Peixoto [6]）(a) 2次元多様体の C^r 級力学系が構造安定となるための必要十分条件はこれが Andronov-Pontrjagin の条件をみたすことである．(b) 2次元多様体上の構造安定な C^r 級力学系全体の集合 $\mathcal{S}^r(M)$ は $\mathfrak{X}^r(M)$ の中で open かつ dense である．

もともと Morse Smale system, diffeo の定義は上の定理の条件を一般次元に拡張して定式化したものである．一般次元の離散力学系の場合に対応する定理は次の通りである．

定理（Palis [4], Palis-Smale [5]）Morse Smale diffeo は構造安定である．

はじめてSmaleがMorse Smale diffeoを導入したとき，上のPeixotoの定理の(a)(b)の両方に対応する定理がなりたつかどうかを問題にしたが，(b)はなりたたないことが知られた．

定理（Smale[7]） dim $M \geqq 3$ならば，$\mathcal{S}^r(M)$は$\mathfrak{X}^r(M)$でdenseではない．

そこで構造安定性よりも弱いΩ-安定性という概念が自然に導入される．$f \in \mathrm{Diff}^r(M)$に対して$\Omega(f)$でfの非遊走点の集合をあらわす．fがΩ-安定とは，fの適当な近傍$\mathcal{U} \subset \mathrm{Diff}^r(M)$が存在してすべての$g \in \mathcal{U}$に対して$f|\Omega(f)$と$g|\Omega(g)$が位相共役になることである．

ところで各$x \in M$に対してfのω-極限集合$L^+(f,x)$を考えると，$L^+(f,x)$はxから出発して時間が充分過ぎた後の軌道の状態をあらわすものとみなしてよい．$L^+(f,x) \subset \Omega(f)$がなりたつから，$f$がΩ-安定ということは$f$の微少な変化によっても軌道の時間が充分過ぎたのちの状態が大域的に変らないということを意味する．

Ω-安定性に関する定理を述べるために定義を並べる．fがAxiom Aをみたとは次の(i)(ii)をみたすことである．

(i) $\Omega(f)$は双曲的集合である．[すなわち$TM|\Omega(f)$の部分バンドルE^sとE^uが存在して ① $TM|\Omega(f) = E^s \oplus E^u$ ② $Df(E^s) \subset E^s$, $Df(E^u) \subset E^u$. ③ $\exists c > 0,\ 0 < \exists \lambda < 1$ such that $\| Df^m(v) \| \leq c\lambda^m \|v\|$, $v \in E^s$.

$\|Df^{-m}(v)\| \leq c\lambda^m \|v\|,\ v \in E^u_x$ となること].

(ii) $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$.

定理 (The Spectral Decomposition Theorem, Smale [8]) $f \in Diff^r(M)$ が Axiom A をみたすとき、互いに交わらない閉不変集合 $\Omega_0, \cdots, \Omega_k$ が存在して $\Omega(f) = \Omega_0 \cup \cdots \cup \Omega_k$ となり各 Ω_i は Ω_i で dense な orbit を含む.

$f \in Diff^r(M)$ が Axiom A をみたすとする. $\Omega_i \leq \Omega_j$ とは, $W^s(\Omega_i) \cap W^u(\Omega_j) \neq \phi$ ということと定義する. f が no cycle property をもつとは, $\Omega_{i_1} \leq \Omega_{i_2} \leq \cdots \leq \Omega_{i_k} \leq \Omega_{i_1},\ k > 1$ となる相異なる $i_1, \cdots, i_k$ が存在しないことである. Morse Smale diffeo は Axiom A をみたし no cycle property をもつ.

定理 (Smale [9]) $f \in Diff^r(M)$ が Axiom A をみたし no cycle property をもてば, f は Ω-安定である.

この定理によりかなり多くの $f \in Diff^r(M)$ が Ω-安定であることがわかるが, Ω-安定な力学系は一般には dense でないことが知られている. (Anosov [2], 池上 [3]).

5. Gradient dynamical system と Morse-Smale diffeo

M をコンパクトで境界をもたないリーマン多様体とする. 任意の C^1 級写像 $f: M \longrightarrow R$ が与えられたとき, C^1 近似によって f は C^∞ 級写像で非退化特異点しか持たないようにできる.

このとき f に対して力学系 grad $f \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ が次の式で定義される.

$$\langle \mathrm{grad}\, f,\ v \rangle = v(f),\quad v \in TM$$

必要なら更に f を C^1 近似しリーマン計量を変えれば，grad f は次の性質をもつ.

(1) 特異点は有限個であり，各特異点における grad f の微分の行列のすべての固有値の実部は0でない. 特異点の集合を，$\{p_1, \cdots, p_k\}$ であらわすことにする.

(2) 周期軌道は存在しない.

(3) すべての $x \in M$ に対して，$L^+(x), L^-(x) \subset \{p_1, \cdots, p_k\}$

(4) $W^u(p_i) \pitchfork W^s(p_j)$, $1 \leq i, j \leq k$.

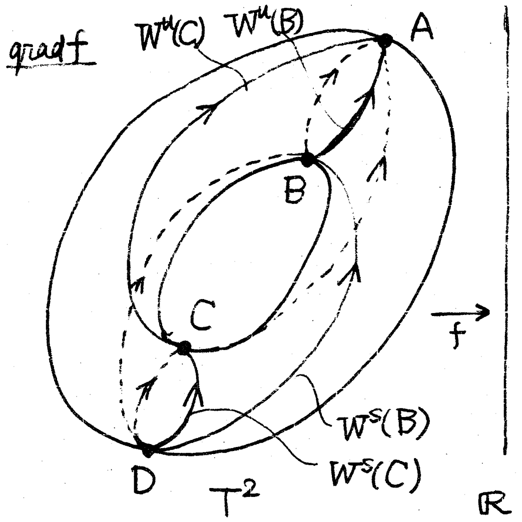
すなわち grad f は周期軌道をもたない Morse Smale system である。grad f の生成する 1-径数群を $\{\varphi_t\}$ とするとき，φ_1 は Morse Smale diffeo であるが，更に次の条件をみたしている.

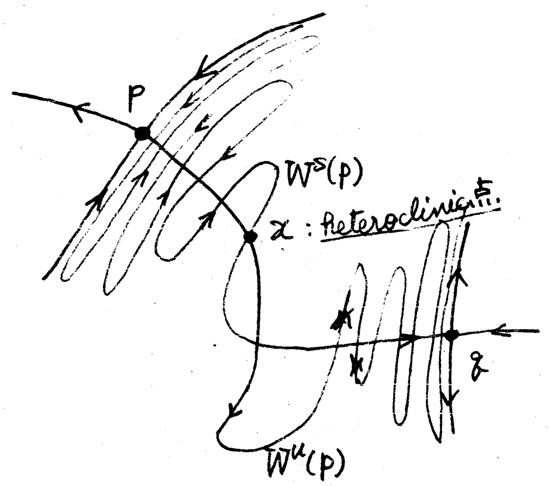
(*) $W^u(p_i) \cap W^s(p_j) \neq \phi \implies \dim W^s(p_i) < \dim W^s(p_j)$

一般に $g \in \mathrm{Diff}^r(M)$ が Morse Smale diffeo であって条件(*)をみたすときは gradient-like diffeo とよぶ.

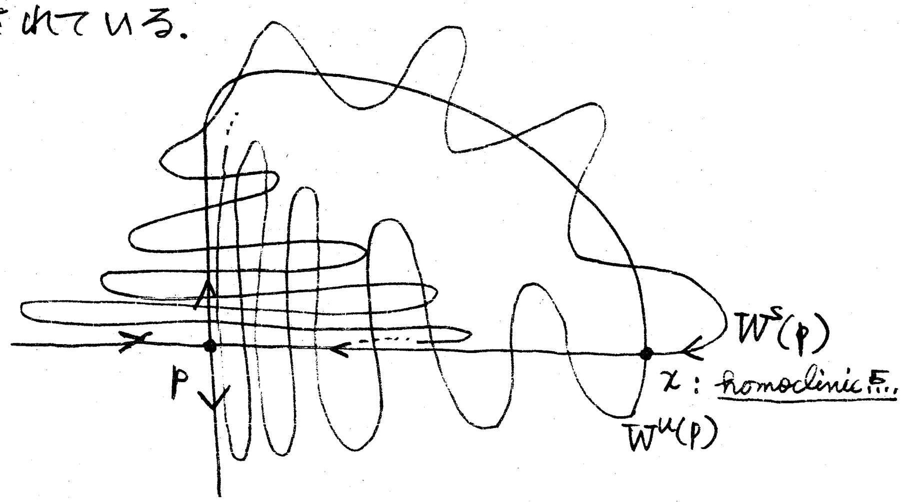
gradient-like diffeo の軌道の状態は比較的単純であるが，non gradient-like diffeo の場合には次に定義する heteroclinic 点があらわれて軌道の状態は複雑になる. $\dim W^s(p) = \dim W^s(q)$ をみたす p, q に関して $W^u(p)$ と $W^s(q)$ が transverse に交わる点の

ことを heteroclinic 点とよぶ. このとき $W^s(q)$ はだんだん強く振動しながら $W^s(p)$ に近づいて行く.





Morse-Smale diffeo には現われないが更に軌道の状態を複雑にするものとして Poincaré が三体問題を扱ったときに指摘した homoclinic 点とよばれるものがある。これは $W^u(p)\cap W^s(p)$ の点で p 自身でないもののことである. Birkhoff によって transverse homoclinic 点は周期点の集積点になっていることが示されている.



References

[1] Andronov-Pontrjagin : Systèmes Grossiers, Dokl. Akad. Nauk, 14 (1937), 247–250.

[2] D. Anosov : Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature, Dokl. Akad. Nauk, 145 (1962) 707–709.

[3] 池上宜弘：力学系における stability と genericity について, 数理解析研究所講究録 173 (1973).

[4] J. Palis : On Morse Smale dynamical systems, Topology 8 (1969), 385–405.

[5] Palis-Smale : Structural stability theorems, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970) 223–232

[6] M. Peixoto : Structural stability on two-dimensional manifolds, Topology 1 (1962) 101–120.

[7] S. Smale : Structurally stable systems are not dense, Amer. J. Math. 88 (1966) 491–116.

[8] S. Smale : Differentiable dynamical systems, Bull. A.M.S. 73 (1967) 747–817.

[9] S. Smale : The Ω-stability theorem, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970) 289–297.