数理解析研究所講究録
第 254 巻 1975 年 163-179



# Homoclinic点とG.D.Birkhoffのsignatureについて

徳島大工　　川上　博

## 1. はじめに

簡単な非線形電気回路から導びかれる２階常微分方程式

$$\dot{x} = f(t, x; \lambda) \qquad (E)$$

$$\bullet \equiv \frac{d}{dt}$$

$t \in R$　時刻

$x \in R^2$　相平面上の点

$\lambda \in \Lambda \subset R$　パラメタ

がhomoclinic解を持つ場合のいくつかの性質について考察する。後に具体的方程式の実験例を示す。いくつかの仮定と記法をまとめておく：

(1.1) 方程式(E)は時間$t$に関して周期的でその周期を$2\pi$とする：　$f(t+2\pi, x; \lambda) = f(t, x, \lambda)$.

(1.2) $f: R\times R^2\times\Lambda \longrightarrow R^2$ は次にあげる解の存在条件を満すに十分な条件を持つものとする: 各 $(t_0, x_0, \lambda_0)\in R\times R^2\times\Lambda$ に対して,この点を初期条件とする(E)の解がすべての時間に一意に存在する。

(1.3) 上の2つの仮定のもとに (E) の解 $\varphi(t, t_0, x_0): R\to R^2$ を用いて相平面をそれ自身に写す Poincaré map を $T$ とする:

$$T: R^2 \longrightarrow R^2$$
$$x_0 \longmapsto \varphi(2\pi, 0, x_0).$$

(1.4) $T$ による不動点のうちその特性根が $0<\lambda_1<1<\lambda_2$ となる不動点を正不安定不動点と呼び点Dと記す。

(1.5) 各パラメタ $\lambda\in\Lambda$ に対して,$T$ は1つのD点をもつものと仮定する。

(1.6) 点Dを$\omega$および$\alpha$ limit set とする相平面上の集合(曲線)を $\omega(D)$, $\alpha(D)$ であらわす:

$$\omega(D)=\{P\in R^2:\ D=\omega\text{-limit } P\}$$
$$\alpha(D)=\{P\in R^2:\ D=\alpha\text{-limit } P\}$$

この曲線は点Dで2つに分割されるのでその各々を $\omega_1(D)$-枝, $\omega_2(D)$-枝, $\alpha_1(D)$-枝および $\alpha_2(D)$-枝と呼ぶことにする。以下では $\omega_1(D)$枝と $\alpha_1(D)$枝のみを考えるのでこれを単に$\omega$枝, $\alpha$枝とかく.

また $^\forall P \in \omega$（あるいは$\alpha$）に対して $P_1 = T(P)$ として，
$P$ と $P_1$ を結ぶ $\omega$（あるいは $\alpha$）の線分を $\omega$-弧 $\widehat{P\omega P_1}$
（あるいは $\alpha$弧 $\widehat{P\alpha P_1}$ ）のように略記する。

（1.7） $HP(D) = \omega_1(D) \cap \alpha_1(D) - \{D\} \neq \phi$ と仮定する。
$HP(D)$ は $\omega_1$枝と $\alpha_1$枝の交点の集合でこれらの枝によって生じる homoclinic点の集合である。

（1.8） $Q \in HP(D)$ として $T$による $Q$の orbit を

$$Orb(Q) = \bigcup_{k \in Z} T^k(Q)$$

とし，$HP(D)$を orbit の意味で同値な類に別けたとき
$HP(D)/_{orb} \equiv H(D)$ と記す。

（1.9） 問題の記述

上の諸仮定のもとで点Dに出入りする$\omega$枝と$\alpha$枝が相平面$R^2$のある領域で互にからみ合っている。
そこで

(i) からまり合いの様子と

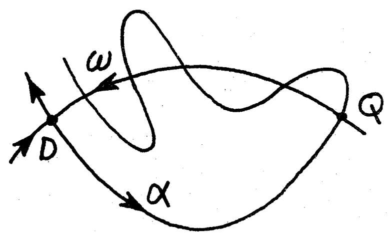
(ii) それらが$T$の摂動のもとでどのように変化し得るか。

などについて定性的な検討を行うことが主な問題である。
(i)の問題には（1.8）で定義したhomoclinic点のorbitに関する

同値類が関係している。これはまた $Q\in HP(D)$ とし ω弧 $\widehat{Q\omega T(Q)}$ をα枝で分割してゆく過程とも考えられるので shift dynamics と深く関係しているものと思われる。(ii)の問題については以下実験例により検討したにすぎない。これらの問題を考察するには G. D. Birkhoff [1] が定義した signature の考えがかなり有効であると思われる。次にこのことを簡単に述べる。

## 2. G. D. Birkhoff の signature とその性質

点 D が正不安定不動点，点 Q が点 D に出入りする ω枝，α枝の交点すなわち homoclinic 点の 1 つであるとする。ω枝，α枝にはそれぞれ図のように T による移動の方向に向きを考えておく。以後相平面の中の $\widehat{D\alpha Q}$，$\widehat{Q\omega D}$ で囲まれた領域とその近傍を考える。




$\omega(D)$ から実数 $R$ へのある homeo $h_\omega$ を考え，$h_\omega$ と $T|_\omega$ によって $R$ 上に shift $\tau_\omega$ を定義する：

$$\begin{array}{ccc} \omega(D) & \xrightarrow{h_\omega} & R \\ T|_\omega \downarrow & & \downarrow \tau_\omega \\ \omega(D) & \xrightarrow{h_\omega} & R \end{array} \qquad \tau_\omega = h_\omega T|_\omega h_\omega^{-1}$$

ここで $h_\omega$ としては $\tau_\omega$ が次の性質を持つように選ぶ。

$$\tau_\omega : R \longrightarrow R$$
$$\lambda \longmapsto \tau_\omega(\lambda) = \lambda + \varphi(\lambda)$$

$\tau_\omega$は連続かつ単調増加関数，$\tau(0)=0$，$\varphi: R\to R$ は周期１の周期関数．

このことから $\omega(D)$ 上の homoclinic 点 $Q$ を $h_\omega$により $R$ の原点 $0$ に対応させたとき（$h_\omega(Q)=0$），点 $Q_K=T^K(Q)$ は $\tau_\omega(h_\omega\circ T^K(Q))=K$ となる。この対応により $\omega$弧 $\widehat{Q\omega D}$ の点は $R_+=\{x\in R: x\geq 0\}$ に移される。

同様に $h_\alpha: \alpha(D)\longrightarrow R$ を考える：

$$\begin{array}{ccc}
\alpha(D) & \xrightarrow{h_\alpha} & R \\
{\scriptstyle T|_\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_\alpha} \\
\alpha(D) & \xrightarrow{h_\alpha} & R
\end{array}
\qquad \tau_\alpha = h_\alpha T|_\alpha h_\alpha^{-1}$$

$$\begin{aligned}
\tau_\alpha:\ & R \longrightarrow R \\
& \mu \longmapsto \tau_\alpha(\mu)=\mu+\psi(\mu)
\end{aligned}$$

$\tau_\alpha$は連続単調増加，$\tau_\alpha(0)=0$，$\psi$は周期１の周期関数とする。

$Q\in HP(D)$ とし $h_\alpha(Q)=0$ と選ぶと $\widehat{Q\alpha\infty}$ の点は $R_+$に移される。

$h_\omega$，$h_\alpha$ により $Q_K=T^K(Q)\in HP(D)$ は

$$(h_\omega, h_\alpha)(Q_K)\equiv(h_\omega(Q_K), h_\alpha(Q_K))=(K,K)$$

となる。以上の準備のもとに Birkhoff の signature を定義する。

その前に homoclinic 点の同値類について次の命題をあげておく。

（2.1）　$Q\in HP(D)$ とし $T(Q)=Q_1$ とする。このとき $\omega$弧 $\widehat{Q\omega Q_1}$（あるいは $\alpha$弧 $\widehat{Q\alpha Q_1}$）上の homoclinic 点の集合：$\widehat{Q\omega Q_1}\cap HP(D)$（あるいは $\widehat{Q\alpha Q_1}\cap HP(D)$）は同値類 $H(D)=HP(D)/_{\sim H}$

の代表元となっている。ただし $Q$ と $Q_1$ は同一点とみなす。

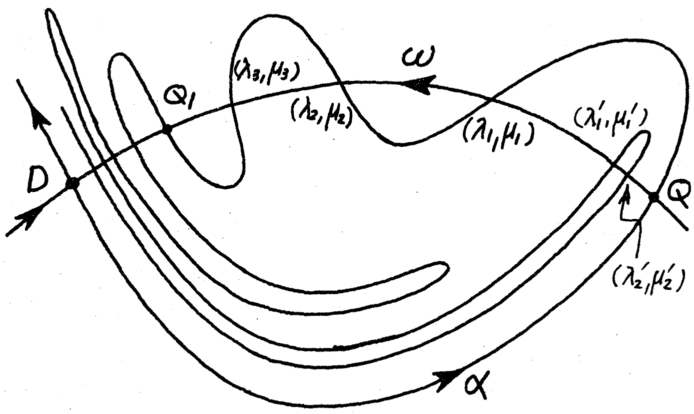
(2.2) G.D. Birkhoff の signature $\mathcal{S}$.

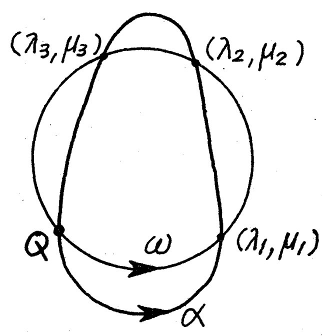
$Q\in HP(D)$, $Q_1=T(Q)$ とし $(h_\omega\times h_\alpha)(Q)=(0,0)$ とする。$\widehat{Q\omega Q_1}$, $\widehat{Q\alpha Q_1}$ による homoclinic 点 $\widehat{Q\omega Q_1}\cap\widehat{Q\alpha Q_1}$ は $h_\omega\times h_\alpha$ により

$$(0,0),\ (\lambda_1,\mu_1),\ \cdots,\ (\lambda_j,\mu_j),\ (1,1)$$

に移される。ただし $0<\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_j<1$, $0<\lambda_i<1$ $(i=1,\cdots,j)$ にならべた。この点列によって $\widehat{Q\omega Q_1}$ と $\widehat{Q\alpha Q_1}$ のからみぐあいが完全に決定される。$(0,0)$ と $(1,1)$ を orbit の意味で同値とみなし、閉曲線 $Q\omega D\alpha Q$ の $Q_1\omega D\alpha Q$ を1点に縮めると $\widehat{Q\omega Q_1}$ と $\widehat{Q\alpha Q_1}$ の交差の様子を図示できる(下図)。この図を Birkhoff は部分 signature (la signature partielle) $\mathcal{S}_1$ と呼んでいる。

同様に $Q_2=T^2(Q)$ として $\widehat{Q\omega Q_2}\cap\widehat{Q\alpha Q_2}$ の点列として次の homoclinic 点を得る:




$\mathcal{S}_1$

(i) $(0,0), (\lambda_1, \mu_1), \ldots, (\lambda_j, \mu_j), (1,1)$

(ii) $(1,1), (\lambda_1+1, \mu_1+1), \ldots, (\lambda_j+1, \mu_j+1), (2,2)$

(iii) $(\lambda_1', \mu_1'), \ldots, (\lambda_k', \mu_k')$ ただし $1<\mu_1'<\cdots<\mu_k'<2;\ 0<\lambda_i'<1$

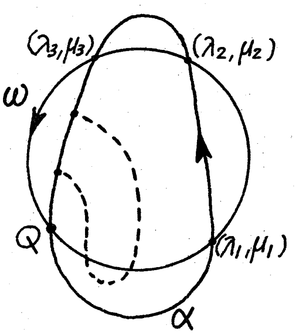
(iv) $(\lambda_1'', \mu_1''), \ldots, (\lambda_\ell'', \mu_\ell'')$ ただし $1<\lambda_1''<\cdots<\lambda_\ell''<2;\ 0<\mu_i''<1$

このようにして得られた点列を (i) と (ii) は orbit の意味で同値と見なすと新らしく (iii) と (iv) の点列が $\widehat{Q\omega Q_1}$ に加えられることになる。そこで部分 signature $\mathcal{S}_1$ を変形して (iii) と (iv) の点を加えた部分 signature $\mathcal{S}_2$ を構成する（下図参照）。

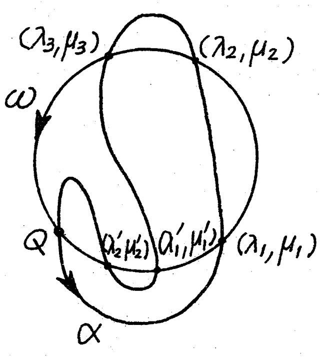
同様にして部分 signature $\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4, \cdots$ を構成すると

$$\mathcal{S} = \{ \mathcal{S}_k : k=1,2,\cdots \}$$

は $\omega$ 枝と $\alpha$ 枝の位相的なからまり具合を表現していると考えてよい。これを今考えている不変曲線 $\omega, \alpha$ に関する signature という。これは (2.1) より $\omega$ 弧 $\widehat{Q\omega Q_1}$ 上に homoclinic orbit の代表元を次々と見い出していることになっている。



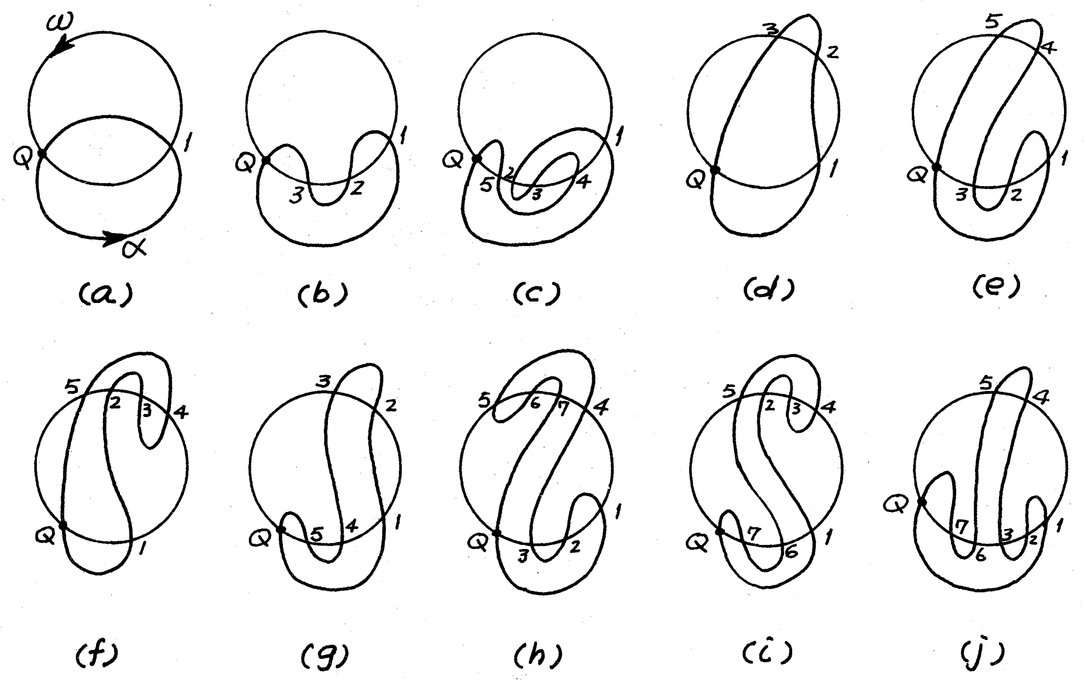

$\mathcal{S}_1$




$\mathcal{S}_2$

(2.3) 部分 signature $\mathcal{S}_1$ の例

$\mathcal{S}_1$ のいくつかの簡単な例を図示しておく：

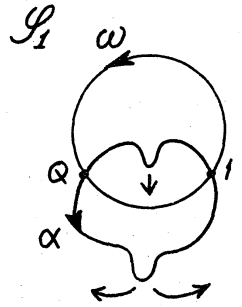


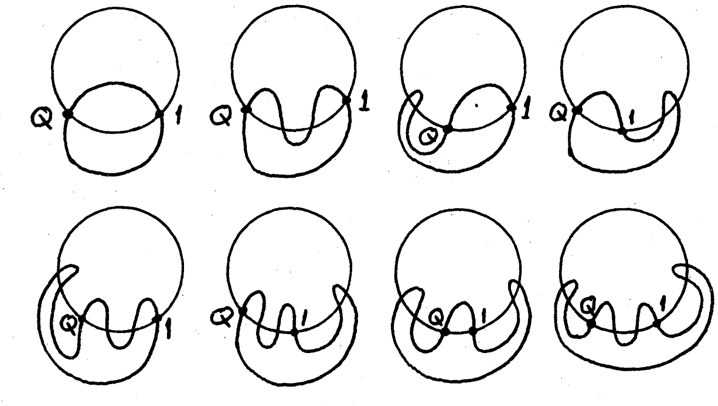

(2.4) 今写像Tを1つ定めて部分 signature $\mathcal{S}_1$ を求め，弧 $\widehat{Q\omega Q_1}$, $\widehat{Q\alpha Q_1}$ にTをほどこして $\widehat{Q\omega Q_2}$, $\widehat{Q\alpha Q_2}$ より $\mathcal{S}_2$ を求めることを考えよう。記述を簡単にするために $\mathcal{S}_1$ において $\omega$弧から構成される閉曲線を $\omega$-circle, $\alpha$弧のそれを $\alpha$-circle と呼ぶことにする。$\omega$枝，$\alpha$枝および $\mathcal{S}_1$ の定義より次のことがいえる：

> 与えられた $\mathcal{S}_1$, T より $\mathcal{S}_2$ が構成される場合，$\mathcal{S}_1$ の $\omega$-circle 内(あるいは外)にある $\alpha$-circle の弧は $\alpha$-circle の外(あるいは内)にある $\omega$-circle の弧と交わることはない。

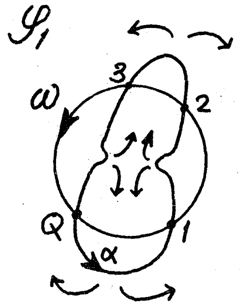
したがって例へば (2.3) の図 (a),(d) を $\mathcal{S}_1$ としたとき得られる $\mathcal{S}_2$ の例

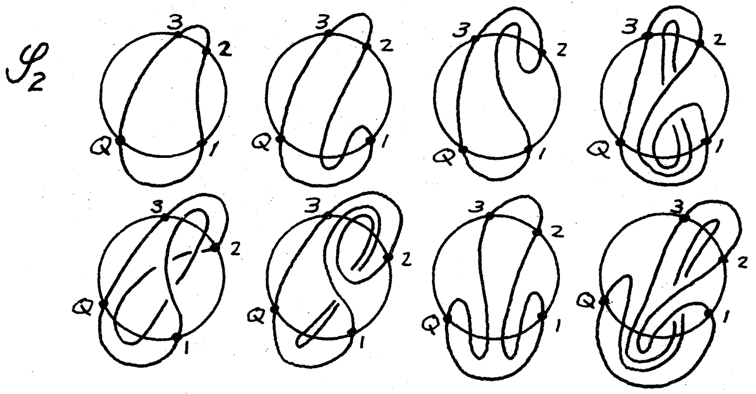
のいくつかは次の図のようなものである.




(a)

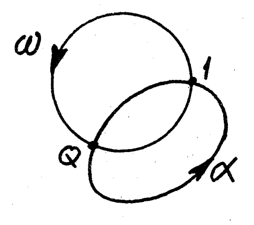


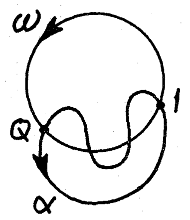

(d)

(2.5) 部分 signature から得られる 2,3 の性質

(1) 部分 signature $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ が次図の場合には T による horseshoe 領域がある.




$\mathcal{S}_1$




$\mathcal{S}_2$

(2) (1)の場合部分 signature $\mathcal{S}_n$ にあらわれる homoclinic 点

の個数を $a_n$ とすると次の漸化式を得る：

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \qquad (n \geq 3)$$

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 4$$

この解は $a_n = 2^n$ である。

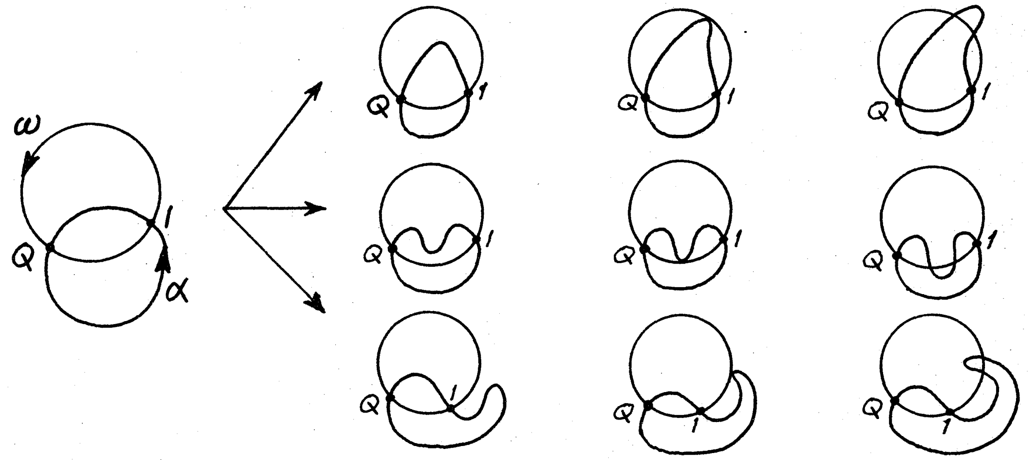
(3)　部分 signature $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \cdots = \mathcal{S}_k$ が (1) の $\mathcal{S}_1$ に等しく，$\mathcal{S}_{k+1}$ が (1) の $\mathcal{S}_2$ に等しい場合，$T^{k+1}$ による horseshoe 領域がある。また $\mathcal{S}_n$ にあらわれる homoclinic 点の個数 $a_n$ は次の漸化式を満す：

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-(k+1)} \qquad (n \geq k+2)$$

$$a_1 = \cdots = a_k = 2, \quad a_{k+1} = 4.$$

(2.6)　T の摂動による部分 signature の変化

はじめに対象とした微分方程式 (E) でパラメタ λ を変化させると解 $\varphi(t, t_0, x_0)$ が変化し，T が摂動を受けたと考えられる。したがって T の摂動による $\mathcal{S}_k$ の変化は T と同じなめらかさである。簡単な場合の一例を示すと下図となる。



$T$の摂動による$\mathcal{S}_k$のhomoclinic点の増減は一般に(critical caseを除いて)偶数個で$\mu$あるいは$\lambda$の値の隣り合ったものどうしが発生，消滅する。

3. $\ddot{x}+c_1x+c_2x^2+x^3=B\cos t$

微分方程式

$$\dot{x}=y$$
$$\dot{y}=-c_1x-c_2x^2-x^3+B\cos t$$

を考えよう。$c_1, c_2, B$をパラメタとし前節であつかったsignatureの変化の様子を調べる。この方程式はDuffing方程式と呼ばれ古くから周期解に関して多くの研究があるがそれ以外の解の定性的性質についてはあまり知られていない。数値実験，物理モデルによる実験等からは若干の事柄が報告されている。この方程式から導びかれるPoincaré map $T$は面積保存型であることから解のふるまいが多様となることは容易に想像できる。

このような具体的方程式に関しては微分方程式論でとりあげられる一般的性質は自然にそなえていてより細かい定性的性質の解析に用いられる理論はほとんど知られていない。ここでは解の解の数学的検討は今後の問題として開いたまゝにしておいて，実験（digital, analog計算機によった）結果を認める立場をとった。

その意味で存在に関しては物理的であり数学的ではない。筆者の知る限りでは2,3の例を除いて現在のところhomoclinic解を持つ具体的方程式の解析が行われているものはないからである。以下の結果は主としてanalog計算機による実験で得たものである。

(3.1)　$\ddot{x}+x^3=B\cos t$

はじめに1つの具体的方程式の例をあげる。この方程式は十分に小さなBの値で，Poincaré map Tは原点の周りのtwist mappingとなっている。原点を囲んだinvariant closed curvesにはさまれたいわゆるresonance gapsのうち非摂動系($B=0$)のtrajectoryで周期が$2\pi$の近傍に出来る摂動系($B\neq 0$)のresonance gap内には3個の不動点（1個は正不安定，2個はelliptic type）が存在する。Bを大きくするとこのgapをとりかこむclosed curvesが変形しresonance gapは大きくなり約$B=0.3$でgap内の正不安定不動点Dのω枝とα枝が顕著に交叉するようになる。この結果が図示したものである。

Fig.1を拡大してFig.2となる。Fig.2より正不安定不動点Dに出入りするω枝，α枝に関するsignatureを求めるとFig.3を得る。

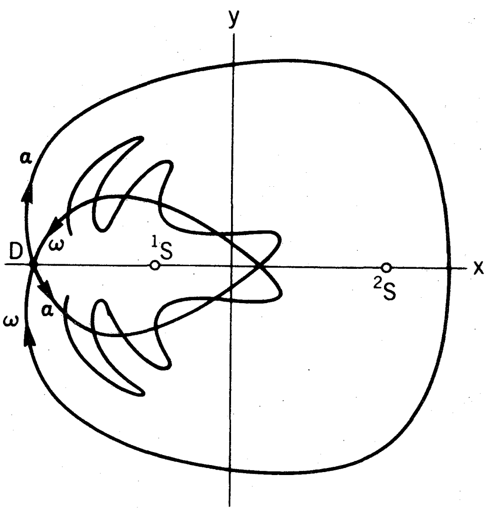



Fig. 1.　$\ddot{x}+x^3=0.3\cos t$ の不動点，不変曲線

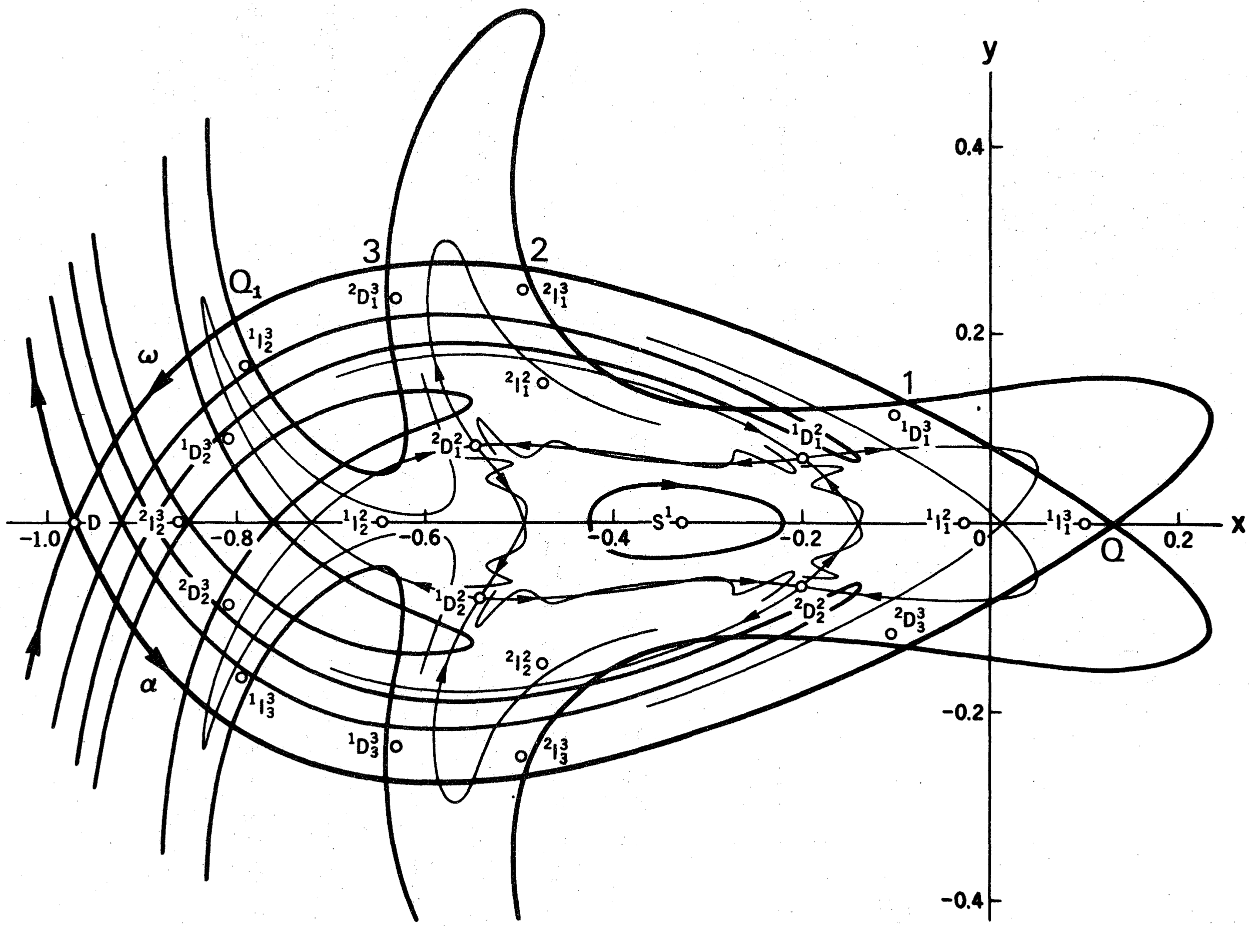
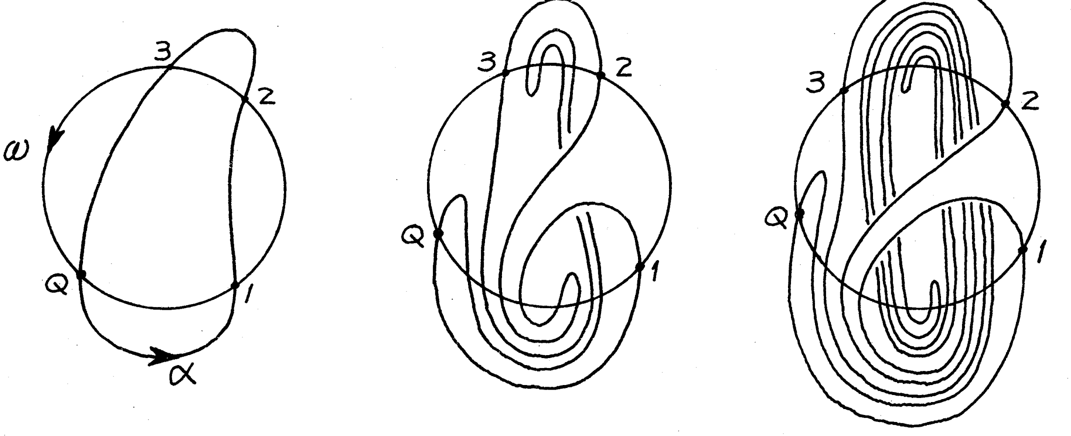



Fig. 2. Fixed and periodic points and invariant curves of the Poincaré mapping T for $\ddot{x} + x^3 = 0.3 \cos t$; D: directly unstable fixed point, $Q_1 = T(Q)$.




$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$　　　　$\mathcal{S}_3$　　　　$\mathcal{S}_4$

Fig. 3.　　Fig. 2 の点 D に出入りする不変曲線の部分 signatures.

これらの data をもとにして次の性質を得る.

(1)　ω弧 $\widehat{Q\omega D}$ および α弧 $\widehat{D\alpha Q}$ に沿った曲線を $\widehat{Q\omega D}$, $\widehat{D\alpha Q}$ によって囲まれる領域の外側に考えこの領域の近傍 U を作る. U の境界 $\partial U$ (ω弧, α弧の外側に作った曲線) に対する T の index $(\partial U, T)$ を考えると index $(\partial U, T)=0$ となる。U の内部には正不安定不動点 D ( index $(D, T)=-1$ ) を含むので U の内部に index $(P, T)=+1$ となる不動点が少なくとも 1 つ存在しなければならない, G.D. Birkhoff [2, p. 700]

(2)　$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$ および $\mathcal{S}_3$ の性質と (2.5)(3) により たとえば ω弧 $\widehat{Q\omega 1}$ の近傍で $T^3$ により horseshoe を構成する領域を見い出すことが出来る。したがってこの領域内に3周期点が存在する

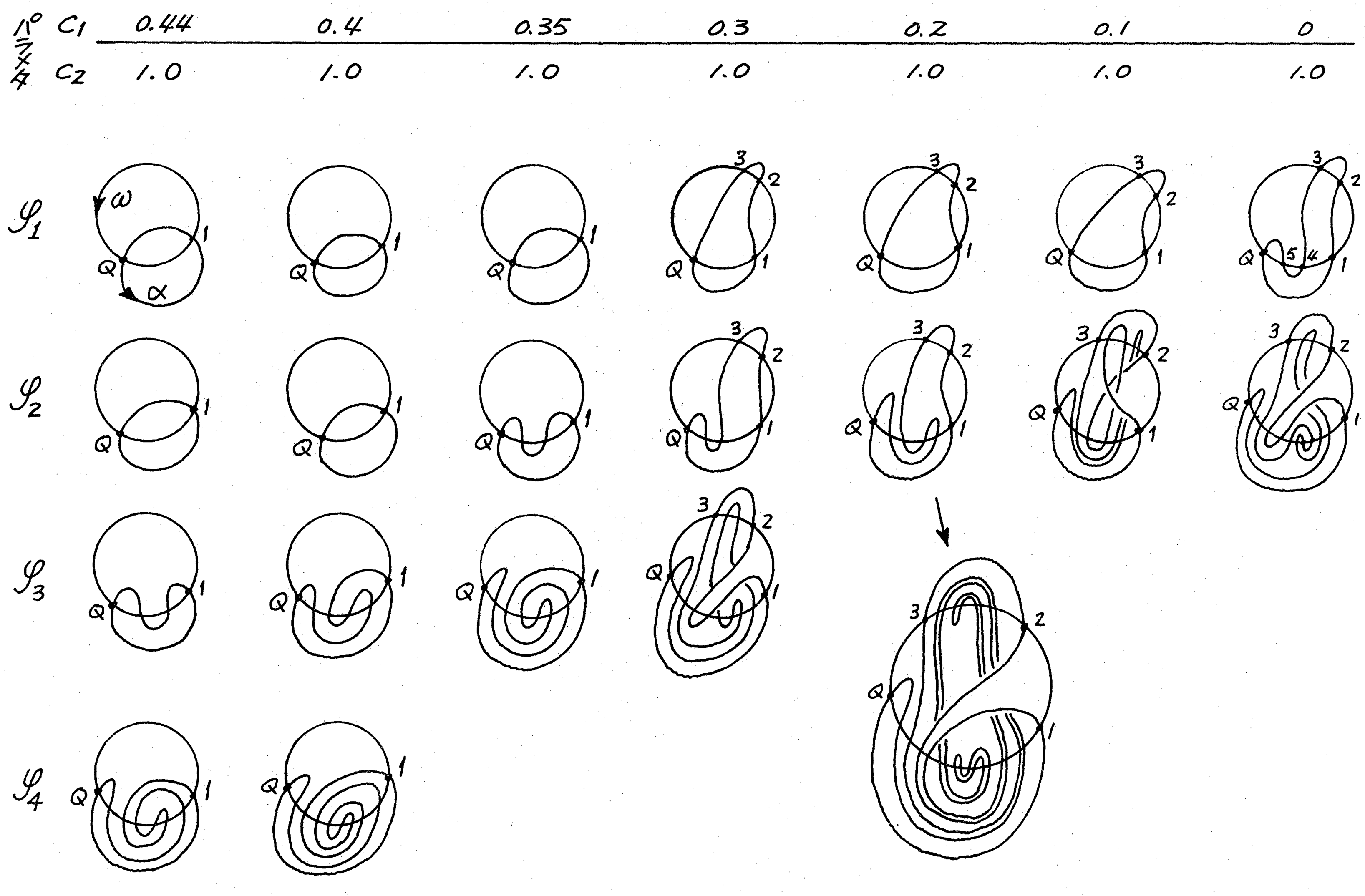



Fig. 4. $\ddot{x}+c_1x+c_2x^2+x^3=0.3\cos t$ の部分 signatures.

ことがわかる。index の計算から点 Q の近くに index $(P, T^3)=1$, 点 1 の近くに index $(P, T^3)=-1$ の 3 周期点があることがわかる。実験の結果はこれらがそれぞれ点 $'I_1^3$, 点 $'D_1^3$ であることを示している。

(3.2) $\ddot{x}+c_1x+c_2x^2+x^3=0.3\cos t$

この方程式より (3.1) と同様にして得た部分 signature のいくつかを Fig. 4 に示した。各 signature に関する検討は (3.1) と同様である。

## 4. むすび

この報告では G. D. Birkhoff の signature について簡単な紹介を行なった。この考え方は不変曲線そのものを使った点が特徴で相平面の大域的性質, Poincaré map の性質をつかむのに有効ではないかと思われる。Birkhoff は signature の説明のあと次のような結論を述べている [1, p. 657]:

Dans les hypothèses indiquées, deux systèmes dynamiques réguliers seront topologiquement équivalents quand ils admettent la même signature $\mathcal{S}$ et seulement en ce cas. Dans le cas irrégulier ils seront $\Sigma$-équivalents quand ils admettent la même signature.

signature の考え方は単に ω枝 α枝 のからまり合う様子を調べる

ものであることからすれば与えられた力学系のより大域的性質については何の結論も得られないのではないかと思われる。しかし少なくともsignatureの異なる力学系はある種の定性的性質が異なるものと考えてよいであろう。

実験した具体的系について考えてみるとパラメタ $C_1, C_2$ の値に対して部分signature $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2, \mathscr{S}_3$ あたりですでに異なるものが得られることより，十分大きい整数 $k$ に対する $\mathscr{S}_k$ は各 $C_1, C_2$ の値ですべて異なっているのではないかと想像される。このことからここでとりあげたような非常に簡単と思える系についてすらパラメタの変化により無限に多様な定性的性質が得られるようであり，力学系を構造的に分類することの困難さの一端を見ることができよう。

## 文献

[1] G.D. Birkhoff, Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques, Mem. Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei, 3-1, 1935, 85-216. (Collected Mathematical Papers Vol. 2, pp. 530-661).

[2] G.D. Birkhoff, Sur le problème restreint des trois corps, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, 2-5, 1936, 1-42. (Vol. 2, pp. 667-709).