数理解析研究所講究録
第254巻 1975年 180-188

Hamiltonian Systems II
——積分可能性と不可能性——

京大 理　丹羽敏雄

この小論の目的は、Hamilton系が求積法で解ける（積分可能）為の1つの充分条件を示し（Liouville）その場合の系のもつ著しい性質を示すことである（Arnold）。次に、"一般に"系はHamiltonian（エネルギー）以外には積分をもたないという有名なPoincaréの定理をWhittackerに従い説明する。

§1. Liouville, Arnoldの定理.

定理1（Liouville）

Hamilton系

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$H = H(q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n,t)$$

において、相異なるn個の互いにinvolutiveな第1積分

$F_i(q_1,\cdots q_n,p_1,\cdots,p_n,t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ が存在すれば、この系は求積法によって解くことができる。

ここで、F_iとF_jが互いにinvolutiveであるとは、

$\{F_i, F_j\} = 0$ (Poisson bracket) のときをいう。

<u>証明</u>　a_i $(i=1,2,\cdots,n)$ を任意定数とし、

$$F_i(q, p, t) = a_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

とおく。これを p について解いたものを

$$p_i = f_i(q, a, t)$$

とする。$F_i - a_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ は互いに involutive であるから $p_i - f_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ も互いに involutive である。*)

従って、

$$\{p_i - f_i, p_j - f_j\} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

即ち、

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j}{\partial q_i} = 0 . \qquad \cdots\cdots (1)$$

又、
$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i = \dot{f}_i$$
$$= \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$
$$= \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_i} \qquad \cdots\cdots (2)$$

ここで、$H_1 = H_1(q, a, t) = H(q, f(q, a, t), t)$。

(1), (2) は $f_1 dq_1 + \cdots + f_n dq_n - H_1 dt$ がある関数 $V(q, a, t)$ の完全微分であることを示す。

$V(q.\,a.\,t)$ の(すべての変数にわたる)全微分

$$dV = p_1 dq_1 + \cdots + p_n dq_n - H_1 dt + \sum_i \frac{\partial V}{\partial a_i} da_i$$

において $a_i = F_i(q\,p.\,t)$ を代入すれば。我々は $(q\,p.\,t)$ に関する恒等式をうる:

$$dV - \sum_i \frac{\partial V}{\partial a_i} dF_i = p_1 dq_1 + \cdots + p_n dq_n - H dt .$$

これは微分形式

$$\sum p_i dq_i - H dt$$

を変数 $(q,\,F,\,t)$ によって表わせば次の形となることを示す:

$$-\sum_i \frac{\partial V}{\partial a_i} dF_i + dV \qquad \text{------} \qquad (3)$$

Hamilton系は変分方程式

$$\delta \int \sum p_i dq_i - H dt = 0$$

に同値であることに注意すれば

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial a_i}\right) = 0$$

がでる。これは $\frac{\partial V}{\partial a_i}$ $(i=1,2,\cdots n)$ が積分であることを示している。

q.e.d.

*) u_i $(i=1,2,\cdots,n)$ を互いに involutive なものとし、

$S = \{u_1 = \cdots = u_n = 0\}$ 上で $v = w = 0$ とすれば

$\{v, w\} = 0$ on S

定理2. (Arnold)

(M, Ω, H) を Hamilton系とし, $(M = T^*N \quad \dim N = n)$

$F_1 \equiv H, F_2, \cdots, F_n \in \mathcal{C}(M)$ を次の性質をみたす第1積分とする。

(i) $\{F_i, F_j\} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$, $\dfrac{\partial(F_1, \cdots, F_n)}{\partial(p_1, \cdots, p_n)} \neq 0$

(ii) $J = J_f \equiv \{ p \in M \, ; \, F_i(p) = f_i, \, i = 1, 2, \cdots, n \}$

$$f = (f_1, f_2, \cdots, f_n) \in \mathbb{R}^n$$

とするとき, J_f 上で $dF_1, \cdots, dF_n$ は1次独立

(iii) $\left| \dfrac{\partial I}{\partial f} \right| \neq 0$ (証明中の b) で定義されるもの).

このとき. もし J_f がコンパクト, 連結ならば.

(1) $J_f \cong T^n$ i.e. n 次元トーラス T^n に同相

(2) $T^n \times D^n \; (D^n \subset R^n)$ なる形をした J_f の近傍がとれて

この近傍は, 作用-角変数 (I, φ) $(I \in D^n, \varphi \in T^n)$

で表わされ, 変換 $(I, \varphi) \longrightarrow (p, q)$ は正準変換であり, 次の性質をもつ: $F_i = F_i(I_1, I_2, \cdots, I_n)$

証明 (記号その他は今西氏の "Hamiltonian Systems I" を参照)

(a) $X_i \equiv X_{dF_i}$ i.e. $dF_i = X_i \lrcorner \Omega$ とする.

(i)より $[X_i, X_j] = 0 \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$

$L_{X_i} F_j = \{F_j, F_i\} = 0$ であるから

$$(X_i)_p \in T_p(J) \subset T_p(M) \qquad \forall p \in J$$

(ii)より　J上で　$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は1次独立

∴　もし　Jがコンパクト・連結であれば、よく知られているように、T^nに同相である。

(b)　(ii)より　J_f の近傍には、直積の構造が入る。

$$N(J_f) \cong T^n \times D^n \ni (x^1 \cdots x^n, y^1 \cdots y^n)$$

$$y^i = F_i(x^1 \cdots x^n, y^1 \cdots y^n)$$

$$I_i(f) \equiv \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i(f)} \omega$$

$$\left(\begin{array}{l} \gamma_i(f) \equiv \{(x, y) ;\ y = f,\ x^j = 0 \ \text{for}\ j \neq i \quad 0 \leq x^i \leq 2\pi\} \\ \text{トーラス}\ J_f\ \text{の基本サイクル} \end{array} \right.$$

と定義すれば、仮定(iii)から　$f_i = f_i(I_1, I_2, \cdots I_n)$　とおける。

(c)　<u>補題</u>　ω: closed 1-form on J_f　i.e.

$$\oint_{\partial\Gamma} \omega = 0 \quad (\forall \Gamma: \text{2-chain on } J_f)$$

$$\because \oint_{\partial\Gamma} \omega = \oint_{\Gamma} d\omega = \int_{\Gamma} \Omega = \Omega(Y, Z), \quad Y = \sum a_i X_i$$

$$= \sum a_i b_j \Omega(X_i, X_j) = \sum a_i b_j dF_i(X_j) \quad Z = \sum b_i X_i$$

$$= 0$$

(d) $S(I, q) \equiv \int^{q} \omega$.

(ここで $\omega = p\,dq = p(I, q)\,dq$ (∵ 仮定 (i) より)
積分は $J_f = J_{f(I)}$ 上にてとう。)

を母関数とする。局所的な正準変換 $(p, q) \longrightarrow (I, \phi)$

を考える: $p = \dfrac{\partial S}{\partial q}$, $\phi = \dfrac{\partial S}{\partial I}$

$^{\forall}I$ に対して $S(I, q)$ は多価な局所関数であるが、その微分は大域的な 1-form (on J_f) であって、従って $d\phi$ も又大域的な 1-form である。

さて

$$\oint_{\gamma_j} d\phi_i = \oint_{\gamma_j} d\left(\frac{\partial S}{\partial I_i}\right) = \frac{d}{dI_i} \oint_{\gamma_j} dS = \frac{d}{dI_i}(2\pi I_j) = 2\pi \delta_{ij}$$

∴ ϕ_i はトーラス J_f 上の角変数である。

q.e.d.

§2. 積分不可能性, Poincaré の定理.

$M = T^*N$, $N = T^n$ とし、

$H(p, q) = H_0(p) + \mu H_1(p, q) + \cdots$ を (p, q, μ) に関して解析的な関数とし、

$$A: p \longmapsto \frac{\partial H_0}{\partial p} \equiv \omega(p) : B^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \text{diffeo} \quad \left(\text{i.e.} \left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p^2}\right| \neq 0\right)$$

$$H_1(p, q) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} B_m(p)\, e^{i(m, q)}$$

とする。

$[m] \in \mathbb{Z}^2/\sim \quad (m \sim m' \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R},\ m_1 = k m_1',\ m_2 = k m_2')$

$$S_{[m]} \equiv \{ p \in B^2 ;\ \langle \omega(p), m \rangle = 0 \ ,\ m \in [m] \}$$

$$T_{[m]} \equiv \{ p \in B^2 ;\ B_{m'}(p) \neq 0 ,\ \exists\, m' \in [m] \}$$

とおく。$\bigcup S_{[m]}$ の点 p を secular points と呼ぶ.

<u>定理</u>(Poincaré) 上の仮定の下に.

$$\bigcup_{[m] \in \mathbb{Z}^2/\sim} (S_{[m]} \cap T_{[m]}) \equiv S \quad : \text{ dense in } B^2$$

とすれば, (p, q, μ) に関して1価解析的な (M, H) の第1積分 $\Phi = \Phi(p, q, \mu)$ は H の関数である。

<u>証明</u>

(a) $\Phi = \Phi_0(p, q) + \mu \Phi_1(p, q) + \cdots$

$$\Phi_0 \equiv \sum_m A_m(p)\, e^{i(m, q)}$$

$$\Phi_1 \equiv \sum C_m(p)\, e^{i(m, q)} \qquad \text{とおく.}$$

$\{ H, \Phi \} = 0$ より μ に関して展開して.

$$\{ H_0, \Phi_0 \} = 0 , \quad \{ H_1, \Phi_0 \} + \{ H_0, \Phi_1 \} = 0$$

(b) $\Phi_0 = \Phi_0(p)$ i.e. Φ_0 は p のみに依存する:

$\{ H_0, \Phi_0 \} = 0$ より $\quad A_m(p) \langle m, \omega(p) \rangle = 0 \quad (\forall m)$

$\therefore$ $\exists m \neq 0$, $\exists p_0$ $A_m(p_0) \neq 0$ とすれば p_0 の近傍で $\langle m, \omega(p) \rangle = 0$

これは $A : p \longmapsto \omega(p)$: diffeo に矛盾.

(c) $\Phi_0 = \psi(H_0)$ i.e. Φ_0 は H_0 の関数である：

$\{H_1, \Phi_0\} + \{H_0, \Phi_1\} = 0$ と (b) により

$$B_m(p)\cdot\left(m, \frac{\partial}{\partial p}\right)\Phi_0 = C_m(p)\left(m, \frac{\partial}{\partial p}\right)H_0 \qquad (\forall m)$$

$p \in S_{[m]} \cap T_{[m]} \subset S'$ とする。

i.e. $\langle \omega(p), m \rangle = \left(m, \frac{\partial}{\partial p}\right)H_0 = 0$ かつ $B_{m'}(p) \neq 0$ $\exists m' \in [m]$

$\therefore \left(m', \frac{\partial}{\partial p}\right)\Phi_0 = 0$

$\therefore$ S' 上で $d\Phi_0 = k\, dH_0$ or $\dfrac{\partial(H_0, \Phi_0)}{\partial(p_1, p_2)} = 0$ (on S')

この Jacobian は連続で S' は B^2 で dense であるから

$$\frac{\partial(H_0, \Phi_0)}{\partial(p_1, p_2)} \equiv 0 \quad \text{on } B^2$$

(d) $\Phi - \psi(H)$ は (p, q, μ) に関して1価解析的な (M, H) の第1積分であり

$\Phi - \psi(H) = \mu \Phi'$ ($\because$ $\mu = 0$ とすれば 左辺 $= \Phi_0 - \psi(H_0) = 0$)

とおける。

$\Phi' = \Phi_0' + \mu \Phi_1' + \cdots$ に関して上の議論をくりかえせば

$\Phi = \tilde{\psi}(H)$ をうる。

q.e.d.

P

参考文献

[1] V. I. Arnold, A. Avez ; Problèmes ergodiques de la mécanique classique ; Gauthier-Villars, Paris (1967)
(和訳) 古典力学のエルゴード問題

[2] L. Landau, E Lifshitz ; 力学 (東京図書)

[3] H. Poincaré : Méthode nouvelle de la mécanique celeste.
I. II. III. (IIIの和訳有り)

[4] E. Whittacker : Analytical dynamics ; Cambridge (1927)

[5] 丹羽・大槻・宮原 : 古典力学のエルゴード問題
Seminar on Probability Vol 30 (1969)