数理解析研究所講究録
第255巻 1975年 1-12

非線形発展方程式の一解法

立命大 理工　広田 良吾

非線形発展方程式の解法は近年驚くべき進歩をとげた。逆散乱法、Bäcklund変換法、"方程式の変換法"の三方法が有力な方法として現在知られている。こゝでは筆者によって発見された"方程式の変換法"の入門として、この方法の背景になっている考え方を、modified Korteweg de Vries (M. K-dV) 方程式の解法を例にして詳しく解説する。

M. K-dV 方程式

$$v_t + \alpha (v^3)_x + v_{xxx} = 0 \tag{1}$$

(こゝでαは正の定数とする)の解を普通の摂動計算で求める。そのために解vを小さなパラメータϵで展開する。

$$v = \epsilon v_1 + \epsilon^3 v_3 + \epsilon^5 v_5 + \cdots \tag{2}$$

(2)を(1)に代入して、ϵの同じorderの項で整理すると、

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \qquad \text{とおくと,} \tag{3}$$

$$\mathcal{L} v_1 = 0, \tag{4}$$

$$\mathcal{L} v_3 = -\alpha (v_1^3)_x, \tag{5}$$

$$\mathcal{L} v_5 = -3\alpha (v_1^2 v_2)_x, \tag{6}$$

$$\vdots$$

が得られる。(4)は線形方程式であるので、この式の解v_1は容易に求められる。それを(5)の右辺に代入してv_3を求め、v_3を(6)の右辺に代入してv_5を求め、・・・・とやると、M.K-dV方程式の解が形式的に求まるわけだが、・・・。具体的に(4)の解として

$$v_1 = a_1 (e^{i\eta} + e^{-i\eta}) \tag{7}$$

$$\eta = kx - \omega t, \quad \omega = -k^3 \tag{8}$$

を選び(5)の右辺に代入すると、

$$\mathcal{L} v_3 = 3ika_1^3 (e^{3i\eta} - e^{-3i\eta} + \underline{e^{i\eta} - e^{-i\eta}}) \tag{9}$$

となり、演算子$\mathcal{L}$の解である$3ika_1^3(e^{i\eta} - e^{-i\eta})$の項(永年項)が右辺に現われるため、この摂動計算の収束は非常に悪くなる。

次に永年項が現われないように、(4)の解として

$$v_1 = e^{\eta_1} \tag{10}$$

$$\eta_1 = P_1 x - \Omega_1 t + Const., \qquad \Omega_1 = P_1^3 \tag{11}$$

を選ぶ。(5) の右辺に代入すると、

$$\mathcal{L} v_3 = -\alpha 3 P_1 e^{3\eta_1} \tag{12}$$

となり

$$v_3 = \alpha \frac{3P_1}{3\Omega_1 - (3P_1)^3} e^{3\eta_1} \tag{13}$$

が得られる。同じように (6) から

$$v_5 = 3\alpha^2 \left(\frac{5P_1}{5\Omega_1 - (5P_1)^3}\right)\left(\frac{3P_1}{3\Omega_1 - (3P_1)^3}\right) e^{5\eta_1} \tag{14}$$

が得られる。このようにしてM. K-dV方程式の形式的な解は求まるが、この摂動解もまた収束の困難を含んでいる。η_1 の Real Part が大きい領域では発散級数になっていて、この級数から v の物理的意味を引き出す事は困難である。しかし近年物理学の他の分野において、発散級数の処理技術が進歩し、高次の巾を適当に繰り込んで、発散級数から物理的に意味のある結論を引き出す事に成功している例が多い。最も典型的な例は Páde 近似である。関数 $f(x)$ に対する $[n/m](x)$ Páde 近似は分子が n、分母が m 次の多項式の比で与えられる。

Páde近似は、近似的な解析接続と考えられる。例えば級数

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (15)$$

は$|x|$が1より大きい時には発散級数であるので、(15)の右辺より、$x=2$とおいて、$f(2)>0$と結論するのは誤りであるが、$f(x)$のPáde近似（この場合$f(x)$の厳密な表現になるので）

$$[0/1](x) = \frac{1}{1-x} \qquad (16)$$

は、xが2でも意味があり、有限の値を与える。

以上の事を念頭において M. K-dV 方程式の摂動解の和を考えてみる。(13), (14) から

$$v_1 = e^{\eta_1} \qquad (17)$$

$$v_3 = -(\alpha/8p_1^2)\, e^{3\eta_1} \qquad (18)$$

$$v_5 = (\alpha/8p_1^2)^2\, e^{5\eta_1} \qquad (19)$$

$$v_7 = -(\alpha/8p_1^2)^3\, e^{7\eta_1} \qquad (20)$$

$$\cdots$$

となり、

$$v = \epsilon v_1 + \epsilon^3 v_3 + \epsilon^5 v_5 + \cdots$$

$$= \frac{\epsilon e^{\eta_1}}{1+\epsilon^2(\alpha/8p_1^2)e^{2\eta_1}} \tag{21}$$

と見当がつけられる。 (21)をM.K-dVの式に代入すると、これが厳密解である事が容易に分り、書き直すと

$$v=(2/\alpha)^{\frac{1}{2}}p_1 \operatorname{sech}(\eta_1+\mathrm{const}) \tag{22}$$

となり、ηが実数のとき有名な1ソリトン解に等しい事が分る。

以上の議論は1ソリトン解が摂動計算によっても求められる事を示しているが、この方法で2ソリトン解を求めるためには(17)の代りに

$$v_1=e^{\eta_1}+e^{\eta_2} \tag{23}$$

とおいてv_3, v_5, v_7; を求めればよいわけだが、最終的な結果を得る迄には、相当な量を計算する必要がある。 そこで、「vをϵの巾に展開して、摂動計算で各項を求め、それを(21)のように分数の形にまとめ直す」代りに、初めから

$$v=\frac{G}{F} \tag{24}$$

とおいて、この形を M.KdV 方程式に代入して、G と F に対する方程式を作り、その式に対して摂動計算を行う事が考えられる。

以下少し天下り的だが、次の演算子 D_x^n, D_t^m を考えると、これが分数 G/F の微分に対する都合のよい演算子であることが判明する。

$$D_x^n a(x)\cdot b(x) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^n a(x)\, b(x')\Big|_{x=x'} \tag{25}$$

$$D_t^m a(t)\cdot b(t) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)^m a(t)\, b(t')\Big|_{t=t'}$$

一般的に

$$e^{\delta D_x} a(x)\cdot b(x) \equiv e^{\delta\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)} a(x)\, b(x')\Big|_{x=x'}$$

$$= a(x+\delta)\, b(x-\delta)。 \tag{26}$$

この D 演算子を使うと次の公式が得られる

$$e^{\delta\frac{\partial}{\partial x}}\left(b(x)/a(x)\right) = \frac{b(x+\delta)}{a(x+\delta)} = \frac{b(x+\delta)\,a(x-\delta)}{a(x+\delta)\,a(x-\delta)}$$

$$= \frac{e^{\delta D_x} b(x)\cdot a(x)}{\cosh \delta D_x\, a(x)\cdot a(x)} \tag{27}$$

この式をδの中に展開して

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{b}{a}=\frac{D_x b\cdot a}{a^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{b}{a}=\frac{D_x^2 b\cdot a}{a^2}-\frac{b}{a}\frac{D_x^2 a\cdot a}{a^2}, \qquad (28)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\frac{b}{a}=\frac{D_x^3 b\cdot a}{a^2}-3\frac{D_x b\cdot a}{a^2}\frac{D_x^2 a\cdot a}{a^2},$$

$$\cdots\cdots$$

を得る。したがって、$v=G/F$ を M.K-dV 方程式に代入すると

$$\frac{D_t G\cdot F}{F^2}+3\alpha\frac{G^2}{F^2}\frac{D_x G\cdot F}{F^2}+\frac{D_x^3 G\cdot F}{F^2}-3\frac{D_x G\cdot F}{F^2}\frac{D_x^2 F\cdot F}{F^2}=0 \qquad (29)$$

となる。この式を並び変えると，λ を x,t の任意関数として

$$(D_t+3\lambda D_x+D_x^3)G\cdot F+3(D_x G\cdot F)(\alpha G^2-D_x^2 F\cdot F-\lambda F^2)/F^2=0$$

(30)

と書けるので、次の形の二次形式の微分方程式が M. K-dV 方程式の変換された式となる.

$$\left\{\begin{array}{ll}(D_t+3\lambda D_x+D_x^3)G\cdot F=0 & (31)\\ (D_x^2+\lambda)F\cdot F=\alpha G^2. & (32)\end{array}\right.$$

以下の議論では簡単のため $\lambda=0$（ソリトン解）の場合だけを考える。

(31), (32) を摂動計算で解くために，ϵ を小さなパラメータとして F と G を展開する

$$F = 1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^4 f_4 + \cdots , \tag{33}$$

$$G = \epsilon g_1 + \epsilon^3 g_3 + \cdots . \tag{34}$$

ϵ の巾で整理すると

$$(D_t + D_x^3) g_1 \cdot 1 = 0 , \tag{35}$$

$$D_x^2 (f_2 \cdot 1 + 1 \cdot f_2) = \alpha g_1^2 , \tag{36}$$

$$(D_t + D_x^3)(g_3 \cdot 1 + g_1 \cdot f_2) = 0 , \tag{37}$$

$$\cdots\cdots$$

となる。(35) の解として

$$g_1 = e^{\eta_1} , \qquad \eta_1 = p_1 x - \Omega_1 t , \quad \Omega_1 = p_1^3 , \tag{38}$$

とおくと，(36) から

$$f_2 = \frac{\alpha}{2(2p_1)^2} e^{2\eta_1} , \tag{39}$$

が得られ、(37) から $g_3=0$ となり、前に求めたように

$$F=1+\epsilon^2\frac{\alpha}{2(2p_1)^2}e^{2\eta_1}, \tag{40}$$

$$G=\epsilon e^{\eta_1}, \tag{41}$$

となり、

$$v=\frac{\epsilon e^{\eta_1}}{1+\epsilon^2\frac{\alpha}{2(2p_1)^2}e^{2\eta_1}} \tag{42}$$

は、1ソリトン解を与える。

次に、

$$g_1=e^{\eta_1}+e^{\eta_2}, \quad \eta_i=p_i x-\Omega_i t, \quad \Omega_i=p_i^3 \tag{43}$$

とおくと、摂動計算により

$$F=1+\epsilon^2[b(2,0)e^{2\eta_1}+b(1,1)e^{\eta_1+\eta_2}+b(0,2)e^{2\eta_2}] \tag{44}$$
$$+\epsilon^4 b(2,2)e^{2\eta_1+2\eta_2},$$

$$G=\epsilon(e^{\eta_1}+e^{\eta_2})+\epsilon^3[b(2,1)e^{2\eta_1+\eta_2}+b(1,2)e^{\eta_1+2\eta_2}], \tag{45}$$

こゝで

$$b(2,0)=\alpha/2(2p_1)^2,\quad b(0,2)=\alpha/2(2p_2)^2,\quad b(1,1)=\alpha/(p_1+p_2)^2,$$

$$b(2,1)=b(2,0)(p_1-p_2)^2/(p_1+p_2)^2,\quad b(1,2)=b(0,2)(p_1-p_2)^2/(p_1+p_2)^2,$$

$$b(2,2)=b(2,0)\,b(0,2)(p_1-p_2)^4/(p_1+p_2)^4, \tag{46}$$

となり，2ソリトン解が求まる。

Nソリトン解を求めるためには，上述の方法は少し見通しが悪いので，(31),(32) を簡単にする事を考える。$\lambda=0$ のときには

$$G=(8/\alpha)^{\frac{1}{2}}(D_x g\cdot f),\quad F=f^2+g^2 \tag{47}$$

とおくと，もし f と g が次の式

$$\left\{\begin{array}{ll}(D_t+D_x^3)g\cdot f=0 & (48)\\ D_x^2(f\cdot f+g\cdot g)=0 & (49)\end{array}\right.$$

をみたせば，(47) で定義された F と G は (31),(32) を満たすことが証明出来る。

(47) 式 は

$$v = (8/\alpha)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \tan^{-1}(g/f)$$

$$= (8/\alpha)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{Im} \frac{\partial}{\partial x} \log(f + ig) \qquad (50)$$

（Im は Imaginary Part）なる変換を意味している。(48)(49)を解いて N ソリトン解

$$f + ig = \sum_{\mu=0,1} e^{\sum_{i<j}^{(N)} A_{ij}\mu_i\mu_j + \sum_{i=1}^{N}\mu_i(\eta_i + i\pi/2)} \qquad (51)$$

が得られる。こゝで

$$\exp(A_{ij}) = \left(\frac{p_i - p_j}{p_i + p_j}\right)^2, \qquad (52)$$

$$\eta_i = p_i x - \Omega_i t, \quad \Omega_i = p_i^{\,3}, \quad \text{そして} \qquad (53)$$

$\sum_{\mu=0,1}$ は $\mu_1 = 0,1, \cdots, \mu_N = 0,1$ のすべての組合せについての和を意味する。

以上 M.K-dV 方程式について“方程式の変換法”を詳しくのべたが、この方法は他の非線形波動方程式についても適用可能であり、Nソリトン解を求める手続きその他は M.K-dV 方程式の場合と全く同じである。詳しくは R.Hirota “Direct Method of Finding Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equations” to appear in Proc. of Workshop on Contact Transformations, Edited by R. M. Miura, Vanderbilt University. Nashville, 1974.

参考文献としては.

(1) R. Hirota, J. Phys. Soc. Japan 33 (1972), 1456-1458.

(2) R. Hirota, J. Mathematical Phys. 14 (1973), 805-809.

(3) R. Hirota, Progr. Theor. Phys. 52 (1974), 1498-1512.