数理解析研究所講究録
第 255 巻 1975 年 13-22

二次元KdV方程式のN-ソリトン解

京大 工　　薩摩 順吉

§1. まえがき

二次元KdV方程式,

$$u_{xt}+12(uu_x)_x+u_{xxxx}\pm 12u_{yy}=0 \tag{1}$$

のN-ソリトン解を広田の方法[1]を用いて求める。(1)式の二次元効果を示す項の±符号は媒質がそれぞれ negative 及び positive dispersion であることに対応している。(1)式は一次元ソリトンの横方向の摂動に対する安定性を論ずるために Kadomtsev 及び Petviashvili[2] そして及川・薩摩・矢島[3]によって導入されたものである。ここでは二次元的な影響はソリトンの伝播方向を変化させると考え，伝播方向の異なったN個のソリトンの衝突を記述する厳密解を求める。

最近，(1)式に対する逆散乱法が Dryuma[4] によって提起され，また Bäcklund変換が Chen[5] によって見出された。更に，Zakharov と Shabat[6] が(1)式に対し逆散乱法を適用し，ここで

求めようとするものと本質的に同じN-ソリトン解を得ている。広田の方法は逆散乱法とくらべかなり融通性を持っており，いろんな型の非線形波動現象に適用可能であると考えられるので，この方法でN-ソリトン解を示すことは有益であると思われる。

§2. 1-ソリトン解

(1)式に対して

$$u = (\log f)_{xx} \tag{2}$$

なる変換を施せば，fに関する双一次形式

$$ff_{xt} - f_x f_t + ff_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{xx}^2 \pm 12(f_{yy}f - f_y^2) = 0 \tag{3}$$

が得られる。但し，(1)式の解として $|x| \to \infty$ で $|u| \to 0$ となるものだけに着目している。広田氏によって導入された演算子[7]

$$D_r^m a(r)\cdot b(r) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r'}\right)^m a(r)\cdot b(r')\Big|_{r=r'} \tag{4}$$

$$(\ r = x, y, t\ ,\ m : \text{indeger}\ )$$

を使えば，(2)式は

$$(D_x D_t + D_x^4 \pm 12 D_y^2)\, f(x,y,t)\cdot f(x',y',t') = 0 \tag{2$'$}$$

と書き直すことができる。

(3)式の特殊解として

$$f = \cosh(kx + k_y y - \omega t) \tag{5}$$

が存在することは容易に確かめられる。ここで k, k_y は実定数であり，ω は

$$-k\omega + 4k^4 \pm 12k_y^2 = 0 \tag{6}$$

を満足している。(5)式を(2)式に代入すれば，

$$u = k^2 \operatorname{sech}^2(kx + k_y y - \omega t) \tag{7}$$

となるが，これは x 軸と $\tan^{-1}(k_y/k)$ の角をなして $\omega/\sqrt{k^2+k_y^2}$ の速度で伝播しているソリトンを表わしている。元来，(1)式は二次元効果が小さいという近似の下に成立しているので，伝播方向が x 軸となす角は十分小さいと考えなければならないが数学的観点からはそのような制限は存在しない。

§3　N-ソリトン解

N-ソリトン解は

$$f = \frac{1}{2}\sum_{\epsilon=\pm1} \cosh\left(\sum_{i=1}^{N} \epsilon_i \xi_i\right) \prod_{i<j}^{(N)} \left\{(\epsilon_i k_i - \epsilon_j k_j)^2 \mp (p_i - p_j)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

で与えられる。但し

$$\xi_i = k_i x + k_{y_i} y - \omega_i t \tag{9}$$

$$-k_i \omega_i + 4k_i^4 \pm 12k_{y_i}^2 = 0 \tag{10}$$

$$p_i = k_{y_i}/k_i \qquad \text{for } i = 1, 2, \cdots, N \tag{11}$$

であり，$\sum_{\epsilon=\pm1}$ は $\epsilon_1 = \pm1$, $\epsilon_2 = \pm1$, $\cdots$, $\epsilon_N = \pm1$ のすべての可能な組合せについての和をとることを意味している。また $\prod_{i<j}^{(N)}$ は $i<j$ を満足する N 個の要素のすべての可能な組合せについて

の積をとることを意味している。(8)式は一次元KdV方程式の場合に広田氏が求めたN-ソリトン解[1]と本質的に同じ形をしている。(1)式において $y\to t$, $t\to x$ とすれば，Boussinesq方程式

$$12u_{tt}+u_{xx}+12(uu_x)_x+u_{xxxx}=0 \tag{12}$$

が得られる。従って(8)式は適当な変数変換を施すことによってBoussinesq方程式のN-ソリトン解[8]に帰着させることができる。

N-ソリトン解，(8)式，が(3)式を満足していることを証明しよう。(8)式は

$$f=\sum_{\epsilon=\pm1}\exp\left(\sum_{i=1}^{N}\epsilon_i\xi_i+\sum_{i<j}^{(N)}\Phi_{ij}\right) \tag{13}$$

と書きかえられる。但し，

$$\Phi_{ij}=\frac{1}{2}\log\left|(\epsilon_ik_i-\epsilon_jk_j)^2\mp(P_i-P_j)^2\right| \tag{14}$$

であり，$\sum_{i<j}^{(N)}$ は $i<j$ を満足するN個の要素のすべての可能な組合せについての和をとることを意味している。(13)式を(3)式に代入し，(9)式を使えば

$$\begin{aligned}&\sum_{\epsilon=\pm1}\sum_{\epsilon'=\pm1}\exp\left[\sum_{i=1}^{N}(\epsilon_i+\epsilon_i')\xi_i+\sum_{i<j}^{(N)}(\Phi_{ij}+\Phi_{ij}')\right]\\&\times\Bigl[-\Bigl(\sum_{i=1}^{N}\epsilon_i\omega_i\Bigr)\Bigl(\sum_{i=1}^{N}\epsilon_ik_i\Bigr)+\Bigl(\sum_{i=1}^{N}\epsilon_i\omega_i\Bigr)\Bigl(\sum_{i=1}^{N}\epsilon_i'k_i\Bigr)+\Bigl(\sum_{i=1}^{N}\epsilon_ik_i\Bigr)^4\\&\quad-4\Bigl(\sum_{i=1}^{N}\epsilon_ik_i\Bigr)^3\Bigl(\sum_{i=1}^{N}\epsilon_i'k_i\Bigr)+3\Bigl(\sum_{i=1}^{N}\epsilon_ik_i\Bigr)^2\Bigl(\sum_{i=1}^{N}\epsilon_i'k_i\Bigr)^2\\&\quad\pm12\Bigl(\sum_{i=1}^{N}\epsilon_ik_{yi}\Bigr)^2\mp12\Bigl(\sum_{i=1}^{N}\epsilon_ik_{yi}\Bigr)\Bigl(\sum_{i=1}^{N}\epsilon_i'k_{yi}\Bigr)\Bigr]=0\end{aligned} \tag{15}$$

となる。但し Φ_{ij}' は(14)式において ϵ_i, ϵ_j を ϵ_i', ϵ_j' としたもの

である。(10)式と(11)式を用い，$2\eta_i = \epsilon_i - \epsilon_i'$ ($i=1,2,\cdots,N$) なる記号を導入すれば，(15)式は

$$\sum_{\epsilon=\pm1}\sum_{\epsilon'=\pm1} \exp\left[\sum_{i=1}^{N}(\epsilon_i+\epsilon_i')\xi_i + \sum_{i<j}^{(N)}(\Phi_{ij}+\Phi_{ij}')\right]$$
$$\times\left[2\left(\sum_{i=1}^{N}\eta_i k_i\right)^4 - 2\left(\sum_{i=1}^{N}\eta_i k_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\eta_i^3 k_i^3\right) - 3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\eta_i\eta_j k_i k_j (p_i-p_j)^2\right] = 0 \qquad (16)$$

となる。(16)式の ξ_i の係数は一般性を失なうことなく次の三つの組に分けることができる。

$$\begin{aligned} &\epsilon_i+\epsilon_i' = 0 &&\text{for } i=1,2,\cdots,m \\ &\epsilon_i=\epsilon_i' = 1 &&\text{for } i=m+1,m+2,\cdots,n \\ &\epsilon_i=\epsilon_i' = -1 &&\text{for } i=n+1,n+2,\cdots,N \end{aligned} \qquad (17)$$

上の条件を使えば，(16)式の $\exp\left(2\sum_{i=m+1}^{n}\xi_i - 2\sum_{i=n+1}^{N}\xi_i\right)$ の係数は，

$$\frac{1}{4}\prod_{m+1\le i<j\le N}\left[(\epsilon_i k_i-\epsilon_j k_j)^2-(p_i-p_j)^2\right]\prod_{\substack{1\le i\le m\\ m+1\le j\le N}}\left[\{(k_i+k_j)^2-(p_i-p_j)^2\}\{(k_i-k_j)^2-(p_i-p_j)^2\}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\sum_{\eta=\pm1}\left[\left\{2\left(\sum_{i=1}^{m}\eta_i k_i\right)^4-2\left(\sum_{i=1}^{m}\eta_i k_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\eta_i^3 k_i^3\right)-3\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\eta_i\eta_j k_i k_j(p_i-p_j)^2\right\}\right.$$
$$\left.\times\prod_{i<j}^{(m)}\left\{(\eta_i k_i-\eta_j k_j)^2-(p_i-p_j)^2\right\}\right]$$

となる。但し，$\prod_{m+1\le i<j\le N}$ と $\prod_{\substack{1\le i\le m\\ m+1\le j\le N}}$ は積記号の下に書かれた条件を満す要素のすべての可能な組合せについての積をとることを意味している。他のすべての係数について考えると，結局次式が成立すれば(16)式が成り立ち，(8)式が(3)式の解となる。

$$G(\eta_1 k_1,\eta_2 k_2,\cdots,\eta_n k_n\,;\,p_1,p_2,\cdots,p_n)$$
$$\equiv\sum_{\eta=\pm1}\left[\left\{2\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i k_i\right)^4-2\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i k_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i^3 k_i^3\right)-3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\eta_i\eta_j k_i k_j(p_i-p_j)^2\right\}\right.$$

$$\times \prod_{i<j}^{(n)} \{(\eta_i k_i - \eta_j k_j)^2 - (p_i - p_j)^2\} \Big] = 0 \tag{18}$$

$$\text{for} \quad 1 \le n \le N$$

関数 G は以下の性質を持っている。

[A] $$G(\eta_1 k_1, \eta_2 k_2, \cdots, \eta_n k_n; p_1, p_2, \cdots, p_n)\big|_{k_1=0} \tag{19}$$
$$= \prod_{i=2}^{n} \{k_i^2 - (p_1 - p_i)^2\}\ G(\eta_2 k_2, \eta_3 k_3, \cdots, \eta_n k_n; p_2, p_3, \cdots p_n)$$

[B] $$G(\eta_1 k_1, \eta_2 k_2, \cdots, \eta_n k_n; p_1, p_2, \cdots, p_n)\big|_{k_1 = \pm k_2 \text{ and } p_1 = p_2} \tag{20}$$
$$= 8 k_1^2 \prod_{i=3}^{n} \{(k_1 - k_i)^2 - (p_1 - p_i)^2\}\{(k_1 + k_i)^2 - (p_1 - p_i)^2\}\ G(\eta_3 k_3, \eta_4 k_4, \cdots, \eta_n k_n; p_3, p_4, \cdots p_n)$$

[C] 任意の i, j に対して，k_i, p_i を k_j, p_j でおきかえても不変に保たれる。

[D] $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 及び $p_1, p_2, \cdots, p_n$ について斉次関数である。

[E] $k_1, k_2, \cdots, k_n$ について偶関数である。

上記の性質を使って(18)式を数学的帰納法で証明しよう。$n=1, 2$ のときは容易に証明できる。今 $n-1$ 及び $n-2$ に対して成り立つと仮定すれば，性質[A],[C],[E] より G は $\prod_{i=1}^{n} k_i^2$ で因数分解されることになる。また性質[B],[D] は G が

$$G = (k_1 - k_2)\{(k_1 + k_2) g_1 + (p_1 - p_2) g_2\} + (p_1 - p_2)\{(k_1 + k_2) g_3 + (p_1 - p_2) g_4\} \tag{21}$$

という形で書かれることを意味している。ここで $g_1, \cdots, g_4$ は $k_1, \cdots, k_n$ と $p_1, \cdots, p_n$ についての斉次多項式である。さらに[C] に注意すれば

$$G = \prod_{i<j}^{(n)} (k_i^2 - k_j^2)\, G_1 + (p_1 - p_2)(k_1 - k_2) \prod_{i<j}^{(n)\prime} (k_i^2 - k_j^2)\, G_2 + \cdots + \prod_{i<j}^{(n)} (p_i - p_j)^2 G_L \tag{22}$$

と書き表わされるが，ここでやはり $G_1, G_2, \cdots, G_L$ は $k_1, \cdots, k_n$ と $p_1, \cdots, p_n$ についての斉次多項式である。また積記号に付けられたダッシュは $i=1$，$j=2$ の場合を除くことを意味している。(22)式の各項は $k_1, \cdots, k_n$，$p_1, \cdots, p_n$ について少なくとも $n(n-1)$ 次の次数をもっている。結局もし G が恒等的に 0 でないとすれば，G は $k_1, \cdots, k_n$，$p_1, \cdots, p_n$ に関して少なくとも $n(n-1)+2n$ 次の関数でなければならないことになる。一方(18)式は G が高々 $n(n-1)+4$ 次の関数であることを示している。$n \geqq 3$ のとき両者は明らかに矛盾をきたす故，G はすべての n に対して 0 でなければならない。よって(18)式が示され，(8)式が(3)式を満足することが証明された。

§4　ソリトンへの分裂

N-ソリトン解が N 個のソリトンに分裂していく様子を調べよう。(13)式を(2)式に代入すれば，

$$u = \frac{\sum_{\epsilon=\pm1}\sum_{\epsilon'=\pm1}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\epsilon_i-\epsilon_i')(\epsilon_j-\epsilon_j')k_ik_j\exp\left\{\sum_{i=1}^{N}(\epsilon_i+\epsilon_i')\xi_i+\sum_{i<j}^{(N)}(\Phi_{ij}+\Phi_{ij}')\right\}\right]}{2\sum_{\epsilon=\pm1}\sum_{\epsilon'=\pm1}\exp\left\{\sum_{i=1}^{N}(\epsilon_i+\epsilon_i')\xi_i+\sum_{i<j}^{(N)}(\Phi_{ij}+\Phi_{ij}')\right\}} \tag{23}$$

が得られる。一般性を失なうことなく，$t \to \infty$ の極限で

$$\begin{aligned}&\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1} = \infty, \\ &\xi_n = \text{finite} \\ &\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots, \xi_N = -\infty\end{aligned} \tag{24}$$

となるとする。(24)式の分母分子に $\exp\left(2\sum_{i=n+1}^{N}\xi_i-2\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\right)$ をかけ，$t\to\infty$ の極限をとると

$$u|_{t=+\infty}=k_n^2\ \mathrm{sech}^2(\xi_n-\delta_n^+) \tag{25}$$

が得られる。ここで

$$\delta_n^+=\frac{1}{4}\sum_{i=n+1}^{N}\log\left|\frac{(k_n-k_i)^2\mp(P_n-P_i)^2}{(k_n+k_i)^2\mp(P_n-P_i)^2}\right|-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-1}\log\left|\frac{(k_n-k_i)^2\mp(P_n-P_i)^2}{(k_n+k_i)^2\mp(P_n-P_i)^2}\right| \tag{26}$$

である。同様に $t\to-\infty$ の場合を考えると

$$u|_{t=-\infty}=k_n^2\ \mathrm{sech}^2(\xi_n-\delta_n^-) \tag{27}$$

が得られる。ここで

$$\delta_n^-=-\delta_n^+ \tag{28}$$

である。従って n 番目のソリトンが，他の $N-1$ 個のソリトンと衝突することによって受ける位相変化は

$$\delta_n=\delta_n^+-\delta_n^-=2\delta_n^+ \tag{29}$$

で与えられることになる。同じ計算を 1 から N までのすべての n に対して行なえば，$|t|\to\infty$ の極限で N-ソリトン解は N 個のソリトンに分裂していくことを示すことができる。

2-ソリトン解は

$$u=\frac{2\left[(k_1^2-k_2^2)^2\mp(k_1^2+k_2^2)(P_1-P_2)^2+A^+A^-(k_1^2\cosh 2\xi_2+k_2^2\cosh 2\xi_1)\right]}{\left[A^-\cosh(\xi_1+\xi_2)+A^+\cosh(\xi_1-\xi_2)\right]^2} \tag{30}$$

で与えられる。ここで

$$A^+=\sqrt{(k_1+k_2)^2\mp(P_1-P_2)^2} \tag{31}$$

$$A^{-} = \sqrt{(k_1-k_2)^2 \mp (P_1-P_2)^2} \tag{32}$$

である。$|t| \to \infty$での漸近形を考えると，この解は振幅がk_1^2, k_2^2の二個のソリトンが$\tan^{-1}[(P_2-P_1)/(P_1P_2+1)]$の角をなして衝突している様子を表わしていることが分る。

衝突によって生じる位相変化は

$$\delta_1 = -\delta_2 = \frac{1}{2}\log\left|\frac{(k_1-k_2)^2 \mp (P_1-P_2)^2}{(k_1+k_2)^2 \mp (P_1-P_2)^2}\right|$$

で与えられるが，一次元の場合とくらべてその大きさは，媒質が *negative dispersion* の場合には増し，*positive dispersion* の場合には減少している。　またその増加(減少)率は二つのソリトンの伝播方向が交わる角度が大きくなればなるほど大きくなっている。

§5　参考文献

1) R. Hirota : Phys. Rev. Letters <u>27</u> (1971) 1192.

2) B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili : Soviet Physics-Doklady <u>15</u> (1970) 539.

3) M. Oikawa, J. Satsuma and N. Yajima : J. Phys. Soc. Japan <u>37</u> (1974) 511.

4) V. S. Dryuma : Soviet Physics - JETP Letters 19 (1974) 387.

5) H. Chen : preprint

6) V. E. Zakharov and A. B. Shabat : Funct. Anal. Appl. 8 (1974) 226.

7) R. Hirota : Progr. Theor. Phys. 52 (1974) 1498.

8) R. Hirota : J. Math. Phys. 14 (1973) 810.