

Hyponormal operator の factorization について

東北大 教養 吉野 崇

1. Hilbert space H 上の bounded linear operator S が $\|Sx\| \geq \|S^*x\|$, for all $x \in H$ なる条件を満たす時, hyponormal という。

この作用素は 1950 年に Halmos [5] によって導入されて以来、多くの人々によって研究されて来たが、その典型的性質の一つとして、Andô 氏 [1] による、その operator norm と spectral radius とが一致するという性質が知られている。又、この性質に基づく種々の結果が得られているが、ここでは、それらは省略する。

operator の構造を調べる時、良く知られている operator による factorization が大切な役割を果たす。良く知られている factorization として polar decomposition があるが、最近、特殊な factorization を持つ operator が invariant subspace を持つ事が Suzuki 氏 [7] 及び Radjavi and Rosenthal [6] 等によって示されている。

hyponormal operator のその adjoint operator による factorization が、Douglas [2] 及び Embry [4] によって知られているが、ここでは、[8] で示したように hyponormal operator は contraction と密接な関係があり、その意味で、contraction との関連による factorization について報告する。

2. T を H 上の contraction とすると、 $\{T^{*k}T^k\}$ は non-negative contraction に強収束し、その square root を A_T とすると、 $T^*A_T^2T = A_T^2$ だから、 $A_T T$ は hyponormal である。

逆に、 H 上の hyponormal operator S が与えられた時、或る contraction T が存在して、 $S = A_T T$ と表わせるか？ という問題を生ずる。これに対し、

定理 1. S を H 上の invertible, hyponormal operator とすると、或る、 A_C が invertible な contraction C が存在し、又、 $A_C C$ の polar decomposition を $V A_C$ とするとき、 V と可換な positive operator Y が存在し、 $S = (A_C Y A_C)^{\frac{1}{2}} C$ と表わせる。

証明. $S = V|S|$ を polar decomposition とすると、 V は unitary である。 $C = |S|^{-1}V|S|$ とすると、 $|S|C = V|S| = S$, $C^*|S| = |S|V^* = S^*$ だから、 $\forall x \in H$ に対して、 $\|C^*x\| = \|C^*|S||S|^{-1}x\| = \|S^*|S|^{-1}x\| \leq \|S||S|^{-1}x\| = \|V|S||S|^{-1}x\| = \|Vx\| = \|x\|$ 従って、 C は contraction である。 $C^n = |S|^{-1}V^n|S|$ だから $C^{*n} = |S|V^{*n}|S|^{-1} \therefore C^{*n}C^n = |S|V^{*n}|S|^{-2}V^n|S|$.

$mI \leq |S|^2 \leq MI$ とすると、 $\frac{1}{M}I \leq |S|^{-2} \leq \frac{1}{m}I$ 従って、 $\frac{m}{M}I \leq C^*C \leq I$
 $(\because C \text{ は contraction})$ 。 $\{C^*C\} \downarrow A_C^2$ だから、 $\frac{m}{M}I \leq A_C^2 \leq I$ 。 故に A_C
 は invertible。 又、 $C^*|S|^2C = |S|V^*V|S| = |S|^2$ だから、Douglas [3] に
 よって、 $|S|^2 = A_C Y A_C$ と表わせる。 但し、 $A_C C = V_C A_C$ を polar
 decomposition とするとき、 $V_C^* Y V_C = Y$ で $\|Y\| = \||S|^2\|$ 。 ここで
 V_C は unitary だから、 $Y V_C = V_C Y$ 又、 $|S|^2$ は positive だから Y も
 positive。 故に、 $S = (A_C Y A_C)^{\frac{1}{2}} C$ なる表現が出る。

V_C と可換な任意の non-negative な operator Z に対して、
 $(A_C Z A_C)^{\frac{1}{2}} C$ は hyponormal であり、特に $Z = I$ のときが、 $A_C C$ なる
 形の hyponormal operator であることがわかる。

次に、 S を H 上の invertible operator とすると、 S が
 hyponormal であることと、 $S^{*-1}S$ が contraction であるこ
 とが同値である。 そこで $S^{*-1}S = C$ とすると次の factori-
 zation を得る。

定理 2. 或る normal operator N が存在して、 $S = A_C N A_C$
 と表わせる。

証明. $C = S^{*-1}S$ とすると、 $\forall x \in H$ に対して、 $\|Cx\| = \|S^{*-1}Sx\|$
 $\leq \|S^{-1}Sx\| = \|x\|$ だから C は contraction であり、 $S = S^*C$ より、
 $C^*S = S^* \therefore S = C^{*k}S C^k$, for all $k = 1, 2, 3, \dots$ 。 $\forall x \in H$ に対して、
 $\|Sx\| = \|C^{*k}S C^k x\| \leq \|S\| \|C^k x\|$ で S は invertible だから、 A_C は

invertible. $C^*A_c^2C = A_c^2$ だから、 $S^*S^{-1}A_c^2S^{*-1}S = A_c^2$ 従って、

$$S^{-1}A_c^2S^{*-1} = S^{*-1}A_c^2S^{-1} \quad \therefore (A_cS^{-1}A_c)(A_cS^{*-1}A_c) = (A_cS^{*-1}A_c)(A_cS^{-1}A_c) \text{ 即ち}$$

$$(A_cS^{-1}A_c)(A_cS^{-1}A_c)^* = (A_cS^{-1}A_c)^*(A_cS^{-1}A_c) \text{ 故に } A_cS^{-1}A_c \text{ は normal である。}$$

従って、 $A_c^{-1}SA_c^{-1} = N$ とおくと、 $S = A_cNA_c$ と表わせる。

定理 2 で、normal operator N の polar decomposition を $U|N|$ とすると、 $U = V_c^{1/2}$ である。何故なら、 $S^* = A_cN^*A_c$ より $S^{*-1} = A_c^{-1}N^{*-1}A_c^{-1}$
 $\therefore C = S^{*-1}S = A_c^{-1}N^{*-1}NA_c$ となり $A_cC = N^{*-1}NA_c$ 一方 $A_cC = V_cA_c$
 だから $N^{*-1}N = V_c \quad \therefore N = N^*V_c$ 従って、 $U|N| = |N|U^*V_c \quad N = U|N|$
 $= |N|U$ だから、 $U = U^*V_c \quad \therefore V_c = U^2$ i.e., $U = V_c^{1/2}$ である。

そこで P を $V_c^{1/2}$ と可換な任意の non-negative operator とすると、 $V_c^{1/2}P$ は normal であり、 $A_cV_c^{1/2}PA_c$ は hyponormal operator である。何故なら、 $Y = A_cV_c^{1/2}PA_c$ とすると、 $Y^*Y - YY^*$
 $= A_cPV_c^{1/2*}A_c^2V_c^{1/2}PA_c - A_cPV_c^{1/2}A_c^2V_c^{1/2*}PA_c = A_cPV_c^{1/2*}\{A_c^2 - V_cA_c^2V_c^*\}V_c^{1/2}PA_c$ で
 $A_cC = V_cA_c$ は hyponormal だから $A_c^2 - V_cA_c^2V_c^* \geq 0 \quad \therefore Y^*Y - YY^* \geq 0$
 よって Y は hyponormal である。

従って、特に $P = I$ の時、即ち $A_cV_c^{1/2}A_c$ は hyponormal である。この事から、定理 2 に於て、 A_c を他の non-negative operator ととりかえることにより、 N の代りに unitary operator にとれるか? という問題を生ずる。この問題は、次の如く肯定的に解ける。

定理3. S を H 上の invertible, hyponormal operator とすると、或る positive operator Q 及び、或る unitary operator W が存在して、 $S = QWQ$ と表わせる。

証明. 定理2 より $S = A_c U N A_c = (A_c |N| A_c)(A_c^{-1} U A_c)$ だから、
 $A_c^{-1} U A_c = (A_c |N| A_c)^{-1} S$ 一方、 $S^{*-1} S = A_c^{-1} N^{*-1} N A_c = A_c^{-1} V_c A_c$
 $= A_c^{-1} U^2 A_c = (A_c^{-1} U A_c)^2$ だから、 $S^{*-1} S = (A_c |N| A_c)^{-1} S (A_c |N| A_c)^{-1} S$
 $\therefore S^{*-1} = (A_c |N| A_c)^{-1} S (A_c |N| A_c)^{-1}$ 従って、 $S^* (A_c |N| A_c)^{-1} S = A_c |N| A_c$
 $\therefore \{(A_c |N| A_c)^{-\frac{1}{2}} S^* (A_c |N| A_c)^{-\frac{1}{2}}\} \{(A_c |N| A_c)^{-\frac{1}{2}} S (A_c |N| A_c)^{-\frac{1}{2}}\} = I$ 故に、
 $(A_c |N| A_c)^{-\frac{1}{2}} S (A_c |N| A_c)^{-\frac{1}{2}}$ は unitary である。故に $(A_c |N| A_c)^{\frac{1}{2}} = Q$ とおき、 $Q^{-1} S Q^{-1} = W$ とおくと、求める表現 $S = QWQ$ が得られる。このとき、 $W = (A_c |N| A_c)^{\frac{1}{2}} (A_c^{-1} U A_c) (A_c |N| A_c)^{-\frac{1}{2}}$ である。何故なら、 $S^{*-1} S = Q^{-1} W^2 Q$ より $W^2 = Q S^{*-1} S Q^{-1} = Q (A_c^{-1} U A_c)^2 Q^{-1}$
 $= \{Q A_c^{-1} U A_c Q^{-1}\}^2 \therefore W = Q A_c^{-1} U A_c Q^{-1} = (A_c |N| A_c)^{\frac{1}{2}} (A_c^{-1} U A_c) (A_c |N| A_c)^{-\frac{1}{2}}$
 である。

参考文献

- [1] T. Andô, On hyponormal operators, Proc. Amer. Math. Soc., 14(1963) 290-291.
 [2] R.G. Douglas, On majorization, factorization and range inclusion of operators on Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 17(1966) 413-415.

- [3] R.G. Douglas, On the operator equation $S^*XT = X$ and related topics, *Acta. Sci. Math.*, 29(1969) 19-32.
- [4] Mary R. Embry, Factorization of hyponormal operators, *The Journal of the Australian Math. Soc.*, 13-3 (1972) 323-326.
- [5] P.R. Halmos, Normal dilations and extensions of operators, *Summa. Brasiliensis Math.*, 2(1950) 125-134.
- [6] H. Radjavi and P. Rosenthal, Invariant subspaces for products of hermitian operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 43(1974) 483-484.
- [7] N. Suzuki, Reduction theory of operators on Hilbert space - The invariant subspace problem - , *Indiana Univ. Math. Journ.*, 20-10 (1971) 953-958.
- [8] T. Yoshino, Hyponormal operators in von Neumann algebras, *Tôhoku Math. Journ.*, (to appear).