

不定内積をもつ Hilbert 空間上の作用素

九大・理 富田 総

最近 Hilbert 空間上の作用素の性質を不定内積に基づいて調べる論文および著書が出ているが、基本的な問題は殆ど解決してはいないし、また研究方法が発展してはいない。そこには Hilbert 空間の作用素解析のいろいろな technique, 例えば single operator の理論, 群の unitary 表現論, 作用素環論などを応用する余地が十分残っていると思われる。

§1. 不定内積.

(H, φ) を Hilbert 空間 H に H の不定内積 φ を合せて考えたものをあらわす。 φ は $H \times H$ の sesquilinear form を

$$\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)},$$

$$\|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |\varphi(x, y)|$$

をおいたものである。 φ に対して H の unitary Hermitean 作用素 U が唯一つ存在し、次の等式により φ を定めている。

$$\varphi(x, y) = (\varphi x | y).$$

H で稠密に定義された線形作用素 a に対しては a の φ -adjoint a^φ が定義されるが、それは次式をみたす:

$$a^\varphi = \varphi a^* \varphi.$$

φ は H の射影 φ^+ , φ^- を用いて

$$e = \varphi^+ + \varphi^-, \quad \varphi = \varphi^+ - \varphi^-,$$

(但し e は H の恒等作用素) の形にかける。

§2. Lorentz 作用素.

(H, φ) の作用素 a で $a^\varphi = a^{-1}$ をみたすものを Lorentz 作用素という。 H が有限次元のとき, (H, φ) の Lorentz 作用素全体が Lorentz 群であるがその Cartan 分解に相当する一般の Lorentz 作用素の分解定理は次の通りである。

定理 1. (H, φ) の Lorentz 作用素 a の von Neumann 極分解を $a = bu$ ($b \geq 0$, u は unitary) とおけば, bu は Lorentz 作用素である。 φ^- が有限次元ならば a は H の連続作用素になる。

証明. $b^2 = aa^*$ で aa^* は Lorentz 作用素になり従って

$$\varphi(aa^*)\varphi = (aa^*)^{-1}.$$

これからも $\varphi b \varphi = b^{-1}$ をみたすことがわかる。 $\log b = C$ とおけば $C = C^*$ で $\varphi C \varphi = -C$. もし φ^- が有限次元ならば C が有限次元で連続になることがわかり, これから b が

有界. 従って a も有界になる。

§3. φ -Projection と φ -selfadjoint nilpotent作用素.

$[M]$ で H の部分集合 M の閉線形殻を, また $T=[a]$ で作用素 a の H での range projector をあらわす。

H の linear subspace M に対する φ に関する annihilator は φM^\perp になる。 H における projector, すなわち $f^2=f=f^*$ をみたす作用素 f 以外に, $f^2=f=f^\varphi$ をみたす (H, φ) の作用素 f を考えこれを φ -projector という。

与えられた H の閉部分空間 M がある φ -projector f の値域になる為の必要十分条件は

$$M \cap \varphi M^\perp = \{0\}, \quad [M + \varphi M^\perp] = H$$

が成立する事である。このような閉部分空間 M は (H, φ) で φ -Complementary であるという。また $\varphi M^\perp \supset M$ であるとき M は φ -selfannihilating であるという。

定理. (H, φ) の任意の閉部分空間 M は次のように H で直交分解される

$$M = M_n \oplus M_\alpha, \quad M_n = M \cap \varphi M^\perp$$

但し, M_α は M に含まれる最大の φ -Complementary な閉部分空間で,

$$(\varphi M^\perp)_n = M_n, \quad (M^\perp)_n = \varphi M_n,$$

$$H = M_n + \varphi M_n + [M_\alpha + (\varphi M^\perp)_\alpha].$$

M が φ -Complementary なるための必要十分条件は $M = M_\alpha$ となること。 M が φ -selfannihilating となるための必要十分条件は $M = M_m$ となることである。

φ が有限次元のときは M_m は有限次元で

$$\dim M_m \leq \dim \varphi^-.$$

証明。 M を値域とする射影を f とすれば M_m に対する射影 f_m は

$$f_m = f - [f\varphi f].$$

M_α を値域とする φ -projection f_α は

$$f_\alpha = [f\varphi f] (f\varphi f)^\dagger [f\varphi f] \varphi$$

これから計算によって定理を証明することが出来る。

定理。 f を $f = f^\varphi$ となる nilpotent operator とすれば f の値域の閉包は φ -annihilating となる。

証明。 $g = f\varphi$ とすれば $g = g^*$, $f = g\varphi$ 。 f が nilpotent だから $(g\varphi)^n = 0$ とする $n \geq 2$ が存在する。

$[f] = [g]$ より

$$[f]\varphi(g\varphi)^{n-1} = 0, \quad \varphi([f]x, (g\varphi)^{n-1}y) = 0$$

より

$$\varphi([f]x, [f]\varphi(g\varphi)^{n-2}y) = 0.$$

これから

$$\varphi([f]_\alpha x, (g\varphi)^{n-2}y) = 0$$

$$\varphi([f]_\alpha x, [f]_\alpha (g\varphi)^{n-4}y) = 0$$

となり

$$\varphi([f]_{\alpha} x, (\mathcal{I}\varphi)^{n-4} y) = 0.$$

最後に $[f]_{\alpha} = 0$ 従って $[f] = [f]_n$ を得る。

§4. Lifschitz の定理の応用。

$A = A^{\varphi}$ である作用素 A は φ -selfadjoint であるという。

φ が有限次元であれば φ -selfadjoint な作用素 A は compact な imaginary part をもつ ($A - A^*$ の range は有限次元である)。従って Lifschitz によって始められた Spectre 解析を適用出来る。更に、

定理。 φ が有限次元であるとす。 φ -selfadjoint 作用素 A の実でない Spectre は有限個で、それに対する固有空間の次元も有限次元である。

実際、 A の実でない Spectre 全体は高々可算で集積値は実軸上にしかない。 λ が実でない固有値とすれば $\bar{\lambda}$ も同様で、 Γ を λ を廻る円周 $|\bar{z} - \lambda| = \varepsilon$ とすれば ε が十分小さいとき、

$$e(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (A - \lambda)^{-1} d\lambda$$

であらわされる $e(\lambda)$ は idempotent である。 λ と μ が相異なる Point Spectre ならば

$$e(\lambda)e(\mu) = 0.$$

また $A = A^{\varphi}$ より

$$e(\bar{\lambda}) = e(\lambda)^\varphi.$$

いま $\text{Im} \lambda_i > 0$ とする相異なる Spectre を $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ とし

$$f = e(\lambda_1) + \dots + e(\lambda_k)$$

とすれば

$$f^2 = f, \quad f^\varphi f = f f^\varphi = 0.$$

これより $[f] = [f]_m$ とする f の値域の次元は $\leq \varphi$ の次元となる。

一般の場合の φ -selfadjoint な作用素の解析は、実質的には勝手な閉作用素の Spectre 解析と同値になる。

今一つ特殊な φ -selfadjoint 作用素の場合を考える。

いま a を φ -selfadjoint 作用素とすれば $a\varphi = (a\varphi)^*$.

従って a は

$$a = bc$$

b は positive operator $(aa^*)^{\frac{1}{2}}$, c は $C\varphi = \text{Hermitean unitary}$ となる。そこで u を Hermitean unitary operator として $u\varphi = a$ の表現を得る。 u と φ の相互関係を詳しく調べるために $\varphi^2 = u^2 = e$ に注意して φ と u から自由に生成される discrete 群 G をとる。 G の dual \hat{G} は $(0^+, 0^+)$, $0 < \theta < \pi$, π^+ , π^- の形の T_0 空間である。 \hat{G} の各点に対する G の既約表現 $\alpha \rightarrow \alpha(\theta)$ は次のように表わされる。

$$\varphi(0^+) = u(0^+) = 1, \quad \varphi(0^-) = u(0^-) = -1.$$

$$\varphi(\pi^+) = 1, \mu(\pi^-) = 1, \varphi(\pi^+) = -1, \mu(\pi^-) = 1.$$

$0 < \theta < \pi$ に対しては

$$\varphi(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix}.$$

G 上の Positive definite function P は次のように表現される。

P に対して $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 上の2つの測度 $\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$,

および $0 < \theta < 2\pi$ の各 θ に対する 2×2 の unitary 行列

$$\mu(\theta) = (\mu_{ij}(\theta)), \quad \mu_1(\theta) = \begin{pmatrix} \mu_{11}(\theta) \\ \mu_{21}(\theta) \end{pmatrix}, \quad \mu_2(\theta) = \begin{pmatrix} \mu_{12}(\theta) \\ \mu_{22}(\theta) \end{pmatrix}$$

があるとき,

$$P_1(x)(\theta) = (x(\theta)\mu_1(\theta) | \mu_1(\theta)), \quad 0 < \theta < \pi^-$$

$$P_1(x)(0) = x(0^+), \quad P_1(x)(\pi) = x(\pi^+),$$

$$P_2(x)(\theta) = (x(\theta)\mu_2(\theta) | \mu_2(\theta)), \quad 0 < \theta < \pi$$

$$P_2(x)(0) = x(0^-), \quad P_2(x)(\pi) = x(\pi^-)$$

とすれば

$$P(x) = \int P_1(x)(\theta) d\mu_1(\theta) + \int P_2(x)(\theta) d\mu_2(\theta).$$

この表現を利用して H を direct integral として表現することによって μ と φ の関係を確かめることが可能になる。